GERGONNE

Cinquième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 285-286
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__285_1>

Cinquième solution ;

Par M. Gergonne.

1.° Soit m le nombre des côtés tant du polygone donné que du polygone à construire ; concevons une suite de polygones P, P′, P″,... dont les cotes soient respectivement parallèles aux droites donnees de position, et dont les $m-1$ premiers sommets soient sur les $m-1$ premiers côtés du polygone donné, et soient S, S′, S″,.. les m.mes sommets de ces polygones.

2.° Le lieu des points S, S′, S″,.... est une certaine ligne dont les intersections avec le m.me côté du polygone donné peuvent evidemment être prises pour le m.me sommet du polygone cherché.

3.° Or, il résulte des considérations développees dans les solutions précédentes, et il serait d'ailleurs très-facile de prouver *a priori*, par une simple ébauche de calcul, que le problème proposé n'est que du premier degré; donc le lieu des points S, S′, S″,.... ne peut jamais couper le m.me côté du polygone donné en plus d'un point; donc ce lieu est une ligne droite.

4.° La construction du problème proposé se réduit donc à ce qui suit : construisez arbitrairement les deux polygones P et P′ qui vous

(*) Cette méthode peut, avec quelques modifications être appliquée à la solution du problème traité à la page 116 de ce volume. Il faut seulement alors déterminer un quatrième point D, faire $SD=d$; posant alors

$$pab+qa+rb=s\ ,$$
$$pbc+qb+rc=s\ ,$$
$$pcd+qc+rd=s\ ,$$
$$px^2+qx+rx=s\ ;$$

l'élimination de p, q, r entre ces quatre équations donnera les deux valeurs de x qui résoudront le problème.

détermineront les deux points S et S′; en joignant ces deux points par une droite, l'intersection de cette droite avec le $m.^{me}$ côté du polygone donné sera le $m.^{me}$ sommet du polygone cherché.

5.° Si la droite SS′ est parallele au $m.^{me}$ côté du polygone donné, le problème sera impossible; si, au contraire, elle se confond avec lui ou, ce qui revient au même, si les sommets S et S′ sont sur ce $m.^{me}$ côte, le problème sera indéterminé.

6.° Si m est un nombre impair, il est facile de voir que les angles S et S′ seront l'un dans l'autre, qu'ainsi leurs sommets ne pourront se trouver tous deux ni sur le $m.^{me}$ côté du polygone donné, ni sur une droite qui lui soit parallèle, et que conséquemment, dans ce cas, le problème sera toujours possible et déterminé.

7.° Mais il n'en sera plus de même si m est un nombre pair, parce qu'alors les angles S et S′ ne seront plus l'un dans l'autre.

8.° Cette construction, qui diffère peu de celle de M. Pilatte, rentre dans ce que les arithméticiens appellent *Règle de deux fausses positions*. Elle est parfaitement analogue à celle que M. Servois a donnée d'un autre problème à la page 113 de ce volume.