ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie. Note sur le problème de l'inscription de trois cercles à un triangle, traité à la page 343 du premier volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 60-64
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__60_0>

GÉOMÉTRIE.

Note sur le problème de l'inscription de trois cercles à un triangle, traité à la page 343 du premier volume des Annales ;

Par LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

PLUSIEURS géomètres, n'ayant pas sous la main les derniers volumes des *Mémoires de la société italienne*, ont manifesté le désir de connaître, par la voie des *Annales*, l'analise qui a conduit M. *Malfatti* à l'élégante construction à laquelle il est parvenu, pour l'inscription de trois cercles à un triangle. Les rédacteurs, dans la vue de répondre à leur vœu, se sont adressés à M. *Bidone* qui a bien voulu leur faire parvenir un extrait de la solution de M. *Malfatti*. Malheureusement cette solution est peu propre à éclairer sur les moyens par lesquels l'auteur l'a obtenue ; elle se réduit uniquement, en effet, à former les équations du problème et les valeurs des inconnues, et à prouver ensuite, à l'aide des relations entre les données, que les dernières satisfont aux premières. M. *Bidone* termine ainsi son extrait :

« Tel est le précis de la solution de M. *Malfatti*, qu'il dit avoir » converti en un théorème, comme on le voit par ses procédés, pour » la présenter sous une forme plus simple, et pour ne pas être obligé » d'exposer le nombre de calculs qu'il a sans doute dû faire pour » arriver à cette construction, en cherchant à résoudre directement le » problème. M. *Malfatti* n'indique nullement la trace qu'il a suivie

» pour parvenir aux valeurs des inconnues, et l'on peut dire que son » mémoire est tout renfermé dans ce précis, à quelques développe- » mens près ».

Au lieu de vérifier les valeurs des inconnues sur les équations de M. *Malfatti*, les rédacteurs des *Annales* préfèrent les vérifier sur les leurs qui sont plus simples, attendu que M. *Malfatti* emploie six inconnues au lieu de trois, et qu'en outre, n'ayant pas représenté par des symboles particuliers les distances des sommets du triangle donné au centre du cercle qui lui est inscrit, ses formules se trouvent ainsi compliquées de radicaux.

Avant de venir au but, il faut d'abord établir entre les données du problème des équations de rélation propres à simplifier le calcul. On a (tom. 1.er pag. 343)

$$c+c'+c''=2s\ ,$$

$$s-c'=\rho'\ ,$$

$$s-c''=\rho''\ ;$$

en ajoutant ces équations et réduisant, il vient

$$c=\rho'+\rho''\ ;$$

d'où

$$c^2 \quad \text{ou} \quad c(s-\rho)=\rho'^2+2\rho'\rho''+\rho''^2\ ,$$

ou, en multipliant par ρ et mettant pour $\rho\rho'\rho''$ sa valeur R^2s,

$$\rho sc=2R^2s+c\rho^2+\rho\rho'^2+\rho\rho''^2\ ;$$

en mettant pour s, dans le second membre sa valeur $c+\rho$ il vient

$$\rho sc=2R^2c+2R^2\rho+c\rho^2+\rho\rho'^2+\rho\rho''^2\ ;$$

mais on a

$$\rho^2=d^2-R^2\ ,\qquad \rho'^2=d'^2-R^2\ ,\qquad \rho''^2=d''^2-R^2\ ;$$

substituant donc, il viendra, en réduisant

$$\rho sc=cR^2+cd^2+\rho d'^2+\rho d''^2 \;;$$

ajoutant à cette dernière équation, l'équation

$$0=2Rcd-2\rho d'd'' \;,$$

l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\rho sc=c(R+d)^2+\rho(d'-d'')^2 \;;$$

en y mettant pour c sa valenr $s-\rho$, elle deviendra

$$\rho\{s^2+(R+d)^2-(d'-d'')^2\}=s\{(R+d)^2+\rho^2\} \;;$$

ajoutant à cette équation, l'équation identique

$$-2\rho s(R+d)=-2s\rho(R+d) \;,$$

l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\rho\{(s-R-d)^2-(d'-d'')^2\}=s(R+d-\rho)^2 \;;$$

et comme, dans toutes ces formules, on peut, à volonté, permuter les accens, on aura

$$(A) \qquad \rho\{(s-R-d)^2-(d'-d'')^2\}=s(R+d-\rho)^2 \;,$$
$$(A') \qquad \rho'\{(s-R-d')^2-(d''-d)^2\}=s(R+d'-\rho')^2 \;,$$
$$(A'') \qquad \rho''\{(s-R-d'')^2-(d-d')^2\}=s(R+d''-\rho'')^2 \;.$$

