ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Géométrie analitique. Application de la méthode de maximis et minimis à la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre; ces lignes et surfaces étant rapportées à des axes de directions quelconques, passant par ce centre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 105-113

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__105_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Application de la méthode de maximis et minimis *à la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre; ces lignes et surfaces étant rapportées à des axes de directions quelconques, passant par ce centre;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Le sujet dont je vais m'occuper a déjà été traité de diverses manières dans ce recueil; mais, outre qu'on a toujours supposé que les lignes et surfaces du second ordre étaient rapportées à des axes rectangulaires; ce qui ôte aux résultats une généralité souvent très-précieuse; la méthode que je vais suivre me paraît conduire plus directement et plus simplement au but que ne saurait le faire la transformation des coordonnées qui, dans le cas sur-tout où les coordonnées primitives ne sont pas rectangulaires, entraîne dans des calculs d'une extrême complication. Tel est le double motif qui me détermine à revenir encore sur ce sujet.

§. I.

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy=D\,; \qquad (1)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, rapportée à son centre et à deux axes faisant entre eux un angle γ.

En désignant par r la distance d'un point quelconque de cette courbe à son centre, on aura

$$x^2+y^2+2xy\text{Cos.}\gamma=r^2. \qquad (2)$$

Et la propriété qui caractérise les quatre sommets de la courbe est que, pour chacun d'eux, r doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Supposons donc que x et y soient les coordonnées de l'un de ces sommets, auquel cas r sera la moitié de l'un des diamètres principaux. Soit posé

$$y=px\ ;$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(Bp^2+2Cp+A)x^2=D\ ,$$
$$(p^2+2p\text{Cos.}\gamma+1)x^2=r^2\ ;$$

d'où on conclura, par l'élimination de x^2,

$$(Br^2-D)p^2+2(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)p+(Ar^2-D)=0\ ; \qquad (3)$$

différentiant cette équation, par rapport à p seulement, puisque, par l'hypothèse, $\mathrm{d}r=0$, il viendra

$$(Br^2-D)p+(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)=0\ ,$$

d'où

$$p=-\frac{Cr^2-D\text{Cos.}\gamma}{Br^2-D}\ ,$$

cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$(Ar^2-D)(Br^2-D)-(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)^2=0\ ,$$

ou, en développant et ordonnant,

$$(AB-C^2)r^4-D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)r^2+D^2\text{Sin.}^2\gamma=0. \qquad (4)$$

Les quatre racines de cette équation, lesquelles seront, deux à deux, égales et de signes contraires, seront les distances du centre de la courbe à ses quatre sommets, ou, ce qui revient au même, ses quatre demi-diamètres principaux. Les deux valeurs de r^2, substituées dans celle de p, donneront, pour cette inconnue, deux valeurs

p', p'', et alors les directions des diamètres principaux seront données par les deux équations

$$y=p'x\ ,\quad y=p''x.$$

Pour que les deux valeurs de r^2, tirées de l'équation (4) soient réelles, il faut, comme l'on sait, que la quantité

$$(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma\ ,$$

soit positive ; or, cette quantité est la même chose que la suivante

$$(A-B)^2\text{Sin.}^2\gamma+\{2c-(A+B)\text{Cos.}\gamma\}^2,$$

laquelle est essentiellement positive ; ainsi les deux valeurs de r^2 seront réelles, dans tous les cas.

Maintenant, les valeurs de r^2 peuvent être ou toutes deux positives, ou l'une positive et l'autre négative, ou enfin toutes deux négatives ; et, d'après les principes connus, l'équation (1) appartiendra à l'ellipse dans le premier cas, à l'hyperbole dans le second, et n'exprimera absolument rien dans le troisième. Dégageant donc le premier terme de l'équation (4) de son coefficient, et appliquant la règle de Descartes, on trouvera, après les réductions convenables, que l'équation (1) appartient à l'ellipse, si l'on a

$$AB-C^2>0\ ,\quad D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)>0\ ;$$

