ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

S. BÉRARD

Solutions des deux problèmes de géométrie proposés à la page 243 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 377-383

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__377_0>

Solutions des deux problèmes de géometrie proposés à la page 243 de ce volume;

Par MM. S.***, Bérard, principal du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes, J. M. C. Van Utenhove et Tédenat, correspondant de la première classe de l'institut, et recteur de l'académie de Nismes.

Problème I. Déterminer le lieu géomètrique des extrèmités de tous les arcs de cercles d'une même longueur donnée, mais de rayons différens, qui touchent, par leurs milieux, une même droite donnée, en un même point ?

Solution. Soient pris (fig. 8) le milieu commun A de tous ces arcs pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite AX, à laquelle ils doivent être tangens pour axe des x; de manière que l'axe AY des y soit le lieu des centres. Soient de plus $2a$ la longueur commune de ces arcs, AM la moitié de l'un d'eux, et r le rayon du cercle dont il fait partie; le point M sera ainsi l'un des points de la courbe cherchée. Soit enfin abaissée de ce point sur AY la perpendiculaire MQ, ce qui donnera $MQ=x$ et $AQ=y$.

MQ ou x étant le sinus de AM ou a, pour le rayon r, son sinus tabulaire sera $\frac{x}{r}$ et comme, d'un autre côté, l'arc semblable à a qui répond au rayon 1 est $\frac{a}{r}$, on aura

$$\frac{x}{r}=\text{Sin.}\,\frac{a}{r}. \qquad (1)$$

Ainsi, en prenant r arbitrairement, cette équation donnera la valeur correspondante de x, ce qui suffira pour construire la coube par points.

Au surplus, comme $\frac{a}{r}$ est exprimé en parties du rayon, et que l'usage des tables exige qu'il soit exprimé en degrés, il conviendra, pour la pratique de poser

$$x=r\text{Sin.}\frac{180^\circ}{\varpi}\cdot\frac{a}{r}, \text{ ou } x=r\text{Sin.}\frac{200^\circ}{\varpi}\cdot\frac{a}{r};$$

suivant que l'on voudra faire usage de l'ancienne ou de la nouvelle division du cercle.

Pour passer de l'équation (1) à l'équation en coordonnées rectangulaires, il faut recourir à l'équation du cercle dont le rayon est r, laquelle est $x^2=2ry-y^2$, et qui donne

$$r=\frac{x^2+y^2}{2y}.$$

D'un autre côté, on tire de l'équation (1)

$$\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}=\text{Cos.}\,\frac{a}{r}, \qquad \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=\text{Tang.}\,\frac{a}{r};$$

il viendra donc, en substituant

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\text{Sin.}\frac{2ay}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\text{Cos.}\frac{2ay}{x^2+y^2}, \quad \frac{2xy}{x^2-y^2}=\text{Tang.}\frac{2ay}{x^2+y^2}.$$

C'est à peu près à cela que revient la solution de M. S.

Soient pris le point A pour pôle et la corde AM, que nous désignerons par ρ, pour rayon vecteur ; soit désigné par t l'angle MAX ; cet angle ayant pour mesure la moitié de l'arc AM, dont le sinus est la moitié de la corde AM, on aura

$$t : \text{Sin}.t :: \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}\rho : a : \rho \ ,$$

d'où

$$\rho = a . \frac{\text{Sin}.t}{t} \ , \qquad (2)$$

telle est l'équation polaire de la courbe, telle qu'elle a été donnée par MM. Berard et Van Utenhove ; elle peut aisément servir à decrire cette courbe par points ; mais comme t s'y trouve exprimé en parties du rayon, pris pour unité, ce qui peut être incommode pour la pratique, il sera plus convenable d'écrire

$$\rho = \frac{180^\circ}{t} . \frac{a}{\varpi} \text{Sin}.t \ , \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{200^\circ}{t} . \frac{a}{\varpi} \text{Sin}.t \ ,$$

suivant qu'il s'agira de l'ancienne ou de la nouvelle division du cercle, et alors t sera un nombre de degrés.

D'après l'équation (2) on a

$$\frac{d\rho}{dt} = a . \frac{t\text{Cos}.t - \text{Sin}.t}{t^2} \ ,$$

on aura donc, pour l'arc de courbe

$$\int dt \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{dt}{d2} \right)^2} = a\int \frac{d\rho}{dt} \sqrt{t^2 - 2t\text{Sin}.t\text{Cos}.t + \text{Sin}.^2 t} \ ,$$

et pour son secteur

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2 dt = \frac{a^2}{2} \int \frac{dt\text{Sin}.^2 t}{t^2} \ ;$$

d'où M. Bérard conclut que cette courbe n'est ni rectifiable ni quarrable.

