ROCHAT

Géométrie analitique. Démonstration analitique des théorèmes qui servent de fondement à la doctrine des centres des moyennes distances

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 286-290
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__286_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Démonstration analitique des théorèmes qui servent de fondement à la doctrine des Centres des moyennes distances ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

§. I.

Soient des points, en nombre quelconque, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et dont les masses soient respectivement m', m'', m''', ... ; supposons-les invariablement liés entre eux ; rapportons-les à trois plans coordonnés ; et soient alors leurs coordonnées respectives x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' ;...

Soit prise une nouvelle origine dont les coordonnées soient x, y, z : en conservant d'ailleurs la direction des plans coordonnés primitifs. Les nouvelles coordonnées des points du système seront respectivement $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$; $x''-x$, $y''-y$, $z''-z$; $x'''-x$, $y'''-y$, $z'''-z$; .....

Supposons que les coordonnées x, y, z, de la nouvelle origine soient indéterminées, et cherchons à les déterminer de manière que les sommes des produits respectifs des masses du système par leurs distances à chacun des nouveaux plans coordonnés soient séparément nulles ; ces conditions fourniront les trois équations

$$m'(x'-x)+m''(x''-x)+m'''(x'''-x)+\ldots\ldots=0\ ,$$
$$m'(y'-y)+m''(y''-y)+m'''(y'''-y)+\ldots\ldots=0\ ,$$
$$m'(z'-z)+m''(z''-z)+m'''(z'''-z)+\ldots\ldots=0\ ;$$

en transposant et faisant, en général, pour abréger, $k'+k''+k'''+\ldots\ldots=\Sigma(k')$, ces équations deviendront

$$\Sigma(m'x')=x\Sigma(m')\ ,\quad \Sigma(m'y')=y\Sigma(m')\ ,\quad \Sigma(m'z')=z\Sigma(m')\ ;\quad (1)$$

équations qui déterminent x, y, z.

Ainsi, la nouvelle nouvelle origine, qui se trouve absolument déterminée par ces conditions, jouit de cette propriété que la somme des produits respectifs des masses du système par leurs distances à chacun des plans coordonnés primitifs, est égale au produit de la somme de ces masses par la distance de cette nouvelle origine au même plan.

Et, comme les plans coordonnés primitifs sont quelconques, par rapport au système, on peut établir la proposition suivante :

Dans tout système de points matériels, il y a toujours un point, différent, en général, des points du système, dont la propriété caractéristique consiste en ce que le produit de la somme des masses du système par la distance de ce point à un plan quelconque, est égal à la somme des produits de ces masses par leurs distances respectives à ce même plan. Et, si un point jouit de cette propriété, par rapport à trois plans déterminés, non parallèles, il en jouira par rapport à tout autre plan quelconque, et sera conséquemment le point dont il s'agit ici.

Ce point est ce qu'on appelle, en mécanique, le *Centre d'inertie* du système.

Si l'on suppose présentement que les masses m', m'', m''', ...

sont toutes égales entre elles, et que leur nombre est n; les équations (1) prendront la forme

$$\Sigma(x')=nx\ ,\quad \Sigma(y')=ny\ ,\quad \Sigma(z')=nz\ ; \qquad (2)$$

et la nouvelle origine deviendra ce qu'on appelle, en géométrie, le *Centre des moyennes distances*. De là, en raisonnant comme ci-dessus, on conclura le théorème suivant :

THÉORÈME I. Dans tout système de points mathématiques, il y a toujours un centre des moyennes distances *dont la propriété caractéristique consiste en ce que sa distance à un plan quelconque est égale à la somme des distances des points du système au même plan, divisée par le nombre de ces points. Et si un point jouit de cette propriété relativement à trois plans déterminés, non parallèles, il en jouira également par rapport à tout autre plan quelconque, et sera conséquemment le centre des moyennes distances du système.* (*)

Nous ne nous arrêterons pas à faire remarquer les modifications dont ces propositions sont susceptibles, lorsque tous les points matériels ou mathématiques du système sont sompris dans un même plan, ou situés sur une même droite; parce que cela ne présente aucune difficulté.

Tout ce qui précède ne supposant nullement que le système primitif soit rectangulaire ; il en résulte qu'aux distances perpendiculaires on peut substituer des distances mesurées parallèlement à une droite quelconque, donnée de direction.

Il est entendu que, dans tout ceci, les distances mesurées de différens côtés d'un même plan ou d'une même droite doivent être prises avec des signes contraires.

§. II.

Retournons à notre système de points matériels m', m'', m''', ... ;

(*) Voyez la *Géométrie de position*, page 315.

supposons que les plans coordonnés primitifs soient rectangulaires, et que le centre d'inertie soit pris pour origine. Les équations (1) deviendront alors

$$\Sigma(m'x')=0\ ,\quad \Sigma(m'y')=0\ ,\quad \Sigma(m'z')=0. \qquad (3)$$

Soit un point quelconque m, ayant pour ses coordonnées x, y, z; soient r, r', r'', r''',.... les distances respectives des points m, m', m'', m''',.... à l'origine; soient, en outre, a', a'', a''',.... les distances respectives du point m aux points m', m'', m''',...; nous aurons d'abord

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=r^2\ ,\\ x'^2+y'^2+z'^2=r'^2\ ,\\ x''^2+y''^2+z''^2=r''^2\ ,\\ x'''^2+y'''^2+z'''^2=r'''^2\ ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (4)$$

et ensuite

$$\left.\begin{array}{l} (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a'^2\ ,\\ (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2=a''^2\ ,\\ (x-x''')^2+(y-y''')^2+(z-z''')^2=a'''^2\ ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (5)$$

En prenant la somme des produits respectifs des développemens de ces dernières équations par m', m'', m''',...., et ayant égard aux équations (3) et (4), on obtiendra

$$r^2\Sigma(m')+\Sigma(m'r'^2)=\Sigma(m'a'^2). \qquad (6)$$

Ainsi une sphère ayant pour centre le centre d'inertie d'un système de points matériels, la somme des produits des masses de ce système par les quarrés de leurs distances respectives à un point quelconque de la surface de la sphère est égale à la somme des produits respectifs des mêmes masses par les quarrés de leurs distances au centre de cette sphère, augmentée du produit de la somme des masses du système par le quarré du rayon de la sphère.

Si l'on suppose encore ici que les masses m', m'', m''', ... deviennent égales ; auquel cas le centre de la sphère deviendra le centre des moyennes distances du système ; et qu'on représente toujours par n le nombre des points de ce système ; l'équation (6) prendra la forme que voici :

$$nr^2+\Sigma(r'^2)=\Sigma(a'^2) \;;$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME II. Une sphère ayant pour centre le centre des moyennes distances d'un système de points mathématiques; la somme des quarrés des distances des points du système à un point quelconque de la surface de la sphère, est égale à la somme des quarrés des distances des mêmes points à son centre, augmentée d'autant de fois le quarré du rayon de la sphère qu'il y a de points dans le système. (*)

Lorsque les points matériels ou mathématiques du système sont tous compris dans un même plan, ou situés sur une même ligne droite ; ces propositions sont susceptibles de modifications faciles à découvrir, et sur lesquelles conséquemment nous croyons superflu d'insister.

Nous renvoyons, pour les nombreuses conséquences qui peuvent être déduites des deux théorèmes que nous venons de démontrer, à la *Géométrie de position* de M. Carnot.

(*) Voyez la *Géométrie de position*, page 317.