Cela posé, on a vu (tom. 1.er, pag. 344) que les équations du problème sont

$$(B) \qquad \rho'r'+2R\sqrt{r'r''}+\rho''r''=Rc \;,$$
$$(B') \qquad \rho''r''+2R\sqrt{r''r}+\rho r=Rc' \;,$$
$$(B'') \qquad \rho r+2R\sqrt{rr'}+\rho'r'=Rc'' \;;$$

et il sagit de prouver qu'on y satisfait, en posant

$$(C)\qquad 2\rho\ r\ =R(s-R+d\ -d'-d'')\ ,$$

$$(C')\qquad 2\rho' r' =R(s-R+d'-d''-d\ )\ ,$$

$$(C'')\qquad 2\rho'' r''=R(s-R+d''-d\ -d')\ (^*).$$

Pour cela soient d'abord ajoutées, deux à deux, les équations (C, C', C'',) il viendra, en divisant par 2,

$$(D)\qquad \rho' r' +\rho'' r''=R(s-R-d\ )\ ,$$

$$(D')\qquad \rho'' r''+\rho\ r\ =R(s-R-d')\ ,$$

$$(D'')\qquad \rho\ r\ +\rho' r' =R(s-R-d'')\ ;$$

multipliant les mêmes équations deux à deux, il viendra

$$(E)\qquad 4\rho'\rho'' r' r''=R^2\{(s-R-d\ )^2-(d'-d'')^2\}\ ,$$

$$(E')\qquad 4\rho''\rho\ r'' r\ =R^2\{(s-R-d')^2-(d''-d\ )^2\}\ ,$$

$$(E'')\qquad 4\rho\ \rho' r\ r' =R^2\{(s-R-d'')^2-(d\ -d')^2\}\ ;$$

multipliant respectivement ces dernières équations par ρ, ρ', ρ'', et changeant $\rho\rho'\rho''$ en R^2s, il vient

$$(F)\qquad 4R^2sr' r''=R^2\rho\ \{(s-R-d\ )^2-(d'-d'')^2\}\ ,$$

$$(F')\qquad 4R^2sr'' r\ =R^2\rho'\{(s-R-d')^2-(d''-d\ )^2\}\ .$$

$$(F'')\qquad 4R^2sr\ r' =R^2\rho''\{(s-R-d'')^2-(d\ -d')^2\}\ .$$

Par leur comparaison avec les équations (A, A', A''), et la division par s, ces équations deviennent

$$(G)\qquad 4R^2r' r''=R^2(R+d\ -\rho\ )^2\ ,$$

$$(G')\qquad 4R^2r'' r\ =R^2(R+d'-\rho')^2\ ,$$

$$(G'')\qquad 4R^2r\ r' =R^2(R+d''-\rho'')^2\ ;$$

d'où, par l'extraction de la racine quarrée, on déduit celles-ci

---

(*) Voyez tome 1.er, page 348.

$$(H) \qquad 2R\sqrt{r'r''}=R(R+d\ -\rho\ )\ ,$$
$$(H') \qquad 2R\sqrt{r''r}\ =R(R+d'\ -\rho'\ )\ ,$$
$$(H'') \qquad 2R\sqrt{r\ r'}\ =R(R+d''-\rho'')\ ,$$

lesquelles ajoutées respectivement aux équations (D , D' , D''), donnent

$$\rho'r'\ +2R\sqrt{r'r''}+\rho''r''=R(s-\rho\ )=Rc\ ,$$
$$\rho''r''+2R\sqrt{r''r}\ +\rho\ r\ =R(s-\rho'\ )=Rc'\ ,$$
$$\rho\ r\ +2R\sqrt{r\ r'}+\rho'\ r'\ =R(s-\rho'')=Rc''\ ;$$

qui sont précisément les équations du problème.