ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

SERVOIS

Trigonométrie. Démonstrations de quelques formules de trigonométrie sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 84-88

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__84_1>

Calcul. $CD=AD.\text{Cot}.B$, $C'D=AD.\text{Cot}.B'$,

$$DZ^2=\frac{CC'^2}{\text{Sin}.^2D} ;$$

$$CC'^2=CD^2+C'D^2-2CD.C'D.\text{Cos}.D=AD^2\{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}D+\text{Cot}.^2B'\}$$

donc

$$DZ^2=AD^2.\frac{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}.D+\text{Cot}.^2B'}{\text{Sin}.^2D} ;$$

donc aussi

$$AZ^2=AD^2+DZ^2=\tfrac{1}{4}AA'^2\left\{1+\frac{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}.D+\text{Cot}.^2B'}{\text{Sin}.^2D}\right\}.$$

De là on peut exprimer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dans les élémens de l'un de ses angles solides tels que A, en substituant à Cot.B et Cot.B, les valeurs suivantes.

$$\text{Cot}.B=\frac{AB-AA'.\text{Cos}.BAA'}{AA'.\text{Sin}.BAA'} , \quad \text{Cot}.B'=\frac{AB'-AA'.\text{Cos}.B'AA'}{AA'.\text{Sin}.B'AA'} .$$

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstrations de quelques formules de trigonométrie sphérique ;

Par M. Servois, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère.

I.

On trouve, dans les œuvres de *Goudin* (Paris 1803), un mémoire qui a pour titre : *Usages de l'ellipse dans la trigonométrie sphérique*, et où l'auteur, entre autres applications, s'occupe de la résolution de l'équation

Cos.

$$\text{Cos.}\alpha + A\,\text{Sin.}\alpha = B \qquad (1)$$

dans laquelle α est l'inconnue, et A, B, des quantités données dont la dernière n'excède pas l'unité.

On peut parvenir fort simplement au but sans recourir aux propriétés de l'ellipse dont l'emploi, en cette rencontre, semble tout à fait hors de propos.

Soient posés, en effet,

$$B = \text{Cos.}\beta\,, \qquad (2)$$

$$A = \text{Sin.}\beta\,.\,\text{Cot.}\gamma \qquad (3)$$

l'équation (1) deviendra

$$\text{Cos.}\alpha + \text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta.\text{Cot.}\gamma - \text{Cos.}\beta = 0\,,$$

d'où on tire en doublant,

$$\frac{2\text{Cos.}\alpha - 2\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta} = -2\text{Cot.}\gamma = -\frac{2\text{Cos.}\gamma}{\text{Sin.}\gamma}\,,$$

ou encore

$$\frac{(1+\text{Cos.}\alpha)(1-\text{Cos.}\beta)-(1-\text{Cos.}\alpha)(1+\text{Cos.}\beta)}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta} = \frac{(1-\text{Cos.}\gamma)-(1+\text{Cos.}\gamma)}{\text{Sin.}\gamma}\,;$$

équation qui peut être mise sous cette forme

$$\frac{2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\beta - 2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\beta}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\beta\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\beta} = \frac{2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma - 2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\gamma}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\gamma}\,,$$

ou en simplifiant,

$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\beta = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma - \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\gamma\,;$$

équation qui peut être écrite ainsi

$$(\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\alpha - \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\beta.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma)(\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\gamma) = 0\,;$$

égalant successivement chaque facteur à zéro, on obtiendra

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta.\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,, \qquad (4)$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = -\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma\,. \qquad (5)$$

Ainsi, en supposant $B<1$, et c'est le cas des applications trigonométriques, on obtiendra l'angle auxiliaire β par l'équation (2); l'équation (3) donnera ensuite l'angle auxiliaire γ, et on obtiendra enfin les deux valeurs de α par les formules (4), (5); ce qui est exactement conforme aux résultats obtenus par *Goudin*.

II.

M. Gauss a donné, sans démonstration (*), les formules trigonométriques que voici: a, b, c, étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et A, B, C, les angles respectivement opposés, on a

$$\text{I.}\qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{II.}\qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{III.}\qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}.\ (**)$$

Il m'a paru que ces formules pouvaient être assez facilement démontrées comme il suit.

Les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique sont, comme l'on sait,

$$\text{Sin.}b\text{Sin.}c\text{Cos.}A=\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c,\qquad \text{Sin.}B\text{Sin.}C\text{Cos.}a=\text{Cos.}A+\text{Cos.}B\text{Cos.}C,$$

$$\text{Sin.}a\text{Sin.}c\text{Cos.}B=\text{Cos.}b-\text{Cos.}a\text{Cos.}c,\qquad \text{Sin.}A\text{Sin.}C\text{Cos.}b=\text{Cos.}B+\text{Cos.}A\text{Cos.}C,$$

$$\text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}C=\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b;\qquad \text{Sin.}A\text{Sin.}B\text{Cos.}c=\text{Cos.}C+\text{Cos.}A\text{Cos.}B.$$

(*) Voyez *Théoria motùs corporum cœlestium ;* Hambourg, 1809, page 51.

