ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

G. M. RAYMOND

Géométrie analitique. De la génération des lignes du second ordre, par l'intersection de deux lignes droites

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 360-368
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__360_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

De la génération des lignes du second ordre, par l'intersection de deux lignes droites;

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

La génération des courbes, par l'intersection de lignes droites, assujetties à certaines conditions, a fixé plus d'une fois l'attention des géomètres, à raison de l'intérêt que présente ce mode de construction, et des conséquences auxquelles il peut conduire. Je m'occupais d'un cas particulier de cette génération, pour les sections coniques, lorsque j'ai reçu le numéro des *Annales* pour février 1812, où M. Rochat (*) traite un objet qui a quelque analogie avec le mien.

Je vais indiquer ici la génération dont il s'agit, parce qu'elle me paraît propre à rendre raison, en particulier, de l'analogie remarquable et des différences respectives que l'ellipse et l'hyperbole présentent, dans quelques points de leur théorie.

Soient deux droites IM, I'M (fig. 4) assujetties à tourner autour des points fixes I et I', en faisant continuellement entre elles un angle variable IMI'; la nature de la courbe décrite par le point M, dépendra des conditions auxquelles on soumettra l'inclinaison respective des deux droites génératrices sur l'axe des x.

Pour plus de simplicité, j'établis l'origine des abscisses au point O, milieu de la distance II', et je suppose les coordonnées rectangulaires. Soit $OI=A$. Les droites IM et I'M auront respectivement pour équations

$$y=a(x-A) \quad , \quad y=a'(x+A) \ ;$$

a, a' étant les tangentes trigonométriques de leurs inclinaisons respectives sur l'axe des x.

Si le produit aa' de ces tangentes est donné et constant, l'équation de la courbe décrite par le point M sera

$$y^2=aa'(x^2-A^2) \quad \text{ou} \quad y^2-aa'x^2=-aa'A^2 \ ; \qquad \text{(E)}$$

et elle présentera deux cas, suivant que les facteurs a et a' seront de signes contraires ou de mêmes signes, c'est-à-dire, suivant que le produit aa' sera négatif ou positif.

---

solide du cube est à l'angle solide de l'octaèdre comme le côté d'un triangle équilatéral est au triple de sa hauteur, c'est-à-dire, comme 2 est à $3\sqrt{3}$.

(*) Voyez la page 225 de ce volume.

(*Notes des éditeurs.*)

Or, si les lignes génératrices sont constamment inclinées en sens contraire, le point décrivant M se trouvera toujours compris entre les perpendiculaires Tt et T$'t'$ menées à la droite II$'$ par les points I et I$'$; en sorte que ces perpendiculaires seront, dans le sens des x, les limites de la courbe qui sera entièrement comprise entre elles.

Posant donc, dans ce cas,

$$aa'=-\frac{B^2}{A^2},$$

B étant une nouvelle ligne, dont la valeur est donnée par la formule

$$B=A\sqrt{-aa'},$$

l'équation deviendra

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2;$$

c'est-à-dire, celle d'une ellipse dont les axes sont $2A$ et $2B$.

Si, en particulier, on avait $aa'=-1$, il viendrait $B=A$; et l'ellipse deviendrait un cercle, ce qui est d'ailleurs évident, puisque la condition $aa'=-1$ ou $1+aa'=0$ étant celle de la perpendicularité des deux génératrices, l'angle M devrait constamment être droit.

Suivant qu'on aura

$$-aa'<1 \quad \text{ou} \quad -aa'>1,$$

c'est-à-dire, suivant que l'angle M sera obtus ou aigu, on aura

$$\frac{B^2}{A^2}<1 \quad \text{ou} \quad \frac{B^2}{A^2}>1,$$

c'est-à-dire,

$$B<A \quad \text{ou} \quad B>A;$$

l'ellipse sera donc décrite sur son grand axe dans le premier cas et sur son petit axe dans le second.

La droite I$'$M s'inclinant de plus en plus, viendra enfin coïncider avec I$'$I; alors, a' devenant zéro, a devra devenir infini, c'est-à-dire, qu'alors IM se confondra avec Tt; ainsi I est un point de la courbe, et on en dirait autant de I$'$.

Si présentement on suppose, au contraire, que le produit constant aa' soit positif ou, ce qui revient au même, que les deux facteurs a et a' soient constamment de mêmes signes; les droites IM et I'M se trouvant constamment inclinées dans le même sens, leur point de concours M' se trouvera toujours hors des parallèles Tt et T't' qui conséquemment seront encore dans ce cas les limites de la courbe, mais de manière que cette courbe, qui d'ailleurs passera toujours par les points I, I', n'aura aucun de ses points compris entre elles.

Posant alors

$$aa'=\frac{B^2}{A^2},$$

en sorte qu'on ait

$$B=A\sqrt{aa'},$$

l'équation (E) deviendra

$$B^2x^2-A^2y^2=A^2B^2,$$

qui est celle d'une hyperbole dont le premier et le second axe sont $2A$ et $2B$.

