EDELMANN

Géométrie. Recherche de l'expression analitique de la surface convexe de l'onglet sphérique compris entre un grand cercle et un petit cercle, qui se coupent dans l'intérieur de la sphère

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 141-143
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__141_0>

GÉOMÉTRIE.

Recherche de l'expression analitique de la surface convexe de l'onglet sphérique compris entre un grand cercle et un petit cercle, qui se coupent dans l'intérieur de la sphère;

Par M. EDELMANN, élève de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

SOIENT un grand et un petit cercle, se coupant sous un angle connu quelconque, dans l'intérieur d'une sphère; soit conduit par le centre C de cette sphère (fig. 1) un plan perpendiculaire à la commune section de ces deux cercles, et conséquemment perpendiculaire à leurs plans. Soit AEBF le grand cercle qui forme la trace de ce plan sur la surface de la sphère. Soient de plus AB le diamètre du grand cercle donné, EF celui du petit cercle, et D leur commune section qui sera, en même temps, le point où le plan du grand cercle AEBF coupera la commune section des plans de ces deux cercles. Désignons enfin par D′ le point où cette commune section rencontre la partie antérieure de la surface sphérique, et dont le point D sera conséquemment la projection orthogonale sur le plan AEBF. Les deux cercles dont les diamètres sont AB et EF diviseront la sphère en quatre onglets, divisés eux-mêmes en deux parties égales par le cercle AEBF; et les surfaces convexes des demi-onglets compris dans l'hémisphère antérieur seront AD′E, ED′B, BD′F, FD′A, formant ensemble la surface de cet hémisphère. Nous nous attacherons d'abord uniquement à déterminer la surface AD′E.

Les données du problème seront : r rayon de la sphère ; la distance $CD=a$; et l'angle $ADE=\lambda$, que les plans des deux cercles forment entre eux. En abaissant du centre C le rayon CG, perpendiculaire sur EF, et coupant cette corde en son milieu H, on aura $CH=a\,\text{Sin.}\lambda$; $GH=r-a\,\text{Sin.}\lambda$; et, en menant le rayon CE, on aura $\text{Sin.}CED=\frac{a\,\text{Sin.}\lambda}{r}$. Nous désignerons ce dernier angle par k.

La surface AD′E est (fig. 2) égale à la différence des deux surfaces ED′G et AD′G, dont la dernière AD′G est un triangle sphérique, rectangle en A. Les angles D′ et G de ce triangle se déterminent facilement par les deux formules $\text{Sin.}D'=\frac{\text{Cos.}\lambda}{\text{Cos.}k}$ et $\text{Cos.}G=\frac{\text{Tang.}k}{\text{Tang.}\lambda}$. La surface de ce triangle sera

$$\tfrac{1}{2}\varpi r^2\left\{\frac{D'+G}{90^\circ}-1\right\}.$$

L'autre surface ED′G, terminée par les deux arcs de grands cercles D′G, E′G, et par l'arc de petit cercle D′E, fait partie de la calotte sphérique, produite par la révolution de l'arc GE autour de l'axe CG, et dont la surface est $2\varpi r(r-a\,\text{Sin.}\lambda)$. Cette surface devant être à celle de la calotte dans le rapport de l'angle G à quatre angles droits, on aura, pour la première,

$$\tfrac{1}{2}\varpi r^2.\frac{G(1-\text{Sin}\,k)}{90^\circ}.$$

On aura donc pour la surface AD′E

$$\tfrac{1}{2}\varpi r^2.\frac{G(1-\text{Sin.}k)}{90^\circ}-\tfrac{1}{2}\varpi r^2\left\{\frac{D'+G}{90^\circ}-1\right\}=\tfrac{1}{2}\varpi r^2\left\{1-\frac{D'+G\,\text{Sin.}k}{90^\circ}\right\}.$$

En raisonnant de même sur les trois autres portions de l'hémisphère, on pourra former le tableau suivant :

$$\text{Surface } AD'E=\tfrac{1}{2}\varpi r^2\left\{1-\frac{D'+G\,\text{Sin.}k}{90^\circ}\right\}.$$

$$\text{Surface ED}'\text{B} = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 \left\{ 1 + \frac{\text{D}' + \text{G}\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

$$\text{Surface BD}'\text{F} = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 \left\{ 1 - \frac{\text{D}' - (180^\circ - \text{G})\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

$$\text{Surface FD}'\text{A} = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 \left\{ 1 + \frac{\text{D}' - (180^\circ - \text{G})\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

On en déduit que la différence BD′E—AD′F ou BD′F—AD′E des surfaces convexes des deux demi-onglets diamétralement opposés est $\varpi r^2 \text{Sin}.k = \varpi ar \text{Sin}.\lambda$; d'où il suit que la différence des surfaces convexes des deux onglets diamétralement opposés est $2\varpi ra \text{Sin}.\lambda$ $= \text{Cir}\, r \times \text{CH}$, c'est-à-dire, équivalente à la zone dont la hauteur serait CH.

A l'aide des formules qui viennent d'être construites, on déterminera facilement la portion de la surface sphérique interceptée entre trois ou un plus grand nombre d'arcs de petits cercles.