ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

# Troisième solution

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 2 (1811-1812), p. 350-356
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__350_0>

## *Troisième solution ;*

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soient A et B les deux joueurs, $m$ et $n$ leurs adresses respectives, $p$ et $q$ le nombre des jetons qu'ils ont chacun.

Soient, dans un état quelconque du jeu, $x$ le nombre des jetons de A et $Z_x$ son espérance; au coup suivant, cette espérance deviendra $Z_{x+1}$ ou $Z_{x-1}$ ; or, la probabilité qu'elle deviendra $Z_{x+1}$ est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle deviendra $Z_{x-1}$ est $\frac{n}{m+n}$. On aura donc, en vertu d'un principe connu (*),

$$Z_x=\frac{m}{m+n}Z_{x+1}+\frac{n}{m+n}Z_{x-1}\ ,$$

ou

$$mZ_{x+1}-(m+n)Z_x+nZ_{x-1}=0\ ;$$

équation linéaire du second ordre, aux différences finies, entre les deux variables $x$ et $Z$.

Pour l'intégrer, nous ferons usage de la méthode donnée par M. Lagrange, dans les *Mémoires de l'académie de Berlin*, pour 1775 (**).

Posant donc

$$Z_x=\alpha^x\ ,\quad \text{d'où}\quad Z_{x+1}=\alpha^{x+1}\ ,\quad Z_{x-1}=\alpha^{x-1}\ ;$$

il viendra, en substituant, et divisant par $\alpha^{x-1}$ ;

$$m\alpha^2-(m+n)\alpha+n=0\ ,$$

(*) Voyez ci-dessus page 341.

(**) Voyez aussi le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral* de M. Lacroix, deuxième édition, pages 573 et suivantes.

(*Notes des éditeurs.*)

ou encore

$$(m\alpha-n)(\alpha-1)=0\ ;$$

ce qui donne pour $\alpha$ ces deux valeurs

$$\alpha=1\ ,\quad \alpha=\frac{n}{m}$$

d'où on conclura

$$\alpha^x=1\ ,\quad \alpha^x=\left(\frac{n}{m}\right)^x$$

et par conséquent

$$Z_x=G+H\left(\frac{n}{m}\right)^x,$$

$G$ et $H$ étant des constantes arbitraires.

Pour déterminer ces constantes, nous remarquerons 1.° que, si A n'avait plus aucun jeton, son espérance serait absolument nulle, puisque la partie se trouverait terminée au profit de B ; 2.° qu'au contraire s'il avait $p+q$ jetons ; son espérance se trouverait changée en certitude, puisque la partie se trouverait terminée à son profit. On voit donc que

à $x=0$ doit répondre $Z_x=0$ ,
à $x=p+q$ doit répondre $Z_x=1$ ,

ce qui donne les deux équations

$$0=G+H\ ,\quad 1=G+H\left(\frac{n}{m}\right)^{p+q}\ ;$$

d'où

$$G=\frac{m^{p+q}}{m^{p+q}-n^{p+q}}\ ,\quad H=-\frac{m^{p+q}}{m^{p+q}-n^{p+q}}\ ;$$

substituant donc dans la valeur de $Z_x$, elle deviendra

$$Z_x=\frac{m^x-n^x}{m^{p+q}-n^{p+q}}\cdot m^{p+q-x}\ ;$$

or, lorsque A a $x$ jetons, B en a $p+q-x$ ; désignant donc par $y$ le nombre de jetons de B lorsque A en a $x$, on pourra écrire

$$Z_x=\frac{m^y(m^x-n^x)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,.$$

Si l'on désigne par $Z_y$ l'espérance correspondante de B, on aura pareillement

$$Z_y=\frac{n^x(m^y-n^y)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,.$$

Telles sont donc les espérances respectives de A et B, lorsque le premier a $x$ jetons et le second $y$ ; si donc on designe simplement par $X$ et $Y$ leurs espérances respectives lorsque le premier a $p$ jetons et le second $q$, ainsi que la question le suppose, on aura

$$X=\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,,\qquad Y=\frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,.$$

Dans le cas particulier où l'on a $n=m$, ces valeurs semblent devenir $\frac{0}{0}$; mais, si on les reduit d'abord à leur plus simple expression, on a pour ce cas

$$X=\frac{p}{p+q}\,,\qquad Y=\frac{q}{p+q}\,;$$

comme on pouvait bien le prévoir.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir servent à résoudre, non seulement la question proposée, mais encore les deux questions suivantes :

1.° *Quelles doivent être les adresses respectives des deux joueurs, pour qu'en leur distribuant un nombre de jetons donné d'une manière déterminée, leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

2.° *Les adresses respectives des deux joueurs étant connues, de quelle manière faut-il répartir entre eux un nombre de jetons donné, pour que leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

Nous allons donner un exemple de chacune de ces deux questions.

*Exemple I.* On donne 4 jetons à A et 2 à B ; quelles doivent être leurs adresses respectives pour que l'espérance de A soit à celle de B comme 850 est à 81 ?

On a ici $X=\frac{850}{850+81}=\frac{850}{931}$; on a de plus $p=4$, $q=2$, et $p+q=6$ ; donc

$$\frac{850}{931}=\frac{m^2(m^4-n^4)}{m^6-n^6}=\frac{m^2(m^2+n^2)}{m^4+m^2n^2+n^4} ;$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant par $n^4$,

$$81\left(\frac{m}{n}\right)^4+81\left(\frac{m}{n}\right)^2-850=0 .$$

Cette équation donne d'abord

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{-81\pm531}{162} ;$$

rejetant la racine négative qui rendrait $\frac{m}{n}$ imaginaire, il vient

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{25}{9} \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{n}=\frac{5}{3} ;$$

ainsi l'adresse de A doit être à celle de B dans le rapport de 5 à 3.

