ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD
G. FORNIER
LABROUSSE
LAMBERT
LHUILIER
ROCHAT
LE GRAND
PENJON

Questions résolues. Démonstrations des deux théorèmes de statique énoncés à la page 76 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 192-196
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__192_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations des deux théorèmes de statique énoncés à la page 76 de ce volume ;

Par MM. BÉRARD, G. FORNIER, LABROUSSE, LAMBERT, LHUILIER, ROCHAT, LE GRAND et PENJON.

ÉNONCÉS. *I. La droite qui joint le milieu de l'une quelconque des diagonales d'un quadrilatère à un point de l'autre diagonale de ce quadrilatère qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité, contient le centre de gravité de l'aire de ce quadrilatère.*

II. Si, dans une pyramide quadrangulaire, on joint, par une droite, le centre de gravité de l'aire du triangle qui, ayant pour base l'une quelconque des diagonales de la base de la pyramide, à même sommet qu'elle, à un point de l'autre diagonale de cette base, qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités que l'intersection des deux diagonales est éloignée de son autre extrémité, cette droite contiendra le centre de gravité du volume de la pyramide.

Les démonstrations de ces deux théorèmes fournies par MM Labrousse, professeur de mathématiques à Montélimart, Lambert, professeur au lycée de Bourges, Rochat et Legrand, professeurs au collége

collége de St-Brieux, et Penjon, professeur au lycée d'Anger, ne diffèrent, pour ainsi dire, que dans l'arrangement des propositions et se réduisent à ce qui suit.

1.° Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère, dont E soit l'intersection des deux diagonales; soit F le milieu de la diagonale BD, et soit portée CE sur l'autre diagonale de A en G; enfin soit joint FG. Il s'agit de démontrer que cette dernière droite contient le centre de gravité de l'aire du quadrilatère ABCD.

Pour cela soient menées FA, FC, et soient coupées ces droites respectivement, en H et I au tiers de leur longueur, à partir du point F; soit enfin menée HI qui, d'après la construction, sera parallèle à AC; et soit K son intersection avec FG.

Les deux triangles BAD et BCD, ayant même base BD, ont leurs aires proportionnelles à leurs hauteurs, ou, ce qui revient au même, dans le rapport de AE à CE, ou encore dans le rapport de CG à AG, ou enfin, à cause des parallèles, dans le rapport de IK à HK; la droite HI est donc coupée en K en raison inverse des aires des triangles BAD et BCD, dont H et I sont, par construction, les centres de gravité respectifs; d'où il résulte, par le principe de la composition des forces, que le point K de FG est le centre de gravité de l'aire du quadrilatère ABCD.

Il est facile de conclure de là que la droite FG et la droite qu'on menerait du milieu de AC à un point situé sur BD comme l'est le point G sur AC, se couperaient réciproquement en K au tiers de leur longueur.

2.° Soient S (fig. 2) le sommet d'une pyramide quadrangulaire, ABCD sa base, dont les deux diagonales se coupent en E; soit F le centre de gravité de l'aire du triangle BSD, et soit portée CE sur AC, de A en G; soit enfin joint FG. Il s'agit de démontrer que cette dernière droite contient le centre de gravité du volume de la pyramide SABCD.

Pour cela soient menées FA, FC, et soient coupées ces droites respectivement en H et I, au quart de leur longueur, à partir du point F ; soit enfin menée HI qui, d'après la construction, sera parallèle à AC; et soit K le point où cette droite coupe FG.

Les deux tétraèdres BAD et BCD, ayant même base BD, ont leurs volumes proportionnels à leurs hauteurs ou, ce qui revient au même, dans le rapport de AE à CE, ou encore dans le rapport de CG à AG, ou enfin, à cause des parallèles, dans le rapport de IK à HK ; la droite HI est donc coupée en K en raison inverse des volumes des deux tétraèdres ASBD, CSBD, dont H et I sont, par construction, les centres de gravité respectifs ; d'où il résulte, par le principe de la composition des forces, que le point K de FG est le centre de gravité du volume de la pyramide quadrangulaire SABCD.

