ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

D. ENCONTRE

Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 341-346
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__341_0>

Première solution ;

Par M. D. Encontre, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.

I.

Lorsque deux joueurs sont prêts à commencer la partie, et ont dejà formé l'enjeu total, ils en cèdent l'un et l'autre l'entière propriété à celui des deux qui gagnera. Chacun a d'ailleurs droit d'attendre ce que le hasard doit probablement lui donner ; et, s'ils se trouvent contraints d'abandonner la partie, l'enjeu doit être partagé entre eux, non d'une manière égale, mais de manière que la part de chacun soit proportionnée à la probabilité qu'il aurait eu de gagner le tout, si la partie eût été continuée.

Très-généralement, les droits respectifs des deux joueurs sur l'enjeu total, au moment où la partie se trouve interrompue, sont en raison des probabilités qui leur sont respectivement favorables, ou, en d'autres termes, de leurs espérances mathématiquement calculées.

II.

Lorsque, de deux chances données, une doit nécessairement arriver ; que la première promet à un joueur une certaine somme ou un certain droit, que la seconde promet au même joueur une autre somme ou un autre droit, et qu'elles ne sont pas également probables ; la somme ou le droit que le joueur dont il s'agit doit raisonnablement attendre, en vertu des deux chances données, équivaut à la somme ou au droit qu'apporterait la première chance multipliée par sa probabilité, plus la somme ou le droit qu'apporterait la seconde, multipliée aussi par sa probabilité.

Supposons 1.° qu'il y ait, dans une bourse, deux billets, l'un de 6 francs et l'autre de 12, et qu'un joueur ait actuellement le droit de prendre, au hasard, un de ces deux billets. Les probabilités étant égales, et exprimées, l'une et l'autre, par $\frac{1}{2}$, le droit réel de notre joueur équivaut à

$$6.\tfrac{1}{2}+12.\tfrac{1}{2}=9.$$

Supposons 2.° qu'il y ait, dans une bourse, trois billets : savoir, deux de 12 francs et un de 6 ; et qu'un joueur ait le droit de prendre, au hasard, un de ces trois billets. La probabilité qu'il tirera un des deux billets de 12 francs étant exprimée par $\frac{2}{3}$, et la probabilité qu'il tirera celui de 6 francs étant exprimée par $\frac{1}{3}$; la somme à laquelle il doit raisonnablement prétendre sera

$$12.\tfrac{2}{3}+6.\tfrac{1}{3}=10.$$

Supposons 3.° qu'il y ait, dans une bourse, quatre billets, dont un donne droit de prendre, au hasard, un des billets de la bourse du premier exemple, et dont chacun des trois autres donne droit de prendre, au hasard, un des billets de la bourse du second exemple ; l'espérance du joueur qui aura le droit de prendre, au hasard, un de ces quatre billets sera

$$9.\tfrac{1}{4}+10.\tfrac{3}{4}=9,75.$$

III.

Ces principes étant admis par tous les mathématiciens, nous ne nous arrêterons ni à les démontrer ni à les expliquer par un plus grand nombre d'exemples, et nous passerons de suite à leur application à la question proposée. Mais, pour nous ouvrir plus facilement la voie à la solution générale, nous commencerons par un exemple particulier.

Soient A et B les deux joueurs, et convenons, en général, de designer par A_p et B_q leurs états respectifs, lorsque le premier aura p jetons et le second q. Supposons, par exemple, que le premier ait deux fois plus d'adresse que le second, en sorte qu'à chaque partie il y ait deux à parier contre un que ce sera lui qui gagnera ; alors leurs probabilités respectives de gagner une partie quelconque, seront $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Donnons enfin un jeton à A et quatre à B, ce que nous exprimerons ainsi

$$A_1\,,\quad B_4\,.$$

Les conditions du jeu étant celles qu'on a vues dans l'énoncé du problème, proposons-nous de trouver, dans ce cas particulier, le droit des deux joueurs sur l'enjeu commun, ou quelles sont leurs espérances, mathématiquement calculées.

