ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

PESCHIER

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 346-349

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__346_1>

Deuxième solution ;

Par MM. Lhuilier, professeur de mathématiques, et Peschier, professeur de philosophie et inspecteur à l'académie impériale de Genève. (*)

Que les deux joueurs soient désignés par A et B (**) ;

Que leurs adresses respectives soient m et n ;

(*) Après nous être communiqué nos solutions, nous les avons trouvées si semblables l'une à l'autre, que nous avons cru devoir les réunir sous une rédaction commune.

(**) Pour faciliter la comparaison des résultats, on a cru convenable d'employer ici des notations pareilles à celles du mémoire précédent.

(*Note des éditeurs.*)

Que l'état du jeu lorsque A a p jetons et que B en a q soit désigné par A_p, B_q;

Qu'enfin l'espérance de A lorsqu'il a p jetons soit désignée par x_p.

A chaque distribution de jetons, le joueur A a m cas pour obtenir un jeton de plus et n cas pour en avoir un de moins.

En remarquant donc que $x_0 = 0$, on aura les équations

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m}{m+n}x_2\,, \\[2ex] x_2 = \dfrac{m}{m+n}x_3 + \dfrac{n}{m+n}x_1\,, \\[2ex] x_3 = \dfrac{m}{m+n}x_4 + \dfrac{n}{m+n}x_2\,, \\[1ex] \dotfill \\[1ex] x_{p-1} = \dfrac{m}{m+n}x_p + \dfrac{n}{m+n}x_{p-2}\,; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{m+n}{m}x_1\,, \\[2ex] x_3 = \dfrac{m+n}{m}x_2 - \dfrac{n}{m}x_1\,, \\[2ex] x_4 = \dfrac{m+n}{m}x_3 - \dfrac{n}{m}x_2\,, \\[1ex] \dotfill \\[1ex] x_p = \dfrac{m+n}{m}x_{p-1} - \dfrac{n}{m}x_{p-2}\,; \end{array}\right.$$

Partant les attentes successives de A forment une suite recurrente dont l'échelle de relation est

$$+\frac{m+n}{m},\ -\frac{n}{m}\ .$$

Cette suite provient du développement de la fraction

$$\frac{1}{1-\dfrac{m+n}{m}z+\dfrac{n}{m}z^2} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\dfrac{n}{m}z\right)}\,;$$

laquelle équivaut à la somme de ces deux-ci

$$\frac{m}{m-n}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{m}{m-n}\left(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{p-1}+\ldots\ldots\right),$$

$$-\frac{n}{m-n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{n}{m}z} = \frac{n}{m+n}\left(1+\frac{n}{m}z+\frac{n^2}{m^2}z^2+\ldots\ldots+\frac{n^{p-1}}{m^{p-1}}z^{p-1}+\ldots\ldots\right);$$

Partant, on doit avoir,

$$x_p = \frac{m^p-n^p}{m^{p-1}(m-n)}x_1\,;$$

mais, si l'on suppose que p devienne $p+q$ et que $p+q$ soit le nombre total des jetons des deux joueurs, on doit avoir $x_{p+q}=1$; donc

$$1=\frac{m^{p+q}-n^{p+q}}{m^{p+q-1}(m-n)}x_1 \quad \text{d'où} \quad x_1=\frac{(m-n)m^{p+q-1}}{m^{p+q}-n^{p+q}};$$

et partant

$$x_p=\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+1}-n^{p+q}}.$$

Ainsi p étant le nombre des jetons de A, et q le nombre des jetons de B, leurs espérances respectives sont

$$\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}, \quad \frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Remarque I. Ces expressions peuvent toujours être délivrées du facteur $m-n$, commun à leur numérateur et à leur denominateur.

Remarque II. Lorsque $m=n$, ces expressions ainsi reduites deviennent

$$\frac{p}{p+q}, \quad \frac{q}{p+q};$$

ainsi alors les espérances des deux joueurs sont proportionnelles à leurs nombres de jetons. Ce résultat est indiqué par le simple bon sens, mais il était convenable de le confirmer par le calcul.

Remarque III. La solution du problème proposé n'est pas compliquée par le retour aux mêmes états de distribution des jetons entre les deux joueurs, provenant des compensations de gains et de pertes ; bien que cette alternative de gains et de pertes ait une grande influence sur la durée du jeu. (*)

Remarque IV. Plus m est grand relativement à n, et plus le rapport

(*) On dit communément que, pour obtenir la probabilité d'un évènement, il faut diviser le nombre des chances qui peuvent y donner lieu par le nombre total des chances, ou plus généralement, la somme des probabilités des chances qui peuvent y donner lieu par la somme des probabilités de toutes les chances ; et cela est exact. Mais il conviendrait d'ajouter qu'il y a des cas où cette méthode est impraticable, et tel est le cas de la question présente ; puisqu'à raison des retours aux mêmes états, qui peuvent se répéter indéfiniment, le nombre total des chances possibles et celui des chances d'où peut résulter l'évènement dont on cherche la probabilité, sont, l'un et l'autre, infinis. (*Note des éditeurs.*)

rapport des attentes des deux joueurs approche d'être celui des puissances des nombres qui expriment leurs adresses respectives, ayant pour exposans le nombre des jetons de A ; et partant, l'attente de A approche alors d'autant plus de la certitude que le nombre de ses jetons est plus grand.

Post-scriptum. Après avoir terminé ce petit mémoire, nous avons pensé à consulter le beau mémoire de M. Laplace, sur les probabilités, inséré dans le *Recueil de l'académie des sciences de Paris*, pour l'année 1778 ; et nous avons vu que le problème était en effet résolu par ce profond mathématicien (*). Cependant, nous n'avons pas cru devoir supprimer notre travail. La solution de Laplace diffère de la nôtre par sa marche ; elle est fondée sur la méthode des équations aux différences finies. Il n'est pas inutile de voir un même sujet traité par des procédés différens ; et il est tout au moins agréable à ceux qui ne sont pas exercés aux méthodes générales, de voir ramenées aux élémens des questions qui paraissaient surpasser leur portée.

(*) Ce problème a été indiqué aux Rédacteurs des *Annales*, par un de leurs correspondans ; et ce n'est que par M. Lhuilier qu'ils ont appris qu'il avait déjà été résolu.

Le mémoire de M. Laplace, qui en contient la solution, commence à la page 227 du volume de l'académie pour 1778, et cette solution se trouve à la page 231. L'auteur ne s'en occupe, au surplus, que par occasion, et seulement pour montrer combien l'inégalité d'adresse des deux joueurs influe sur leur situation, lors même que cette inégalité n'est que soupçonnée, sans qu'on sache quelle en est la quantité ni quel est le plus adroit des deux.

M. Laplace remarque, à ce sujet, que si, dans le cas d'une parfaite égalité d'adresse, les deux joueurs peuvent doubler, tripler, etc., le nombre de leurs jetons respectifs sans changer leur situation, il n'en est plus de même, dès qu'il y a entre eux la plus légère inégalité ; c'est aussi ce qui résulte des formules ci-dessus.

(*Note des éditeurs.*)