ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 382-384

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__382_1>

Deuxième solution ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Lemme connu. Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce. Par les sommets de ce triangle soient menées des droites qui forment un triangle circonscrit au premier. Que ce second triangle soit donné d'espèce seulement. On détermine, comme il suit, le plus grand de ces triangles.

Sur les côtés du premier triangle soient décrits (extérieurement à lui) des segmens de cercles respectivement capables des angles donnés du second triangle. Par chacun des sommets du premier triangle, soit menée une droite parallèle à la droite qui joint les centres des cercles dont les jambes de cet angle sont les cordes. Ces parallèles formeront le plus grand triangle demandé. (*)

PROBLÈME I. Soient trois cercles donnés de grandeur et de position, dont chacun touche les deux autres (extérieurement). Mener à chacun de ces cercles une tangente, de manière que le triangle formé par ces trois tangentes ait ses angles donnés, et soit le plus grand possible ?

Soient c, c', c'' les centres donnés de trois cercles qui se touchent extérieurement (fig. 12). Soient R, R', R'' leurs rayons donnes. Soient T, T', T'' les points de contact de ces trois cercles et des droites qui, par leur rencontre, forment un triangle XX'X'' dont les angles sont donnés et qui doit être le plus grand.

(*) Voyez les pages 2[illegible]—[illegible]2 de ce volume ; voyez aussi mes *Elémens d'analise géométrique*, etc., pages 2[illegible]—2[illegible]5.

Analise. Le triangle $CC'C''$ est déterminé. Par les centres C, C', C'', soient menées aux côtés du triangle $XX'X''$ des parallèles ; elles formeront un triangle $ZZ'Z''$ semblable au triangle $XX'X''$, et circonscrit au triangle $CC'C''$.

Des sommets ..... Z , Z' , Z'' ,
soient abaissées sur XX' , XX'' ; $X'X''$, $X'X$; $X''X$, $X''X'$,
les perpendiculaires ZQ , ZP ; $Z'Q'$, $Z'P'$; $Z''Q''$, $Z''P''$.

Les quadrilatères $ZPXQ$, $Z'P'X'Q'$, $Z''P''X''Q''$ sont déterminées, puisque, dans chacun d'eux, on connaît, outre les angles, deux côtés adjacents, qui sont les rayons de deux des cercles donnés.

Les rectangles $ZQP'Z'$, $Z'Q'P''Z''$, $Z''Q''PZ$, dans chacun desquels un des côtés est donné (savoir le rayon de l'un des cercles donnés), croissent comme les côtés ZZ', $Z'Z''$, $Z''Z$ du triangle $ZZ'Z''$; et, en particulier, le triangle $XX'X''$ est le plus grand, lorsque le triangle $ZZ'Z''$ est le plus grand. Partant, on détermine comme il suit le plus grand triangle $XX'X''$.

Construction. Au triangle $CC'C''$ soit circonscrit (*Lemme*) le plus grand triangle $ZZ'Z''$ ayant ses angles égaux aux angles donnés du triangle $XX'X''$. Soient menées aux cercles donnés des tangentes respectivement parallèles aux côtés du triangle $ZZ'Z''$. Ces tangentes formeront, par leurs rencontres, le triangle demandé $XX'X''$.

PROBLÈME II. A un triangle donné, inscrire trois cercles dont les rayons soient entre eux dans des rapports donnés, de manière que chacun de ces cercles touche un des côtés du triangle donné, que chacun d'eux touche aussi les deux autres cercles (extérieurement), et que le système de ces cercles soit le plus petit possible.

Solution. La solution de ce second problème est ramenée à celle du premier, par la méthode ordinaire de fausse position.

Remarque I. Le cas particulier de l'égalité des rayons des cercles donnés rend équilatéral le triangle $CC'C''$.

Remarque II. Au lieu de s'occuper de la limite en grandeur du triangle donné d'espèce, circonscrit au système des cercles donnés, on peut demander que ce triangle soit donné de grandeur. Et réciproquement, au triangle donné, on peut inscrire un système de cercles donné de grandeur. Ces problèmes sont élémentaires, et on peut tirer de leur construction la limite pour l'un et l'autre cas.

Remarque III. Tout ce qui a été dit sur le cas du contact des trois cercles s'applique à un système de trois cercles dont les rayons ont des rapports donnés, soit entre eux soit aux droites qui joignent leurs centres.

Envisagé sous ce point de vue général, le problème proposé donne lieu à huit cas, suivant que les contacts des cercles et des côtés du triangle, relativement à ce triangle, sont tous les trois intérieurs, deux intérieurs et un extérieur, un intérieur et deux extérieurs, ou enfin tous les trois extérieurs.

FIN DU TOME SECOND.