LHUILIER

Solutions du problème de géométrie énoncé à la page 224 de ce volume; première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 318-323
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__318_1>

Solutions du problème de géométrie énoncé à la page 224 de ce volume ;

ÉNONCÉ. *A un polygone donné circonscrire un polygone de même nom, dont les angles soient respectivement égaux à des angles donnés, et dont l'aire ou le contour soit donné ?*

Première solution ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Comme le procédé que je vais développer, pour la solution de chacun des deux problèmes, est exactement le même, quel que soit le nombre des côtés (plus grand que trois, lequel cas donne lieu à une construction très-simple) du polygone proposé ; et que les opérations diffèrent seulement par leur longueur, et par le nombre des termes qui composent l'équation à laquelle ce procédé conduit ; je crois devoir me borner, par raison de brièveté, à le développer seulement pour un quadrilatère.

Soit ABCD (fig. 18) un quadrilatère proposé. On demande de lui circonscrire un quadrilatère $abcd$ dont les côtés ab, bc, cd, da, passent respectivement par les sommets A, B, C, D, du premier quadrilatère ; en connaissant les angles a, b, c, d, et le contour ou la surface du quadrilatère $abcd$.

Que les angles du polygone donné soient désignés par A, B, C, D, respectivement. Que les angles donnés du polygone cherché soient designés par a, b, c, d. Que l'un des deux angles que forment, avec un côté du polygone cherché, les deux côtés du polygone donné dont le point de concours est sur celui-là ; que l'angle aAB, par exemple, soit désigné par x ; on peut exprimer dans cet angle et dans les angles des deux polygones, les inclinaisons mutuelles des autres côtés correspondans de ces deux polygones.

On trouve, en effet, successivement, l'angle droit étant pris pour unité,

$$\begin{array}{ll}
a\mathrm{AB}=x\,, & a\mathrm{BA}=2-(a+x)\,,\\
b\mathrm{BC}=a-\mathrm{B}+x\,, & b\mathrm{CB}=2-(a+b-\mathrm{B}+x)\,,\\
c\mathrm{CD}=a-\mathrm{B}+b-\mathrm{C}+x\,, & c\mathrm{DC}=2-(a+b+c-\mathrm{B}-\mathrm{C}+x)\,,\\
d\mathrm{DA}=a-\mathrm{B}+b-\mathrm{C}+c-\mathrm{D}+x\,, & d\mathrm{AD}=2-(a+b+c+d-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}+x)\,;
\end{array}$$

d'où résulte

$$Aa=AB.\frac{\text{Sin}.(a+x)}{\text{Sin}.a}\,, \qquad aB=AB.\frac{\text{Sin}.x}{\text{Sin}.a}\,,$$

$$Bb=BC.\frac{\text{Sin}.(a+b-B+x)}{\text{Sin}.b}\,, \qquad bC=BC.\frac{\text{Sin}.(a+b+x)}{\text{Sin}.b}\,,$$

$$Cc=CD.\frac{\text{Sin}.(a+b+c-B-C+x)}{\text{Sin}\,c}\,, \qquad cD=CD.\frac{\text{Sin}.(a+b-B-C+x)}{\text{Sin}.c}\,,$$

$$Dd=DA.\frac{\text{Sin}.(a+b+c+d-B-C-D+x)}{\text{Sin}.d}\,,\; dA=DA.\frac{\text{Sin}.(a+b+c-B-C-D+x)}{\text{Sin}.d}\,,$$

PROBLÈME I. On donne le contour du polygone demandé.

D'après ce qui précède, on a

$$Aa+aB=AB.\frac{\text{Sin}.x+\text{Sin}\,(a+x)}{\text{Sin}.a}$$

$$Bb+bC=BC.\frac{\text{Sin}.(a-B+x)+\text{Sin}.(a+b-B+x)}{\text{Sin}.b}$$

$$Cc+cD=CD.\frac{\text{Sin}.(a+b-B-C+x)+\text{Sin}.(a+b+c-B-C+x)}{\text{Sin}.c}$$

$$Dd+dA=DA.\frac{\text{Sin}.(a+b+c-B-C-D+x)+\text{Sin}\,(a+b+c+d-B-C-D+x)}{\text{Sin}.d}\,;$$

prenant la somme de ces équations, en remarquant qu'en général

$$\frac{\text{Sin}.z+\text{Sin}.(k+z)}{\text{Sin}.k}=\text{Cosec}.\tfrac{1}{2}k.\text{Sin}.(\tfrac{1}{2}k+z)\,,$$

il viendra

$$ab+bc+cd+da=\left\{\begin{array}{l} AB.\text{Cosec}.\tfrac{1}{2}a.\text{Sin}.(\tfrac{1}{2}a+x)\,, \\ +BC.\text{Cosec}.\tfrac{1}{2}b.\text{Sin}.(a+\tfrac{1}{2}b-B+x)\,; \\ +CD.\text{Cosec}.\tfrac{1}{2}c.\text{Sin}.(a+b+\tfrac{1}{2}c-B-C+x)\,, \\ +DA.\text{Cosec}.\tfrac{1}{2}d.\text{Sin}.(a+b+c+\tfrac{1}{2}d-B-C-D+x). \end{array}\right.$$

De là découle la construction suivante, fondée sur les propriétés du centre des moyennes distances :

Sur une droite SE (fig. 19), et en un de ses points S, soient faits les angles ESA, ESb, ESc, ESd, respectivement égaux aux angles

$\tfrac{1}{2}a$,

$\frac{1}{2}a$, $a+\frac{1}{2}b$, $a+b+\frac{1}{2}c$, $a+b+c+\frac{1}{2}d$, en tournant toujours dans le même sens.

