GARNIER

Géométrie. Recherche de la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 346-347
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__346_1>

GÉOMÉTRIE.

Recherche de la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle ;

Par M. Garnier, docteur ès sciences, ancien professeur à l'école polytechnique.

Au Rédacteur des *Annales*,

Monsieur,

La lecture de vos *Annales* me laisse le regret de n'avoir pas connu plutôt cet intéressant recueil ; il m'aurait servi à améliorer quelques théories de la première section de mon algèbre ; mais enfin je l'exploite au profit, tant de la seconde que de l'*Application de l'algèbre à la géométrie*, et des réciproques, ouvrage dont je prépare de nouvelles éditions ; ainsi, Monsieur, vous voyez que je serai de beaucoup votre débiteur.

Je ne sais trop, Monsieur, si vous consentirez à revenir sur une question déjà traitée dans le tome 1.er de votre recueil (pages 149 - 158). Il s'agit de l'expression de la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle. Il me semble que le procédé que j'ai l'honneur de vous adresser se recommande, par sa simplicité.

Soient A, B, C les trois angles du triangle proposé ; soient respectivement r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit ; soit enfin D la distance entre les centres de ces cercles.

En considérant D comme l'un des côtés d'un triangle dont le sommet est en A, observant que les deux autres côtés de ce triangle sont R et $\frac{r}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}$, et que l'angle compris est $\frac{1}{2}(B-C)$ ou $\frac{1}{2}(C-B)$; on trouvera, par l'équation fondamentale de la trigonométrie rectiligne,

$$2rR\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=r^2+(R^2-D^2)\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A.$$

En transportant le sommet de ce triangle de A en B, on aura semblablement

$$2rR\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=r^2+(R^2-D^2)\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B.$$

Retranchant cette dernière équation de la première, il viendra

$$\begin{aligned}2rR\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\}&\\=(R^2-D^2)(\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B)&\ ;\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B&=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\\&=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\\&=\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\ ;\end{aligned}$$

on a donc, simplement

$$2rR=R^2-D^2\ ,$$

ou

$$D=\sqrt{R^2-2rR}\ .$$

Paris, le 16 novembre 1812.