Si l'on avait $aa'=1$, il en résulterait $B=A$, et l'hyperbole serait équilatérale.

Si, sans statuer sur le signe de aa', dans l'équation (E), on y fait

$$-aa'=\frac{B^2}{A^2} \quad \text{d'où} \quad B=\pm A\sqrt{-aa'},$$

cette valeur de B sera réelle ou imaginaire, suivant que aa' sera négatif ou positif; ce qui explique pourquoi *le demi-axe des* y *étant exprimé par* B *dans l'ellipse, il se change en* B$\sqrt{-1}$ *dans l'hyperbole, et réciproquement.*

La longueur de A étant déterminée, pour une ellipse ou une hyperbole, on voit que la longueur de B dépendra du produit aa', et que, pour obtenir l'une ou l'autre courbe, il suffit de faire ce produit constant, en lui assignant d'ailleurs, pour chaque cas, une valeur arbitraire. De là la raison pourquoi *on peut établir, sur un même premier axe, une infinité d'ellipses ou d'hyperboles qui ne diffèrent que par leur second axe.*

Il est presque superflu d'observer que, si l'on établissait les lignes génératrices LN, L'N sur le second axe, et qu'on les assujettit à la condition $aa'=-\frac{A^2}{B^2}$, le point N d'intersection circulerait sur la même ellipse, en dedans des perpendiculaires Zz, $Z'z'$ menées à LL' par ses extrémités; mais qu'aussitôt qu'on supposerait $aa'=\frac{A^2}{B^2}$, le point N' sortirait de ces limites, pour décrire l'hyperbole conjuguée de la première.

Menons maintenant, dans l'ellipse, les diamètres G*g* et H*h*, respectivement parallèles aux génératrices MI' et MI, et les coupant en R et S; à cause des parallèles, puisque O est le milieu de II', les points R et S seront les milieux respectifs de MI et MI'; les deux diamètres G*g* et H*h* seront donc conjugués l'un de l'autre. Les mêmes considérations s'appliquent à l'hyperbole; et de là cette propriété commune aux deux courbes que *deux cordes supplémentaires, soit de l'ellipse soit de l'hyperbole, indiquent, par leurs directions, un système de diamètres conjugués.*

La tangente de l'angle M est, en général,

$$\frac{a'-a}{1+aa'},$$

si l'on y met pour aa' la valeur $-\frac{B^2}{A^2}$ qui répond à l'ellipse, on aura

$$\text{Tang.M}=\frac{A^2(a'-a)}{A^2-B^2}, \qquad \text{(P)}$$

le *minimum* et le *maximum* de cette valeur correspondent respectivement au *maximum* et au *minimum* de l'angle des deux droites génératrices, lorsque cet angle est obtus, c'est-à-dire, lorsque l'ellipse est construite sur son grand axe. Or, si a et a' étaient numérique-
ment

ment égaux, à cause des signes contraires de ces deux nombres, cette valeur deviendrait,

$$\text{Tang.M}=\frac{2aA^2}{A^2-B^2},$$

ou, à cause de $a=\frac{B}{A}$,

$$\text{Tang.M}=\frac{2AB}{A^2-B^2}; \qquad (\text{P}')$$

quantité plus petite que la valeur (P), tant que a et a' ne seront pas égaux. (*)

Ainsi, dans l'ellipse, *le* maximum *de l'angle formé par les diamètres conjugués est l'angle formé par les diamètres conjugués égaux.*

Si l'on avait $B>A$, la valeur (P′) ne ferait simplement que changer de signe; ainsi *l'angle formé par les cordes supplémentaires établies aux extrémités du petit axe de l'ellipse est supplément de l'angle des cordes supplémentaires établies aux extrémités de son grand axe.*

Soient menées les ordonnées GP, HQ des points G, H. Faisons d'abord

$$\text{OP}=x, \qquad \text{GP}=y;$$

l'équation du diamètre OG sera

$$y=a'x, \quad \text{d'où} \quad y^2=a'^2x^2.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (E), il viendra

$$x^2=\frac{aA^2}{a-a'}, \quad \text{d'où} \quad y^2=\frac{a'^2aA^2}{a-a'},$$

(*) Car, en général, de $pq=m^2$, résulte nécessairement $2m<p+q$. On a, en effet, $0<(p-q)^2$, ou $4pq<(p-q)^2+4pq$, ou $4pq<(p+q)^2$, ou $4m^2<(p+q)^2$, ce qui donne $2m<p+q$.