Soient désignées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4 les probabilites favorables au joueur A, dans les hypothèses successives

$$A_1\ ,\ B_4\ ;\ A_2\ ,\ B_3\ ;\ A_3\ ,\ B_2\ ;\ A_4\ ,\ B_1\ ;$$

d'après quoi on aura, $x_0=0$, $x_5=1$.

Il est évident que, suivant que A gagnera la première partie ou qu'il la perdra, son espérance deviendra x_2 ou $x_0=0$; que s'il la gagne, suivant qu'il gagnera ou qu'il perdra la seconde, son espérance deviendra x_3 ou x_1, et ainsi de suite ; puis donc que les probabilites qu'il a de gagner ou de perdre chaque partie, sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, on aura

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}x_2\ , \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}x_3+\tfrac{1}{3}x_1\ , \\ x_3 &= \tfrac{2}{3}x_4+\tfrac{1}{3}x_2\ , \\ x_4 &= \tfrac{2}{3}\quad+\tfrac{1}{3}x_3\ ; \end{aligned}$$

ces équations étant en même nombre que les inconnues qu'elles renferment, ces inconnues pourront être déterminées et conséquemment on pourra assigner, pour chaque état du jeu, l'espérance de chacun des joueurs.

En faisant le calcul, désignant en général par y_q l'espérance de B lorsqu'il a q jetons, et se rappelant que la somme des espérances des deux joueurs doit être l'unité, on obtiendra le tableau suivant

$$\text{Hypothèses}\left\{\begin{array}{l} A_1\ ,\ B_4 \ldots\ldots\ldots\ldots x_1=\frac{16}{31}\ ,\ y_4=\frac{15}{31}\ ; \\ A_2\ ,\ B_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_2=\frac{24}{31}\ ,\ y_3=\frac{7}{31}\ ; \\ A_3\ ,\ B_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_3=\frac{28}{31}\ ,\ y_2=\frac{3}{31}\ ; \\ A_4\ ,\ B_1 \ldots\ldots\ldots\ldots x_4=\frac{30}{31}\ ,\ y_1=\frac{1}{31}\ . \end{array}\right.$$

Ainsi, dans l'hypothèse proposée A_1, B_4, les espérances des joueurs A et B sont respectivement $\frac{16}{31}$ et $\frac{15}{31}$. Mais on voit que, pour parvenir à ce résultat, nous avons été obligés de calculer les espérances des deux joueurs, dans d'autres hypothèses que nous n'avions pas en vue ; ce qui, à raison des longueurs qui en résultent, est un inconvenient que ne présentera plus l'emploi des formules générales que nous allons chercher à construire.

IV.

Soit s le nombre total des jetons des deux joueurs. Considérons les états successifs A_1, B_{s-1} ; A_2, B_{s-2} ; A_3, B_{s-3} ; ..... A_{s-3}, B_3 ; A_{s-2}, B_2 ; A_{s-1}, B_1 ; et designons respectivement par x_1, x_2, x_3, ... x_{s-3}, x_{s-2}, x_{s-1}, les espérances de A qui leur répondent. Si m et n représentent les adresses respectives des deux joueurs, la probabilité que A gagnera une partie quelconque sera $\frac{m}{m+n}$, tandis que la probabilité qu'il la perdra sera $\frac{n}{m+n}$; en raisonnant donc comme ci-dessus, on obtiendra cette suite d'équations

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{m}{m+n}x_2 ,\\
x_2 &= \frac{m}{m+n}x_3+\frac{n}{m+n}x_1 ,\\
x_3 &= \frac{m}{m+n}x_4+\frac{n}{m+n}x_2 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
x_{s-3} &= \frac{m}{m+n}x_{s-2}+\frac{n}{m+n}x_{s-4} ,\\
x_{s-2} &= \frac{m}{m+n}x_{s-1}+\frac{n}{m+n}x_{s-3} ,\\
x_{s-1} &= \frac{m}{m+n}\qquad+\frac{n}{m+n}x_{s-2} ;
\end{aligned}
$$

lesquelles seront toujours en même nombre que les inconnues qu'elles renferment.