*Exemple II.* L'adresse de A étant à celle de B dans le rapport de 3 à 2, de quelle manière faut-il repartir 5 jetons entre eux pour que leurs espérances soient dans le rapport de 135 à 76 ?

On a ici $X=\frac{135}{135+76}=\frac{135}{211}$, $m=3$, $n=2$, $p+q=5$, d'où $q=5-p$ ; donc

$$\frac{135}{211}=\frac{3^{5-p}(3^p-2^p)}{3^5-2^5}=\frac{3^5-2^p.3^{5-p}}{211} ,$$

ou

$$135=243-243.\left(\frac{2}{3}\right)^p ,$$

d'où

$$\left(\frac{2}{3}\right)^p=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

donc $p=2$ et conséquemment $q=3$ ; ainsi il faut donner 2 jetons à A et 3 à B.

Quant à la question proposée dans la note de la page 224 de ce volume, sa résolution complette exigerait une discussion dans laquelle nous n'avons pas actuellement le loisir de nous engager. (*)

Nous nous bornerons donc à remarquer que, $x$ désignant toujours le nombre des jetons de A, à un coup quelconque, et $t$ exprimant le nombre des coups qu'il reste encore à jouer, pour que la partie finisse; si l'on représente par $Z_{x,t}$ la probabilité que la partie finira précisément après ce nombre de coups, cette probabilité, au coup suivant, deviendra $Z_{x+1,t-1}$ ou $Z_{x-1,t-1}$ ; or, la probabilité qu'elle prendra la première de ces deux valeurs est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle prendra la seconde est $\frac{n}{m+n}$; on doit donc avoir

$$Z_{x,t}=\frac{m}{m+n}Z_{x+1,t-1}+\frac{n}{m+n}Z_{x-1,t-1} ;$$

équation du second ordre aux différences finies et partielles entre les deux variables indépendantes $x$, $t$ et leur fonction $Z$. En posant, pour abréger,

$$m=M(m+n)\ ,\quad n=N(m+n)\ ,$$

elle devient

$$Z_{x,t}=MZ_{x+1,t-1}+NZ_{x-1,t-1} ; \qquad (\Delta)$$

Pour intégrer cette équation, on peut encore faire usage de la

(*) Ce problème a été aussi traité par M. Laplace : voyez les *Mémoires des Savans étrangers*; tome VII, page 153.

(*Note des éditeurs.*)

méthode de M. Lagrange dejà indiquée (*). Posant donc

$Z_{x,t}=a\alpha^x\beta^t$, d'où $Z_{x+1,t-1}=a\alpha^{x+1}\beta^{t-1}$, $Z_{x-1,t-1}=a\alpha^{x-1}\beta^{t-1}$,

il viendra, en substituant, divisant par $a\alpha^{x-1}\beta^{t-1}$ et transposant,

$$M\alpha^2-\beta\alpha+N=0\ ,$$

cette équation étant successivement résolue par rapport à $\alpha$ et à $\beta$ donne

$$\alpha=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4MN}}{2M}\ ,\quad \beta=\frac{M\alpha^2+N}{\alpha}\ ;$$

de là, en développant en série,

$$\alpha^x=\frac{1}{M^x}\left\{\beta^x-\frac{x}{1}MN\beta^{x-2}+\frac{x}{1}.\frac{x-3}{2}M^2N^2\beta^{x-4}-\ldots\ldots\right\}$$

$$\beta^t=M^t\alpha^t+\frac{t}{1}M^{t-1}N\alpha^{t-2}+\frac{t}{1}.\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\alpha^{t-4}+\ldots\ldots\ ;$$

donc

$$Z_{x,t}=\frac{a}{M^x}\left\{\beta^{x+t}-\frac{x}{1}MN\beta^{x+t-2}+\frac{x}{1}.\frac{x-3}{2}M^2N^2\beta^{x+t-4}-\ldots\right\}\ ,$$

$$Z_{x,t}=a\left\{M^t\alpha^{x+t}+\frac{t}{1}M^{t-1}N\alpha^{x+t-2}+\frac{t}{1}.\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\alpha^{x+t-4}+\ldots\right\};$$

or, on sait qu'à ces valeurs on peut substituer celles-ci

$$Z_{x,t}=\frac{1}{M^x}\varphi(x+t)-\frac{x}{1}\frac{N}{M^{x-1}}\varphi(x+t-2)+\frac{x}{1}.\frac{x-3}{2}\frac{N^2}{M^{x-2}}\varphi(x+t-4)-\ldots,$$

$$Z_{x,t}=M^t\psi(x+t)+\frac{t}{1}M^{t-1}N\psi(x+t-2)+\frac{t}{1}.\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\psi(x+t-4)+\ldots;$$

puis encore celles-ci

$$Z_{x,t}=\frac{1}{M^x}Z_{0,x+t}-\frac{x}{1}\frac{N}{M^{x-1}}Z_{0,x+t-2}+\frac{x}{1}.\frac{x-3}{2}\frac{N^2}{M^{x-2}}Z_{0,x+t-4}-\ldots,$$

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; tome III.e, page 248, n.o 1012.

( *Note des éditeurs.* )

$$Z_{x,t}=M^tZ_{x+t,0}+\frac{t}{1}M^{t-1}NZ_{x+t-2,0}+\frac{t}{1}\,\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2Z_{x+t-4,0}+\ldots;$$

voilà donc deux intégrales de l'équation ($\Delta$), et il est même aisé de s'assurer, *a priori*, qu'elles la rendent identique; mais on voit qu'elles supposent que l'on connaisse l'une ou l'autre des premières bandes horizontale ou verticale de la table à double entrée dont cette équation exprime la loi.