ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRANÇAIS

Analise transcendante. Méthode de différentiation, indépendante du développement des fonctions en séries

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 325-331
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__325_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALISE TRANSCENDANTE.

Méthode de différentiation, indépendante du développement des fonctions en séries.

Par feu FRANÇAIS, professeur aux écoles d'artillerie. (*)

TOUTES les méthodes de différentiation, connues jusqu'à présent, supposent le développement des fonctions en séries ; et la chose paraît même, en quelque sorte, inévitable, puisque les différentielles d'une fonction ne sont autre chose que les coefficiens des termes successifs du développement de ce que devient cette fonction, lorsque la variable reçoit un accroissement arbitraire. Il peut donc paraître assez intéressant de déterminer les différentielles d'une fonction, sans recourir à ce développement ; c'est l'objet de la méthode que je vais exposer. Elle ne suppose connues que la différentielle de la somme $x+y$, et celle du produit xy, et repose sur les deux lemmes suivans :

LEMME I. x et y étant deux variables entièrement indépendantes, et P, Q, R, S étant des fonctions quelconques de x et y ; si l'on a l'équation

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=R\mathrm{d}x+S\mathrm{d}y\ ,$$

(*) Ce mémoire a été communiqué aux Rédacteurs des *Annales* par M. J. Français, professeur à l'école de l'artillerie et du génie, frère de l'Auteur.

Le même géomètre a aussi adressé aux Rédacteurs des *Annales* une démonstration du théorème énoncé à la page 96 de ce volume, qui leur est malheureusement parvenue trop tard pour qu'il ait pu en être fait mention à temps. Elle est, au surplus, semblable en tout à celle qui a été donnée par M. Tédenat à la page 182. (*Note des éditeurs*).

on en pourra conclure ces deux-ci

$$P=R \quad , \qquad Q=S.$$

Démonstration. Si l'équation $(P-R)dx+(Q-S)dy=0$ n'était point identique, ce serait une équation differentielle en vertu de laquelle y se trouverait, contrairement à l'hypothèse, une certaine fonction de x; on a donc nécessairement $P-R=0$ et $Q-S=0$; donc, etc.

LEMME II. X et Y étant deux fonctions composées de la même manière, la premiere en x et la seconde en y, variables indépendantes : si l'on a $X=Y$, on en pourra conclure $X=$constante.

Démonstration. D'après l'hypothèse, la fonction X doit devenir la fonction Y, si l'on y met y au lieu de x; mais, à cause de $X=Y$, la fonction X ne doit pas changer de valeur, par l'effet de cette substitution; donc, puisque y, indépendant de x, peut représenter des valeurs quelconques de x, la fonction X est tellement constituée, qu'elle conserve la même valeur, quelle que soit d'ailleurs la variation de x; propriété qui caractérise les constantes; donc, etc.

Cela posé, soit 1.° à différentier x^m?

Soient x et y deux variables absolument indépendantes; on aura

$$(xy)^m=x^m y^m \,. \qquad (1)$$

Désignons la différentielle inconnue de x^m par $\varphi(x)dx$; nous aurons, en différentiant l'équation, (1)

$$\varphi(xy)(ydx+xdy)=y^m\varphi(x)dx+x^m\varphi(y)dy \;;$$

d'où nous tirerons, par le *Lemme I*,

$$y\varphi(xy)=y^m\varphi(x) \;,\quad x\varphi(xy)=x^m\varphi(y) \;;$$

ce qui donne, par l'élimination de $\varphi(xy)$ et la suppression des facteurs communs,

$$y^{m-1}\varphi(x)=x^{m-1}\varphi(y) \;,\quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(x)}{x^{m-1}}=\frac{\varphi(y)}{y^{m-1}} \;;$$

on a donc, par le *Lemme II*, $\frac{\varphi(x)}{x^{m-1}}=C$; donc $\varphi(x)=Cx^{m-1}$, et par conséquent,

$$\mathrm{d}.x^m=Cx^{m-1}.\mathrm{d}x.$$

2.° Soit à différentier a^x?

En supposant encore y quelconque et indépendante de x, on aura

$$a^{x+y}=a^x.a^y. \qquad (2)$$

Soit $\varphi(x)\mathrm{d}x$ la différentielle de a^x; il viendra, en différentiant l'équation (2),

$$\varphi(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=a^y\varphi(x)\mathrm{d}x+a^x\varphi(y)\mathrm{d}y\ ;$$

d'où nous tirerons, par le *Lemme I*,

$$\varphi(x+y)=a^y\varphi(x)\ ,\quad \varphi(x+y)=a^x\varphi(y)$$

donc

$$a\ \varphi(x)=a^x\varphi(y)\ ,\quad \text{ou}\quad \frac{\varphi(x)}{a^x}=\frac{\varphi(y)}{a^y}\ ;$$

et, par le *Lemme II*, $\frac{\varphi(x)}{a^x}=C$; donc $\varphi(x)=Ca^x$, et par conséquent

$$\mathrm{d}.a^x=Ca^x\,dx.$$

3.° Soit à différentier Log.x, pour un système quelconque?