qu'elle appartient à l'hyperbole, si l'on a

$$AB-C^2<0\ ;$$

et qu'enfin elle n'exprime rien, si l'on a

$$AB-C^2>0\ ,\quad D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)<0.$$

En particulier les deux valeurs de r^2, et par conséquent celles de r, seront égales, si l'on a

$$(A-B)^2\text{Sin.}^2\gamma+\{2C-(A+B)\text{Cos.}\gamma\}^2=0\ ,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'on aura à la fois

$$A=B\ ,\quad 2C=(A+B)\text{Cos.}\gamma\ ;$$

et alors l'équation (1) appartiendra à un cercle.

Dans le cas particulier où les axes des coordonnées seront rectangulaires, on aura $\mathrm{Cos}.\gamma=0$, $\mathrm{Sin}.\gamma=1$; et il viendra conséquemment

$$(AB-C^2)r^4-D(A+B)r^2+D^2=0\,,$$

$$p=-\frac{Cr^2}{Br^2-D}\,,$$

l'équation (1) appartiendra à l'ellipse, si l'on a

$$AB-C^2>0 \quad \text{et} \quad D(A+B)>0\,;$$

à l'hyperbole, si l'on a

$$AB-C^2<0\,;$$

et elle n'exprimera rien, si l'on a

$$AB-C^2>0 \quad \text{et} \quad D(A+B)<0.$$

En particulier, elle appartiendra au cercle, si l'on a, à la fois,

$$A=B \quad \text{et} \quad C=0.$$

Tout cela s'accorde avec les principes connus.

Supposons que les axes des coordonnées soient deux diamètres conjugués de la courbe; alors on devra avoir $C=0$. L'équation (1) deviendra

$$Ax^2+By^2=D\,;$$

en sorte que les quarrés des demi-diamètres conjugués seront

$$\frac{D}{A}\,,\quad \frac{D}{B}\,;$$

la somme des quarrés de ces demi-diamètres sera donc

$$\frac{D}{A}+\frac{D}{B}=\frac{D(A+B)}{AB}\,;$$

et le produit de leurs quarrés et du quarré du sinus de l'angle qu'ils comprennent ou, ce qui revient au même, le quarré de l'aire du parallélogramme construit sur leurs grandeurs et directions, sera

$$\frac{D^2\mathrm{Sin}.^2\gamma}{AB}.$$

Mais, dans la même hypothèse de $C=0$, l'équation (4) devient

$$r^4-D.\frac{A+B}{AB}\,r^2+\frac{D^2}{AB}\,\mathrm{Sin}.^2\gamma=0\,;$$

et, par la théorie des équations, $D.\frac{A+B}{AB}$ est la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux, et $\frac{D^2}{AB}\,\mathrm{Sin.}^2\gamma$ est le produit des quarrés de ces diamètres.

Donc, dans les lignes du second ordre qui ont un centre, 1.° *La somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux ;* 2.° *Le parallélogramme construit sur les grandeurs et directions de deux demi-diamètres conjugués quelconques est équivalant au rectangle construit sur les grandeurs et directions des deux demi-diamètres principaux.*

§. II.

Soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=D\ , \qquad (1)$$

l'équation d'une surface du second ordre, rapportée à son centre et à trois axes dont les directions soient telles qu'on ait

$$\mathrm{Ang.}(y\,,z)=\alpha\ ,\quad \mathrm{Ang.}(z\,,x)=\beta\ ,\quad \mathrm{Ang.}(x\,,y)=\gamma.$$

En désignant par r la distance d'un point quelconque de cette surface à son centre, on aura

$$x^2+y^2+z^2+2yz\mathrm{Cos.}\alpha+2zx\mathrm{Cos.}\beta+2xy\mathrm{Cos.}\gamma=r^2. \qquad (2)$$