Il est facile de conclure de là que la droite FG et la droite qui serait menée du centre de gravité de l'aire du triangle ASC à un point situé sur BD de la même manière que le point G est situé sur AC, doivent se couper réciproquement en K au quart de leur longueur.

Les démonstrations fournies par MM. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, G. Fornier, élève du lycée de Nismes, et Lhuilier, professeur à l'académie de Genève, ne présentent également entre elles que de très-légères différences, et se réduisent à ce qui suit.

1.° Les choses étant d'ailleurs dans la figure 3 comme dans la figure 1 ; soit $3p$ la masse du triangle BAD ; il est connu qu'elle pourra être remplacée par trois masses p placées à ses trois sommets. Soit de plus $3q$ la masse du triangle BCD ; cette masse pourra, pareillement, être remplacée par trois masses q placées à ses trois sommets.

D'après cette décomposition, on aura deux masses $p+q$ placées aux deux extrémités de BD, auxquelles on pourra substituer une masse unique $2(p+q)$ placée au milieu F de cette droite ; on aura de plus deux masses p et q placées respectivement aux deux extrémités A et C de AC, auxquelles on pourra évidemment substituer une masse $p+q$ située en G ; ce qui prouve, à la fois, que le centre de gravité de tout le système est en quelque point K de FG, et qu'il est au tiers de cette droite, à partir du point F.

2.° Les choses étant d'ailleurs dans la figure 4 comme dans la figure 2 ; soit $4p$ la masse du tétraèdre ASBD ; il est connu qu'elle pourra être remplacée par quatre masses p placées à ses quatre sommets. Soit de plus $4q$ la masse du tétraèdre CSBD ; cette masse pourra pareillement être remplacée par quatre masses q placées à ses quatre sommets.

D'après cette décomposition, on aura trois masses $p+q$ placées aux trois sommets du triangle BSD, auxquelles on pourra substituer une masse unique $3(p+q)$ placée au centre de gravité F de l'aire de ce triangle ; on aura de plus deux masses p et q placées respectivement aux deux extrémités A et C de AC, auxquelles on pourra évidemment substituer une masse unique $p+q$ située en G ; ce qui prouve, à la fois, que le centre de gravité de tout le système est en quelque point K de FG, et qu'il est au quart de cette droite, à partir du point F.

M. Bérard reproduit, à cette occasion, une remarque qu'il avait déjà faite ailleurs (*) : c'est que, par de simples intersections de droites, on peut facilement déterminer le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque. Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer le centre de gravité de l'aire d'un pentagone ; en décomposant, de deux manières, ce pentagone, par une diagonale, en un triangle et un quadrilatère, et joignant dans chaque cas les centres de gravités des aires des deux figures par une droite ; on obtiendra deux droites qui se couperont au point cherché.

Ces considérations peuvent facilement être étendues à la recherche du centre de gravité du volume des pyramides et par suite à celle du centre de gravité du volume des polyèdres quelconques.

Aux deux théorèmes qui viennent d'être démontrés, M. Lhuilier

(*) *Opuscules mathématiques* ; (Paris 1810) page 140.

a ajouté le suivant, dont nous laisserons au lecteur le plaisir de trouver la démonstration.

THÉORÈME. Soit un fuseau composé de deux pyramides ayant une base commune et leurs sommets situés de différens côtés du plan de cette base; et soient joints ces sommets par une droite. Soit pris sur cette droite un point autant distant de l'une de ses extrémités que son intersection avec le plan de la base est éloignée de son autre extrémité. Si l'on joint le point ainsi déterminé au centre de gravité de l'aire de la base commune des deux pyramides, par une droite, le centre de gravité du volume du fuseau sera sur cette droite, et il se trouvera situé au quart de sa longueur, à partir du plan de la base. (*)

(*) Pendant que ceci s'imprimait, M. Ferriot, docteur ès sciences et professeur de mathématiques au lycée de Besançon a adressé au Rédacteur une démonstration des deux théorèmes. Elle ne diffère pas sensiblement de celle qu'on vient, en premier lieu, de faire connaître.