On aura par la definition de la fonction proposée,

$$\mathrm{Log}.(xy)=\mathrm{Log}.x+\mathrm{Log}.y. \qquad (3)$$

Soit $\varphi(x)\mathrm{d}x$ la différentielle de Log.x; il viendra en différentiant l'équation (3)

$$\varphi(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\varphi(x)\mathrm{d}x+\varphi(y)\mathrm{d}y\ ;$$

donc (*Lemme I*)

$$y\varphi(xy)=\varphi(x)\ ,\quad x\varphi(xy)=\varphi(y)\ ,$$

d'où

$$x\varphi(x)=y\varphi(y)\ ;$$

donc (*Lemme II*) $x\varphi(x)=C$, ou $\varphi(x)=\frac{C}{x}$, et par conséquent

$$\mathrm{d.Log.}x=\frac{C\mathrm{d}x}{x}.$$

4.° Soit à différentier Sin.x ?

Soit d.Sin.$x=\varphi(x)\mathrm{d}x$; en différentiant l'équation $\mathrm{Sin.}^2x+\mathrm{Cos.}^2x=1$; il vient $\mathrm{Sin.}x.\varphi(x).\mathrm{d}x+\mathrm{Cos.}x.\mathrm{d.Cos.}x=0$; d'où $\mathrm{d.Cos.}x=-\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Cos.}x}\varphi(x)\mathrm{d}x$. D'un autre côté on a, par la définition de la fonction proposée,

$$\mathrm{Sin.}(x+y)=\mathrm{Sin.}x\mathrm{Cos.}y+\mathrm{Cos.}x\mathrm{Sin.}y\ ; \qquad (4)$$

d'où on conclura, par la différentiation,

$$\varphi(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos.}y.\varphi(x)\mathrm{d}x-\mathrm{Sin.}x.\frac{\mathrm{Sin.}y}{\mathrm{Cos.}y}\varphi(y)\mathrm{d}y\\ +\mathrm{Cos.}x.\varphi(y)\mathrm{d}y-\mathrm{Sin.}y.\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Cos.}x}\varphi(x)\mathrm{d}x\end{array}\right.$$

ou

$$\varphi(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{Cos.}(x+y)}{\mathrm{Cos.}x}\varphi(x)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{Cos.}(x+y)}{\mathrm{Cos.}y}\varphi(y)\mathrm{d}y\ ;$$

donc (*Lemme I*)

$$\varphi(x+y)=\frac{\mathrm{Cos.}(x+y)}{\mathrm{Cos.}x}\varphi(x)=\frac{\mathrm{Cos.}(x+y)}{\mathrm{Cos.}y}\varphi(y)\ ,$$

ou

$$\frac{\varphi(x)}{\mathrm{Cos.}x}=\frac{\varphi(y)}{\mathrm{Cos.}y}\ ;$$

donc (*Lemme II*) $\frac{\varphi(x)}{\mathrm{Cos.}x}=C$; donc $\varphi(x)=C\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}x$; donc enfin

$$\mathrm{d.Sin.}x=C\mathrm{d}x.\mathrm{Cos.}x\ ;$$

et, puisqu'on a

$$\mathrm{d.Cos.}x=-\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Cos.}x}\varphi(x)\mathrm{d}x\ ,$$

il viendra en outre

$$\mathrm{d.Cos.}x=-C\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x.$$

Il reste maintenant à determiner les constantes qui entrent dans ces diverses différentielles.

1.° Dans l'équation $d.x^m = Cx^{m-1}dx$, la constante C ne peut être qu'une fonction de m ; en la désignant par $f(m)$, elle se changera en $f(n)$ pour la différentielle de x^n, et en $f(m+n)$ pour celle de x^{m+n} ; or on a

$$x^{m+n} = x^m . x^n \ ,$$

d'où on conclura, par la différentiation,

$$f(m+n)x^{m+n-1}dx = f(m)x^{m+n-1}dx + f(n)x^{m+n-1}dx \ ;$$

c'est-à-dire,

$$f(m+n) = f(m) + f(n). \qquad (5)$$

Soit $d.f(m) = \psi(m)dm$; en différentiant l'équation (5), il viendra

$$\psi(m+n)(dm+dn) = \psi(m)dm + \psi(n)dn \ ;$$

donc (*Lemme I*)

$$\psi(m+n) = \psi(m) = \psi(n) \ :$$

donc (*Lemme II*) $\psi(m) = a$, a étant une nouvelle constante ; on a donc $d.f(m) = adm$, d'où $f(m) = am$; nous n'ajoutons pas de nouvelle constante parce que $f(m)$ doit être nulle en même temps que m.

