ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analise. Remarque sur la résolution des équations du quatrième degré par la méthode de M. Wronski

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 137-139
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__137_1>

ANALISE.

Remarque sur la résolution des équations du quatrième degré par la méthode de M. Wronski ;

Par M. Gergonne.

Dans l'examen que j'ai fait, à la page 51 de ce volume, de la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations, j'ai insinué que cette méthode, ou plutôt la méthode plus simple que je lui ai substituée, cessait d'être applicable, dès le quatrième degré.

Cela est vrai, en effet, si l'on ne veut, pour faire disparaître les diverses fonctions de ρ, qu'employer seulement les deux équations

$$\rho^4-1=0\,, \quad 1+\rho+\rho^2+\rho^3=0\,,$$

comme on serait contraint de le faire, si 4 était un nombre premier; mais, comme l'équation $\rho^4-1=0$ équivaut à $(\rho^2-1)(\rho^2+1)=0$; et comme, d'après ce que j'ai prescrit sur le choix de ρ, on ne saurait avoir $\rho^2-1=0$, on doit avoir $\rho^2+1=0$; or, en ayant égard à cette relation, concurremment avec les premières, on parvient à faire évanouir toutes les fonctions de ρ, comme dans le troisième degré. Mais puisque, dès le quatrième degré, le procédé ne réussit que par cette circonstance particulière que ρ^4-1 est décomposable en deux facteurs rationnels ou, ce qui revient au même, que 4 est égal à 2.2, c'est un motif de plus pour douter du succès de l'application de cette méthode, dans les degrés supérieurs. Je vais indiquer brièvement la marche du calcul pour le quatrième degré, en réduisant tous les exposans de ρ à l'unité, en vertu de l'équation $\rho^2=-1$.

Soit la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

En posant

$$x_1=\tfrac{1}{4}\{+\rho\sqrt[4]{\xi_1}-\sqrt[4]{\xi_2}-\rho\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_2=\tfrac{1}{4}\{-\sqrt[4]{\xi_1}+\sqrt[4]{\xi_2}-\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_3=\tfrac{1}{4}\{-\rho\sqrt[4]{\xi_1}-\sqrt[4]{\xi_2}+\rho\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_4=\tfrac{1}{4}\{+\sqrt[4]{\xi_1}+\sqrt[4]{\xi_2}+\sqrt[4]{\xi_3}\},$$

on aura

$$\xi_1=(-\rho x_1-x_2+\rho x_3+x_4)^4,$$
$$\xi_2=(-x_1+x_2-x_3+x_4)^4,$$
$$\xi_3=(+\rho x_1-x_2-\rho x_3+x_4)^4;$$

d'où on conclura, par la théorie des fonctions symétriques;

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=32(p^2+4r),$$
$$\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3=256\{(p^2-4r)^2+4pq^2\},$$
$$\xi_1\xi_2\xi_3=4096q^4;$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 seront donc les trois racines de la réduite

$$\xi^3-32(p^2+4r)\xi^2+256\{(p^2-4r)^2+4pq^2\}\xi-4096q^4=0.$$

Ces trois racines ne sont au surplus que les quarrés de celles de la réduite ordinaire

$$z^3+8pz^2+16(p^2-4r)z-64q^2=0\ ;$$

comme il est facile de s'en convaincre, et comme cela doit être en effet.