ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FLAUGERGUES

Géométrie élémentaire. Relation entre le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers inscrits à une même sphère

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 357-360

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__357_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Relation entre le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers inscrits à une même sphère ;

Par M. Flaugergues, astronome, correspondant de la première classe de l'institut.

Théorème. Soit AB (fig. 1) une ligne coupée en moyenne et extrême raison au point C (AC étant la médiane). Je dis que l'angle solide du dodécaèdre est à l'angle solide de l'icosaèdre (*) comme $(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)^{\frac{5}{2}}$ est à $15.\overline{AB}^4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)^{\frac{1}{2}}$; ces deux corps étant supposés inscriptibles à la même sphère (**).

Démonstration I. Imaginons (fig. 2) trois pyramides dont le sommet commun soit au centre D de la sphère, qui aient pour bases trois faces contiguës à un angle solide du dodécaèdre inscrit, et qui soient par conséquent égales au quart de ce solide. Ayant tiré les lignes FE, EG, GF, imaginons des plans qui passent par

(*) L'auteur entend ici par *angle solide* d'un polyèdre régulier, la portion de ce polyèdre détachée par un plan passant par les extrémités de celles de ses arêtes qui concourent à un même sommet ; portion qui est conséquemment une pyramide régulière.

(**) Si l'on prend AB pour unité on aura $AC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $BC=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$; et la proposition de M. Flaugergues reviendra à dire que l'angle solide du dodécaèdre est à l'angle solide de l'icosaèdre comme $\sqrt{25-11\sqrt{5}}$ est à $3\sqrt{3(3-\sqrt{5})}$.

(*Notes des éditeurs.*)

ces lignes et par le centre D ; on aura trois pyramides triangulaires, et chacune de ces pyramides étant à la pyramide pentagonale comme le triangle EHF est au pentagone FHEIK, le solide formé par ces trois pyramides réunies, et qui est composé de deux pyramides opposées qui ont pour base commune le triangle FEG, et dont les axes sont sur le rayon DH perpendiculaire à cette base, est au quart du dodécaèdre dans la même raison.

Cela posé, nommons P la surface du pentagone FHEIK ; nommons S la solidité de la pyramide ou de l'angle solide HGEF ; nommons s la solidité de la pyramide DGEF ; nommons enfin D la solidité du dodécaèdre et a le diamètre de la sphère circonscrite. Du centre L du pentagone FHEIK ayant tiré les rayons LE, LF, LH, le dernier coupant EF en M, on aura

$$\mathrm{LM} : \mathrm{MH} :: \mathrm{ELF} : \mathrm{EHF} \;;$$

donc, *componendo*

$$\mathrm{LH} : \mathrm{MH} :: \mathrm{LEHF}\left(=\tfrac{2}{5}\mathrm{P}\right) : \mathrm{EHF} = \frac{2\mathrm{MH}}{5\mathrm{LH}}.\mathrm{P} \;;$$

mais, par la propriété du cercle,

$$\div\!\div\, 2\mathrm{HL} : \mathrm{HE} : \mathrm{HM} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{2\mathrm{LH}} \;;$$

donc

$$\mathrm{EHF} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{5\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{P} \;;$$

puis donc que

$$\mathrm{HEIKF} : \mathrm{EHF} :: \tfrac{1}{4}\mathrm{D} : \mathrm{S}+s \;:$$

on aura

$$\mathrm{P} : \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{5\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{P} :: \tfrac{1}{4}\mathrm{D} : \mathrm{S}+s = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{20\overline{\mathrm{LH}}^2}\mathrm{D} \;.$$

Soit présentement abaissée du point E, dans le plan FGE, la perpendiculaire EN sur DH ; puisque la ligne HE est inscrite à la sphère, on aura

$$\div a : \mathrm{HE} : \mathrm{HN} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{a} ;$$

de plus

$$\mathrm{DN} : \mathrm{HN} :: s : \mathrm{S} ;$$

donc, *componendo*

$$\mathrm{DH}(=\tfrac{1}{2}a) : \mathrm{HN}\left(=\frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{a}\right) :: \mathrm{S}+s\left(=\frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{20\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{D}\right) : \mathrm{S} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^4}{10a^2.\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{D} ;$$

II. Imaginons (fig. 3) cinq pyramides qui aient leur sommet commun au centre D′ de la sphère, pour bases les faces contiguës de l'icosaèdre inscrit, et qui soient par conséquent égales au quart de ce solide. Ces pyramides formeront, par leur réunion un solide TOPQRSD′ composé de deux pyramides opposées qui ont pour base commune le pentagone OPQRS, et dont les axes sont sur le rayon D′T perpendiculaire à cette base.

Cela posé, nommons I la solidité de l'icosaèdre, S′ celle de la pyramide ou de l'angle solide TOPQRS, et s' celle de la pyramide D′OPQRS ; ayant tiré, dans le plan OPQRS, la perpendiculaire OV sur D′T, et désignant toujours par a le diamètre de la sphère ; la corde inscrite TO donnera

$$\div a : \mathrm{OT} : \mathrm{TV} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{a} ;$$

mais on a

$$\mathrm{D'V} : \mathrm{VT} :: s' : \mathrm{S'} ,$$

d'où, *componendo*

$$\mathrm{D'T}(=\tfrac{1}{2}a) : \mathrm{VT}\left(=\frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{a}\right) :: (\mathrm{S'}+s')(=\tfrac{1}{4}\mathrm{I}) : \mathrm{S'} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{2a^2}.\mathrm{I} ,$$

III. On a donc

$$S : S' :: \frac{\overline{HE}^4}{10a^2.\overline{LH}^2}.D : \frac{\overline{OT}^2}{2a^2}.I\ ;$$

c'est-à-dire,

$$S : S' :: \overline{HE}^4 \times D : 5\overline{LH}^2 \times \overline{OT}^2 \times I\ ;$$

mais 1.° (Euclide XIV. 7 et XIII. 18)

$$D : I :: \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} : \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}\ ;$$

2.° (Euclide XIII, 12)

$$I : \overline{OT}^2 :: \quad I \quad : \ 3\overline{LH}^2\ ;$$

3.° (Euclide XIII. 9. 10 et XIV. 11)

$$\overline{HE}^4 : \overline{LH}^4 :: \left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)^2 : \ \overline{AB}^4\ ;$$

multipliant toutes ces proportions par ordre, et simplifiant, il viendra

$$S : S' :: \left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)^{\frac{5}{2}} : 15\overline{AB}^4\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C.Q.F.D. (*)

(*) En suivant la marche tracée par M. Flaugergues, on démontrera que l'angle