Sur les droites Sb, Sc, Sd, soient faits les angles bSB, cSC, dSD respectivement egaux aux angles B, B+C, B+C+D, en tournant toujours dans un même sens, opposé au premier.

Sur les droites SA, SB, SC, SD, soient prises des longueurs SA, SB, SC, SD, respectivement égales à $AB.\text{Cosec}.\frac{1}{2}a$, $BC.\text{Cosec}.\frac{1}{2}b$, $CD.\text{Cosec}.\frac{1}{2}c$, $DA.\text{Cosec}\frac{1}{2}d$.

Soit cherché le centre Z des moyennes distances des extrémités A, B, C, D de ces droites. Du point Z comme centre, avec un rayon égal au quart du contour donné, soit decrit un cercle. Du point S soit menée (s'il y a lieu) une tangente à ce cercle. L'angle formé par cette tangente et par la droite SE est l'angle cherché x.

Remarque. Le contour donné ne doit pas être plus grand que le quadruple de SZ. Lorsque le quart du contour donné est plus petit que SZ, le problème proposé a deux solutions. Pour que ce problème soit determiné, le centre Z doit être différent du point S.

PROBLÈME II. On donne la surface du polygone demandé.

D'après les formules ci-dessus et l'expression connue de la surface d'un triangle dans deux de ses côtés et l'angle qu'ils comprennent, on a

$$4AaB=2AB^2.\frac{\text{Sin}.x.\text{Sin}.(a+x)}{\text{Sin}.a},$$

$$4BbC=2BC^2.\frac{\text{Sin}\,(a-B+x)\text{Sin}.(a+b-B+x)}{\text{Sin}.b},$$

$$4CcD=2CD^2.\frac{\text{Sin}.(a+b-B-C+x)\text{Sin}.(a+b+c-B-C+x)}{\text{Sin}.c},$$

$$4DdA=2DA^2.\frac{\text{Sin}.(a+b+c-B-C-D+x)\text{Sin}.(a+b+c+d-B-C-D+x)}{\text{Sin}.d}.$$

En ajoutant ces équations, membre à membre, ajoutant aux deux membres de l'équation resultante le quadruple de la surface du polygone ABCD, et remarquant qu'en general

$$\frac{\text{Sin}.z\text{Sin}.(k+z)}{\text{Sin}.k}=\frac{\text{Cos}.k-\text{Cos}.2(\frac{1}{2}k+z)}{2\text{Sin}.k}=\frac{1}{2}\text{Cot}.k-\frac{\text{Cos}.2(\frac{1}{2}k+z)}{2\text{Sin}.k},$$

il viendra

$$4abcd=\begin{cases}\quad 4ABCD+AB^2.\mathrm{Cot}.a+BC^2.\mathrm{Cot}.b+CD^2.\mathrm{Cot}.c+DA^2.\mathrm{Cot}.d\\ -AB^2.\mathrm{Cosec}.a.\mathrm{Cos}.2(\tfrac{1}{2}a+x)\\ -BC^2.\mathrm{Cosec}.b.\mathrm{Cos}.2(a+\tfrac{1}{2}b-B+x)\\ -CD^2.\mathrm{Cosec}.c.\mathrm{Cos}.2(a+b+\tfrac{1}{2}c-B-C+x)\\ -DA^2.\mathrm{Cosec}.d.\mathrm{Cos}.2(a+b+c+\tfrac{1}{2}d-B-C-D+x).\end{cases}$$

De là découle la construction suivante, fondée aussi sur les propriétés du centre des moyennes distances.

Sur une droite SE (fig. 20), et en un de ses points S, soient faits les angles ESA, ESb, ESc, ESd, respectivement égaux aux angles $2\tfrac{1}{2}a$, $2(a+\tfrac{1}{2}b)$, $2(a+b+\tfrac{1}{2}c)$, $2(a+b+c+\tfrac{1}{2}d)$, en tournant toujours dans un même sens.

Sur les droites Sb, Sc, Sd, soient faits les angles bSB, cSC, dSD, respectivement égaux aux angles 2B, 2(B+C), 2(B+C+D), en tournant toujours dans un même sens, contraire au premier.

Du quadruple de l'excès de la surface du polygone cherché sur celle du polygone donné soit retranchée la somme $AB^2.\mathrm{Cot}.a+BC^2.\mathrm{Cot}.b+CD^2.\mathrm{Cot}.c+DA^2.\mathrm{Cot}.d$, et soit le reste égal au rectangle de deux droites l et m.

Que les carrés des côtés donnés AB, BC, CD, DA, soient convertis en rectangles ayant, pour un de leurs côtés, une des deux droites, telle que m.

Que les autres côtés de ces rectangles soient α, β, γ, δ, respectivement.

Sur les droites SA, SB, SC, SD, soient portées, depuis le point S, des longueurs respectivement égales à αCosec.a, βCosec.b, γCosec.c, δCosec.d; que ces longueurs soient SA, SB, SC, SD.

Soit cherché le centre Z des moyennes distances des points A, B, C, D; et du point Z comme centre, avec un rayon égal à $\tfrac{1}{4}l$, soit décrite une circonférence de cercle.

Du point S soit menée, (s'il y a lieu) une tangente à cette circonférence; et du même point S soit menée à cette tangente une perpendiculaire. L'angle formé par cette perpendiculaire et par la droite SA sera le double de l'angle cherche x.

Remarque. On tire de cette construction, relativement à ce second problème, des conséquences analogues à celles qu'on a déduites de la construction du premier.