On a donc

$$d.x^m = amx^{m-1}dx \ ;$$

et, si l'on fait $m = 1$, on en conclura $dx = adx$; donc $a = 1$; donc $C = m$; donc enfin

$$d.x^m = max^{m-1} dx.$$

2.° Dans la différentielle $d.a^x = Ca^x dx$, la constante C ne peut être qu'une fonction de a qu'on appelle *la base*, et doit changer avec cette base. Appelons e la valeur de a pour laquelle C devient l'unité, nous aurons

$$d.e^x = a^x dx.$$

Faisons ensuite $a^x = e^y$; nous en conclurons, par la différentiation

$$Ca^x dx = e^y dy \ , \text{ d'où } C = \frac{dy}{dx} \ ;$$

or, si nous désignons par la caractéristique l les logarithmes qui répondent à la base e et qu'on appelle *Logarithmes naturels*, et par L ceux qui répondent à la base a, l'equation $a^x = e^y$ donnera $x\text{l}a = y$ et $x = yLe$; donc

$$\text{d}y = \text{d}x\text{l}a \ , \quad \text{d}x = \text{d}yLe \ ;$$

d'où

$$\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \text{l}a = \frac{1}{Le} \ , \quad \text{d'où} \quad C = \text{l}a = \frac{1}{Le}.$$

3.° La constante C, dans l'équation $\text{d}.Lx = \frac{C\text{d}x}{x}$, se détermine bien facilement par ce qui précède. En posant $Lx = y$, il vient $\frac{C\text{d}x}{x} = \text{d}y$, d'où $C = \frac{x\text{d}y}{\text{d}x}$; or de $Lx = y$ résulte $x = a^y$ et conséquemment $\text{d}x = \text{l}a . a^y \text{d}y = \text{l}a . x\text{d}y$, ou bien $\text{d}x = \frac{a^y \text{d}y}{Le} = \frac{x\text{d}y}{Le}$ donc $C = \frac{1}{\text{l}a} = Le$, et par conséquent

$$\text{d}.Lx = \frac{\text{d}x}{x\text{l}a} = \frac{\text{d}xLe}{x}.$$

4.° Si, dans l'équation $\text{d}.\text{Sin}.x = C\text{d}x\text{Cos}.x$, on suppose que l'arc x décroisse continuellement, jusqu'à devenir nul, on aura $\text{Sin}.x = x$ et $\text{Cos}.x = 1$, d'où $\text{d}.\text{Sin}.x = C\text{d}x$ ou $\text{Sin}.x = Cx$, ce qui donne $C = \frac{\text{Sin}.x}{x}$; mais, on démontre rigoureusement (*) qu'à la limite $\frac{\text{Sin}.x}{x} = 1$; donc $C = 1$, et conséquemment

$$\text{d}.\text{Sin}.x = \text{d}x\text{Cos}.x \ , \quad \text{d}.\text{Cos}.x = -\text{d}x\text{Sin}.x.$$

D'après cette détermination des constantes, les différentielles des fonctions x^m, a^x, $\text{Log}.x$, $\text{Sin}.x$, $\text{Cos}.x$ se trouvent ramenées à la forme connue. Et, comme ces fonctions sont les elemens de toutes les autres fonctions connues, on parviendra sans difficulté, par ce qui précede, aux differentielles de ces dernières.

(*) Voyez le *Calcul des fonctions*, leçon v^{e}.

On voit, par la manière dont nous avons determiné la constante dans $d.x^m$, que notre méthode peut être employée à déterminer la forme d'une fonction inconnue qui doit satisfaire à une relation donnée.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Construction des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des diamètres principaux, dans les courbes du second degré rapportées à deux axes rectangulaires quelconques.

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

On donne, dans plusieurs ouvrages élémentaires, des méthodes propres à la recherche des diamètres principaux des courbes du second degré, rapportées à deux axes rectangulaires quelconques; mais, les calculs relatifs à cette recherche n'y étant point terminés, j'ai pensé qu'il pouvait être utile de remplir cette lacune, en donnant des formules propres à ramener directement l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \qquad (1)$$

à la forme

$$\pm A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 ,$$

si b^2-4ac n'est pas zéro; et à la forme

$$y^2=Px ,$$

dans le cas contraire.

Pour parvenir à ce but, changeons d'abord, dans l'équation (1), x en $x'+m$, et y en $y'+n$, et ensuite x' en $x''\text{Cos.}\alpha-y''\text{Sin.}\alpha$, et y' en $x''\text{Sin.}\alpha+y''\text{Cos.}\alpha$; la transformée en x'' et y'' sera