Si maintenant on suppose successivement $s=2, 3, 4, \ldots$, ce qui réduira aussi à $2, 3, 4, \ldots.$, le nombre des équations ; on trouvera

Pour deux jetons, $x_1=\frac{m}{m+n}=\frac{m(m-n)}{m^2-n^2}$;

Pour trois jetons $\begin{cases} x_1 = \dfrac{m^2}{m^2+mn+n^2} = \dfrac{m^2(m-n)}{m^3-n^3}\,, \\ x_2 = \dfrac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2} = \dfrac{m(m^2-n^2)}{m^3-n^3}\,; \end{cases}$

Pour quatre jetons $\begin{cases} x_1 = \dfrac{m^3}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m^3(m-n)}{m^4-n^4}\,, \\ x_2 = \dfrac{m^2(m+n)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m^2(m^2-n^2)}{m^4-n^4}\,, \\ x_3 = \dfrac{m(m^2+mn+n^2)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m(m^3-n^3)}{m^4-n^4}\,; \end{cases}$

et ainsi de suite.

La loi de ces résultats est manifeste, et on en conclut facilement que, x_p et y_q désignant respectivement les espérances de A et B qui répondent à l'état A_p, B_q, on doit avoir généralement, à cause de $x_p+y_q=1$,

$$x_p=\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,,\qquad y_q=\frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,.$$

Il faudra seulement avoir l'attention, dans le cas particulier où l'on aura $n=m$, de délivrer ces formules du facteur $m-n$ qui affecte leur numérateur et leur dénominateur, avant d'en faire l'application.

Pour donner un exemple de l'usage de ces formules, supposons que le joueur A ait 6 jetons, et que le joueur B en ait 4 seulement; il faudra faire $p=6$ et $q=4$; les formules deviendront donc

$$x_6=\frac{m^4(m^6-n^6)}{m^{10}-n^{10}}\,,\qquad y_4=\frac{n^6(m^4-n^4)}{m^{10}-n^{10}}\,.$$

Si nous supposons, en outre, que l'adresse de A soit double de celle de B, ce qui donnera $m=2$, $n=1$, il viendra

$$x_6=\frac{2^4(2^6-1)}{2^{10}-1}=\frac{10\,.\,63}{1023}=\frac{336}{341}\,,\qquad y_4=\frac{2^4-1}{2^{10}-1}=\frac{15}{1023}=\frac{5}{341}\,;$$

les espérances respectives de A et B seront donc $\frac{336}{341}$ et $\frac{5}{341}$; elles seront donc dans le rapport de 336 à 5.

V.

On peut faire diverses observations curieuses sur la question qui nous occupe. Nous nous bornerons aux deux suivantes qui peuvent être utiles.

1.° En délivrant les valeurs de x^p et y^q du facteur $m-n$ qui affecte leur numérateur et leur dénominateur, et posant ensuite $n=m$, elles deviennent toutes réductions faites

$$x_p=\frac{p}{p+q}\,, \quad y_q=\frac{q}{p+q}\,;$$

ainsi, lorsque les deux joueurs sont d'adresse égale, leurs espérances respectives sont dans le rapport du nombre de leurs jetons ; comme on pouvait bien le prévoir.

2.° Mais ce serait une erreur de croire qu'à l'inverse, lorsque les jetons sont également répartis entre les deux joueurs, leurs espérances sont proportionnelles à leurs adresses respectives. Si en effet on fait $q=p$, on a

$$x_p=\frac{m^p}{m^p+n^p}\,, \quad y_p=\frac{n^p}{m^p+n^p}\,;$$

d'où l'on voit que leurs espérances sont dans le rapport de m^p à n^p ; lequel ne devient celui de m à n que dans le cas particulier où $p=1$.