(**) Ces formules ont aussi été données par M. *Delambre*, dans la *Connaissance des temps pour* 1809, page 445.

(*Notes des éditeurs.*)

Eliminant, dans les équations des deux premières lignes, $\mathrm{Cos}.c$ et $\mathrm{Cos}.C$, au moyen de celles de la dernière, en se rappelant que $1-\mathrm{Cos}.x^2=\mathrm{Sin}.x^2$, et supprimant ensuite le facteur commun à tous les termes des équations résultantes, il viendra

$$\mathrm{Sin}.c\mathrm{Coc}.A=\mathrm{Cos}.a\mathrm{Sin}.b-\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.b\mathrm{Cos}.C\ ,\quad \mathrm{Sin}.C\mathrm{Cos}.a=\mathrm{Cos}.A\mathrm{Sin}.B+\mathrm{Sin}.A\mathrm{Cos}.B\mathrm{Cos}.c\,,$$

$$\mathrm{Sin}.c\mathrm{Cos}.B=\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.b-\mathrm{Cos}.a\mathrm{Sin}.b\mathrm{Cos}.C\ ,\quad \mathrm{Sin}.C\mathrm{Cos}.b=\mathrm{Sin}.A\mathrm{Cos}\,B+\mathrm{Cos}.A\,\mathrm{Sin}.B\mathrm{Cos}.c\,;$$

en ajoutant et retranchant successivement les équations de chaque colonne, les résultats qui en proviendront, pourront être écrits ainsi

$$\mathrm{Sin}.c(\mathrm{Cos}.B+\mathrm{Cos}.A)=(1-\mathrm{Cos}.C)\mathrm{Sin}.(a+b)\ ,\quad \mathrm{Sin}.C(\mathrm{Cos}.b+\mathrm{Cos}.a)=(1+\mathrm{Cos}.c)\mathrm{Sin}.(A+B)\ ,$$

$$\mathrm{Sin}.c(\mathrm{Cos}.B-\mathrm{Cos}.A)=(1+\mathrm{Cos}.C)\mathrm{Sin}.(a-b)\ ,\quad \mathrm{Sin}.C(\mathrm{Cos}.b-\mathrm{Cos}.a)=(1-\mathrm{Cos}.c)\mathrm{Sin}.(A-B)\,;$$

en observant que

$$\mathrm{Cos}.y+\mathrm{Cos}.x=2\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\ ,\quad \mathrm{Cos}.y-\mathrm{Cos}.x=2\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$1-\mathrm{Cos}.x=2\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}x\ ,\qquad 1+\mathrm{Cos}.x=2\mathrm{Cos}.^2\tfrac{1}{2}x\ ,$$

$$\mathrm{Sin}.x=2\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}x\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}x\ ,$$

ces équations deviendront

$$2\mathrm{Sin}.c.\ \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)=4\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,),$$

$$2\mathrm{Sin}.c.\ \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)=4\mathrm{Cos}.^2\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,),$$

$$2\mathrm{Sin}.C.\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)=4\mathrm{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c.\ \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$2\mathrm{Sin}.C.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)=4\mathrm{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c.\ \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B);$$

divisant successivement les deux premières par chacune des deux dernières, il viendra

$$\frac{\mathrm{Sin}.c}{\mathrm{Sin}.C}=\left\{\frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}c.\ \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\right\}^2.\ \frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\,,$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.c}{\mathrm{Sin}.C}=\left\{\frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}c.\ \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\right\}^2.\ \frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\,,$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.c}{\mathrm{Sin}.C}=\left\{\frac{\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)}{\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}c.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\right\}^2.\ \frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\,,$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.c}{\mathrm{Sin}.C}=\left\{\frac{\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}C.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}c.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\right\}^2.\ \frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(\,a+b\,)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(\,a-b\,)}{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\,;$$

mais, par la proportionnalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, on a

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+B)\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\text{Sin.}\,a+\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}A+\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C}$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-B)\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\text{Sin.}\,a-\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}A-\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C},$$

susbtituant donc, réduisant et extrayant la racine quarrée, on tombera sur les formules annoncées. On se convaincra d'ailleurs que les racines doivent toutes être prises avec le signe $+$, en considérant le cas particulier où le triangle serait bi-rectangle en B et C; on aurait alors $B=C=b=c=q$, q étant le cadran et $A=a$; valeurs qui ne peuvent satisfaire qu'avec le signe $+$.

Il est presque superflu d'observer que les formules I, II, III, IV, donnent, en les combinant, par voie de division, les *Analogies de Néper*, lesquelles se trouvent ainsi démontrées par ce qui précède.