ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DUBOURGUET

Analise élémentaire. Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 338-340

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__338_1>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations ;

Par M. DUBOURGUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.

TOUTE la théorie des équations algébriques repose sur le théorème suivant :

Une fonction algébrique, rationnelle et entière d'une seule variable étant donnée ; parmi le nombre infini de valeurs, réelles ou imaginaires, que l'on peut donner à la variable, il en existe toujours une, au moins, dont la substitution rend nul le polynome proposé ; ou, en d'autres termes, *toute équation algébrique d'un degré quelconque, à une seule inconnue, admet toujours une racine, au moins.*

Quelque fondamental que soit ce principe, plusieurs auteurs d'elémens d'algèbre ont négligé de le démontrer, ou ne l'ont fait que bien longtemps après avoir développé la theorie des équations : ce qui est contraire à la méthode et à l'ordre qui doit regner dans un livre élémentaire où les théories qu'on développe ne doivent poser que sur des principes déjà démontrés. Cette sorte d'interversion, dans l'ordre des propositions, a été considérée comme nécessaire, par les auteurs en question, parce qu'ils ont jugé le principe dont il s'agit ici d'une démonstration trop difficile pour de simples élémens. Je crois donc faire une chose utile en ramenant la démonstration de ce principe aux notions élémentaires que doivent déjà avoir acquises les élèves qui parviennent à la théorie générale des équations.

Soit le polynome du $n.^{me}$ degré

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots\ldots+Px+Q\ , \qquad (1)$$

dans lequel les coefficiens A, B, $C\ldots\ldots P$, Q sont des quantités réelles finies quelconques, et où x représente une variable. Puisque ce polynome change de valeur, à chaque valeur qu'on attribue à x; il peut lui-même être considéré comme une variable. Représentant donc cette variable par y, on aura l'équation

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots\ldots+Px+Q=y\ , \qquad (2)$$

qui établit entre les variables x et y une relation en vertu de laquelle chacune d'elles est déterminée par l'autre.

De même donc que, dans l'équation (2), y se trouve exprimée en fonction de x et des coefficiens, il doit y avoir réciproquement une expression de x en fonction de y et des mêmes coefficiens; de manière qu'on doit avoir

$$x=\varphi(A\ , B\ , C\ ,\ldots P,\ Q\ ,y)\ , \qquad (3)$$

φ désignant une fonction qui peut être inconnue, mais qui, dans tous les cas, doit être absolument déterminée. Cette dernière équation n'est, au fond, qu'une transformation de l'équation (2); et, si l'on en contestait l'existence, il faudrait admettre qu'il y a des valeurs de x indépendantes de celles de y, et réciproquement, ce qui serait contradictoire avec l'équation (2), et par conséquent absurde. (*)

(*) Si l'équation (3) pouvait ne pas exister, c'est-à-dire, si x pouvait n'être pas fonction de y; alors, en représentant par a une des valeurs de x qui ne dépendraient pas de celles de y, le polynome déterminé

Cela posé, il est clair que si, dans l'equation (3), on fait $y=0$, on ne pourra avoir $x=0$ ni $x=\infty$; car, dans le premier cas, l'equation (2) donnerait $Q=0$, et, dans le second, elle donnerait $Q=-Ax^n=\infty$, résultats contraires à l'hypothèse; donc, lorsqu'on pose $y=0$, x doit avoir une valeur, réelle ou imaginaire, differente de zero et de l'infini, telle que

$$x=\psi(A,\ B,\ C\ldots\ldots P,\ Q)\ ;$$

qui satisfasse à l'équation

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots\ldots+Px+Q=0\ .$$

à laquelle se réduit l'equation (2) dans la même hypothèse de $y=0$; donc il y a, au moins, une fonction des coefficiens de cette dernière équation qui, substituée dans son premier membre, à la place de x, réduit ce premier membre à zéro. Cest-là ce qu'il s'agissait de démontrer.