Et la propriété qui caractérise les six sommets de la surface courbe est que, pour chacun d'eux, r doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Supposons donc que x, y, z soient les coordonnées de l'un de ces sommets, auquel cas r sera la moitié de l'un des diamètres principaux. Soient posés

$$x=pz\ ,\quad y=qz\ ;$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(Ap^2+Bq^2+C+2A'q+2B'p+2C'pq)z^2=D\ ,$$
$$(p^2+q^2+1+2q\mathrm{Cos.}\alpha+2p\mathrm{Cos.}\beta+2pq\mathrm{Cos.}\gamma)z^2=r^2\ ,$$

d'où on conclura, par l'élimination de z^2,

$$(Ar^2-D)p^2+(Br^2-D)q^2+2(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)pq$$
$$+2(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)p+2(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)q+(Cr^2-D)=0\;; \qquad (3)$$

différentiant cette équation, par rapport à p et q seulement, puisque, par l'hypothèse, $\mathrm{d}r=0$; et égalant séparément à zéro les multiplicateurs de $\mathrm{d}p$ et $\mathrm{d}q$, il viendra

$$(Ar^2-D)p+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)q+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)=0\;,$$
$$(Br^2-D)q+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)p+(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)=0\;;$$

ce qui donne

$$p=\frac{(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)-(Br^2-D)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2}\;,$$

$$q=\frac{(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)-(Ar^2-D)(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2}\;;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (3), elle deviendra

$$(Ar^2-D)(Br^2-D)(Cr^2-D)+2(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)$$
$$-(Ar^2-D)(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)^2-(Br^2-D)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)^2-(Cr^2-D)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2=0,$$

ou, en développant et ordonnant,

$$\left.\begin{aligned}
&(ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)r^6\\
&-D\left\{\begin{aligned}&(BC-A'^2)+2(B'C'-AA')\text{Cos.}\alpha\\&+(CA-B'^2)+2(C'A'-BB')\text{Cos.}\beta\\&+(AB-C'^2)+2(A'B'-CC')\text{Cos.}\gamma\end{aligned}\right\}r^4\\
&+D^2\left\{\begin{aligned}&A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\&+B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\&+C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{aligned}\right\}r^2\\
&-D^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Les six racines de cette équation, lesquelles seront, deux à deux, égales et de signes contraires, seront les distances du centre de la surface courbe à ses six sommets, ou, ce qui revient au même, ses six demi-diamètres principaux. Les trois valeurs de r^2, substituées dans celles de p et q, donneront, pour ces inconnues, trois systèmes de valeurs p', q', p'', q'', p''', q''', et alors les directions des diamètres principaux seront donnés par les trois systèmes d'équations

$$x=p'z\ ,\quad x=p''z\ ,\quad x=p'''z\ ,$$
$$y=q'z\ ;\quad y=q''z\ ;\quad y=q'''z\ .$$

On sait qu'une équation du troisième degré étant

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

pour que ses trois racines soient réelles et inégales, il faut qu'on ait

$$4(3ac-b^2)(3bd-c^2)-(9ad-bc)^2>0\ ;$$

en appliquant cette condition aux valeurs de r^2, données par l'équation (4), on se convaincra qu'elles sont toutes trois réelles, et qu'ainsi on peut juger de leurs signes par les signes des termes de cette équation.

L'équation (1) appartiendra à l'*ellipsoïde*, si les trois valeurs de r^2 sont positives ; elle appartiendra à l'*hyperboloïde à une nappe*, si une seule des valeurs de r^2 est négative ; elle appartiendra à l'*hyperboloïde à deux nappes*, si une seule des valeurs de r^2 est positive ; enfin l'équation (1) n'exprimera absolument rien, si les valeurs de r^2, données par l'équation (4), sont toutes trois négatives ; c'est-à-dire, si tous les termes de cette équation ont le même signe.

Si deux des valeurs de r^2 sont égales ; c'est-à-dire si, en conservant les notations qui viennent d'être employées, on a

$$4(3ac-b^2)(3bd-c^2)=(9ad-bc)^2\ ,$$

l'équation (1) appartiendra à une surface de révolution. Si enfin les trois valeurs de r^2, étant positives, sont égales entre elles, ce qui arrivera, si l'on a, à la fois

$$3ac=b^2\ ,\quad 3bd=c^2\ ;$$

l'équation (1) appartiendra à une sphère.