M. Bérard passe ensuite de l'équation (2) à l'équation en coordonnées rectangulaires; il suffit pour cela de poser, comme l'on sait,

$$x=\rho\,\text{Cos.}t\quad,\qquad y=\rho\,\text{Sin.}t\ ,$$

d'où

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\quad,\qquad \text{Sin.}t=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\qquad \text{Tang.}t=\frac{y}{x}\ ,$$

$$t=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right).$$

Par toutes ces substitutions, l'équation (2) devient

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)=\frac{ay}{x^2+y^2}\quad,\ \text{ou}\quad \frac{y}{x}=\text{Tang.}\frac{ay}{x^2+y^2}. \qquad (3)$$

Cette dernière équation, un peu plus simple que celle de M. S., n'en diffère pas essentiellement, et s'y ramène sur-le-champ, au moyen de la formule connue

$$\text{Tang.}2z=\frac{2\text{Tang.}z}{1-\text{Tang.}^2z}.$$

En différentiant la première des équations (3) on obtient

$$\frac{\text{d}y}{\text{d}x}=\frac{y(x^2-2ax+y^2)}{x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)}\ ;$$

équation qui, comme l'observe M. Bérard, pourra servir à mener des tangentes à la courbe et à discuter ses points singuliers.

La question proposée peut encore être considérée comme un cas très-particulier du problème des *Trajectoires aux fonctions égales* ; et c'est sous ce point de vue qu'elle a été envisagée par M. Tédenat.

L'equation du problème est alors

$$\int \mathrm{d}x \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=a. \qquad (4)$$

Et, pour en déduire l'équation différentielle de la courbe cherchée, il faudrait différentier, en ayant égard à la variabilité du rayon r, suivant le procédé de Leibnitz.

Mais l'équation du cercle $x^2=2ry-y^2$ donne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{r-y},$$

d'où

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{\frac{r^2-2ry+x^2+y^2}{(r-y)^2}}=\frac{r}{r-y}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

au moyen de quoi l'équation (4) devient

$$\int\frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=a, \quad \text{ou} \quad \int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{e}\right)^2}}=\frac{a}{r};$$

ce qui donne, en remarquant que x et a doivent s'évanouir en même temps,

$$\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{x}{r}\right)=\frac{a}{r}, \quad \text{ou} \quad \text{Sin.}\frac{a}{r}=\frac{x}{r};$$

équation qui, étant la même que l'équation (1), conduira aux mêmes conséquences.

On a, d'après cela,

$$\text{Cos.}\frac{2ay}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;$$

et si, pour savoir en quels points la courbe rencontre l'axe des y, on fait $x=0$, il viendra

$$\text{Cos.}\frac{2a}{y}=-1,\quad \text{d'où}\quad \frac{2a}{y}=(2n+1)\varpi\ ;$$

et par conséquent

$$y=\frac{2a}{(2n+1)\varpi}\ ,$$

n étant un nombre entier, positif ou négatif, quelconque. Ainsi, la courbe coupe l'axe des y en une infinité de points.

Pour rendre raison de cette circonstance, M. Tedenat remarque que, lorsque l'arc $2a$ est parvenu à former une circonférence, son mouvement n'est pas borné là ; que ses extrémités peuvent ensuite se croiser l'une sur l'autre, et se croiser de plus en plus, jusqu'à ce que l'arc soit entièrement doublé, et forme une double circonférence d'un rayon moitié moindre que celui de la première, auquel cas les deux extrémités de cet arc se confondront avec l'origine. L'arc $2a$ continuant à se ployer encore, formera ensuite une triple circonférence dont le rayon sera le tiers de celui de la première, et ainsi de suite ; de manière que la courbe dont il s'agit formera, tant au-dessous qu'au-dessus de la tangente commune, une infinité de circonvolutions, passant toutes par l'origine, comme le représente la figure 9.

Nous terminerons par observer que le problème qui nous occupe a été traité par M. Bossut, dans le second volume de son *Calcul intégral*, page 77 ; mais les formules auxquelles l'auteur parvient, formules d'ailleurs assez compliquées, ne font que ramener le problème aux quadratures. (*)

PROBLÈME II. Déterminer le lieu géométrique des contours de toutes les calottes sphériques d'une même étendue, mais de rayons différens, qui touchent par leur pôle un même plan en un même point?

Ce problème est incomparablement plus facile que le premier.

On démontre sans peine, par les élémens, comme l'a fait M. Bossut dans sa géométrie, ce théorème d'Archimède : savoir, que *le cercle décrit sur une sphère, avec une ouverture de compas quelconque, détermine sur cette sphère une calotte équivalente au cercle décrit sur un plan, avec la même ouverture de compas;* d'où résulte encore que *les cercles décrits sur des sphères inégales, avec une même ouverture de compas, déterminent sur ces sphères des calottes équivalentes.*

Or, il résulte évidemment de là que la surface cherchée est une sphère ayant pour centre le pôle commun de toutes les calottes, et pour rayon le rayon du cercle auquel toutes ces calottes doivent être équivalentes; et c'est là le résultat auquel sont également parvenus MM. S.***, Bérard, Van Utenhove et Tédenat.

(*) Une autre solution du problème, avec des applications pratiques, par M. Argand, a été annoncée au Rédacteur des *Annales*. Elle ne lui est point encore parvenue.