Si l'on égale à zéro la différentielle de l'expression (P) il viendra $da'=da$; mais, d'un autre côté, à cause de aa' constant, on a $ada'+a'da=0$; ce qui donne, en ayant égard à la différence des signes de a et a', $a'=a$ comme ci-dessus.

donc

$$\overline{OG}^2 = x^2 + y^2 = \frac{aA^2 + a'^2 aA^2}{a - a'} .$$

Par un semblable calcul on trouvera

$$\overline{OH}^2 = \frac{-a'A^2 - a^2 a'A^2}{a - a'} ,$$

et de là

$$\overline{OG}^2 + \overline{OH}^2 = (1 - aa')A^2 ;$$

désignant donc par A', B' les demi-diamètres conjugués OG, OH, et se rappelant que $-aa'A^2 = B^2$, il viendra

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 ;$$

c'est-à-dire, que *la somme des quarrés des demi-diamètres conjugués de l'ellipse est une quantité constante.*

Comme le calcul est absolument le même pour l'hyperbole, sauf le signe du produit aa', on trouvera, en tenant compte de cette différence, que *la différence des quarrés des demi-diamètres conjugués de l'hyperbole est une quantité constante.*

Le calcul précédent donne

$$A' = A\sqrt{\frac{(1 + a'^2)a}{a - a'}} , \qquad B' = A\sqrt{-\frac{(1 + a^2)a'}{a - a'}} ;$$

or, en désignant par φ l'angle des deux génératrices, lequel est aussi celui des demi-diamètres A', B', on a

$$\text{Sin.}\varphi = \frac{a - a'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}} ;$$

de là

$$A'B'\text{Sin.}\varphi = A^2\sqrt{-aa'} = AB.$$

Le calcul étant exactement le même pour l'hyperbole, il en faut conclure que, *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les parallélogrammes construits sur les grandeurs et directions des diamètres conjugués sont tous équivalens.*

En prenant le produit aa' négativement pour l'ellipse et positivement pour l'hyperbole, on trouvera que l'expression de l'excentricite est

$$\text{pour l'ellipse, } A\sqrt{1-aa'}\text{ ; pour l'hyperbole, } A\sqrt{1+aa'}.$$

Et si l'on détermine, d'après ces expressions, celles des rayons vecteurs pour les deux courbes, on trouvera toutes leurs propriétés qui y sont relatives, et l'on verra également que la différence des propriétés de l'une et de l'autre tient à la difference de signes du produit aa', c'est-à-dire, à la différence de direction de l'une des droites génératrices. Il en est de même pour ce qui regarde les tangentes aux deux courbes.

Si l'on emploie l'équation (E) telle qu'elle est, sans changer le signe de aa', auquel cas elle exprimera une hyperbole, on pourra la mettre sous cette forme

$$y=\pm x\sqrt{aa'\left(1-\frac{A^2}{x^2}\right)},$$

qui annonce le caractère asymptotique de cette courbe; puisque son équation tend, de plus en plus, à se changer en celle-ci

$$y=\pm x\sqrt{aa'},$$

qui serait enfin

$$y=\pm ax,$$

si les droites génératrices devenaient parallèles. Pour s'assurer de ces résultats, il faut observer que l'abscisse du point de concours ayant pour expression

$$x=\frac{a+a'}{a-a'}A,$$

devient $x=\frac{2aA}{0}$, si l'on a $a'=a$, d'où $aa'=a^2$; ce qui fait évanouir la fraction $\frac{aa'A^2}{x^2}$.

Si l'origine des abscisses était au point I', les équations respectives des droites generatrices I'M et IM seraient

$$y = a'x \ , \qquad y = a(x - 2A) \ ;$$

supposant aa' négatif, et faisant

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2} \ , \quad \text{d'où} \quad -2aa'A = \frac{2B^2}{A} \ ,$$

l'équation de l'ellipse serait

$$y^2 = \frac{2B^2}{A}x + aa'x^2.$$

La quantité $\frac{2B^2}{A}$ étant l'expression du paramètre de l'ellipse, en la désignant par P, il viendra

$$y^2 = Px + aa'x^2.$$

La construction sera la même, quel que soit l'éloignement du point I; or, si l'on suppose que IM devienne parallèle à l'axe des x, on aura $a = 0$, et l'équation deviendra simplement

$$y^2 = Px \ ,$$

équation de la parabole. Or, comme on a

$$B = A\sqrt{-aa'} \ , \quad \text{d'où} \quad A = \frac{B}{\sqrt{-aa'}} \ ,$$

la supposition de $a = 0$ donnera $A = \infty$; ce qui exprime, en effet, comme l'on sait, le passage de l'ellipse à la parabole.

Quant à cette dernière courbe, nous pourrions nous en tenir à cette considération, qui fait dériver son équation d'une origine commune à celle des autres courbes. On pourrait aussi employer directement une construction analogue aux précédentes, en cherchant la courbe décrite par l'intersection de deux droites mobiles dont l'une est constamment parallèle à l'axe des x, pendant que l'autre passe constamment par un point de cet axe. Mais nous nous réservons de revenir sur ce qui concerne la parabole en particulier, par un autre méthode de laquelle nous déduirons, d'une manière plus lumineuse, les principales propriétés de cette courbe.