Dans le cas particulier où les axes des coordonnées seront rectangulaires, on aura

$$\text{Sin.}\alpha=1\ ,\quad \text{Sin.}\beta=1\ ,\quad \text{Sin.}\gamma=1\ ,$$
$$\text{Cos.}\alpha=0\ ,\quad \text{Cos.}\beta=0\ ,\quad \text{Cos.}\gamma=0\ ,$$

d'où

$$(ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)r^6$$
$$-D(BC+CA+AB-A'^2-B'^2-C'^2)r^4$$
$$+D^2(A+B+C)r^2-D^3=0\ ;$$

$$p=r^2.\frac{A'C'r^2-B'(Br^2-D)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-C'^2r^4}\ ,\quad q=r^2.\frac{B'C'r^2-A'(Ar^2-D)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-C'^2r^4}\ ;$$

résultats qui, aux notations près, coïncident parfaitement avec ceux qui ont été donnés par M. Bret (*).

Supposons présentement que les axes des coordonnées soient trois diamètres conjugués ; alors on devra avoir

$$A'=0\ ,\quad B'=0\ ,\quad C'=0\ ;$$

en sorte que l'équation (1) deviendra

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D\ ;$$

les quarrés des demi-diamètres conjugués seront donc respectivement

$$\frac{D}{A}\ ,\quad \frac{D}{B}\ ,\quad \frac{D}{C}\ ;$$

et l'équation (4) deviendra

$$ABCr^6-D(BC+CA+AB)r^4$$
$$+D^2(A\,\mathrm{Sin.}^2\alpha+B\,\mathrm{Sin.}^2\beta+C\,\mathrm{Sin.}^2\gamma)r^2$$
$$-D^3(1-\mathrm{Cos.}^2\alpha-\mathrm{Cos.}^2\beta-\mathrm{Cos.}^2\gamma+2\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma)=0\ ,$$

ou

$$r^6-\left\{\frac{D}{A}+\frac{D}{B}+\frac{D}{C}\right\}r^4$$
$$+\left\{\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,\mathrm{Sin.}^2\alpha+\frac{D}{C}\cdot\frac{D}{A}\,\mathrm{Sin.}^2\beta+\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\,\mathrm{Sin.}^2\gamma\right\}r^2$$
$$-\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,(1-\mathrm{Cos.}^2\alpha-\mathrm{Cos.}^2\beta-\mathrm{Cos.}^2\gamma+2\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma)=0\ ;$$

d'où l'on voit, par la théorie des équations, que la somme des quarrés des demi-diamètres principaux est

$$\frac{D}{A}+\frac{D}{B}+\frac{D}{C}\ ;$$

(*) Voyez les pages 33 et 144 du 2.e volume des *Annales*.

que

que la somme des produits de ces quarrés deux à deux est

$$\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,\text{Sin.}^2\alpha+\frac{D}{C}\cdot\frac{D}{A}\,\text{Sin.}^2\beta+\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\,\text{Sin.}^2\gamma\ ;$$

et qu'enfin le produit de ces mêmes quarrés ou le quarré du produit des demi-diamètres principaux est

$$\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma).$$

Donc, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre, 1.° *La somme des quarrés de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des quarrés des trois demi-diamètres principaux* ; 2.° *la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux ;* 3.° *enfin, le parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est équivalent au parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux.*

Ainsi, en dénotant, pour plus de simplicité, par a, b, c, les trois demi-diamètres principaux, et par a', b', c' trois demi-diamètres conjugués queleonques, on aura les trois équations

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ ,$$

$$b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha+c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta+a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ ,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=a^2b^2c^2\ ;$$

sur quoi il faut remarquer que quelques-unes des lignes a, a', b, b', c, c' peuvent être imaginaires, et qu'alors leurs quarrés sont négatifs.