ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PILATTE

Quatrième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 282-285
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__282_1>

enfin M, N les points où le dernier coté $S'''S$ de ce polygone est coupé par les directions $A''A'''$ et AA''' des cotés de l'angle A'''.

A cause des parallèles, on aura les proportions

$$NX''':AX::SN:SA,$$
$$AX:A'X'::S'A:S'A',$$
$$A'X':A''X''::S''A':S''A'',$$
$$A''X'':MX'''::S'''A'':S'''M;$$

lesquelles, étant multipliées par ordre, donneront, en réduisant,

$$NX''':MX'''::SN\times S'A\times S''A'\times S'''A'':SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M$$

donc

$$NX'''-MX''' \text{ ou } MN:MX'''::$$

$$SN\times S'A\times S''A'\times S'''A''-SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M:SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M;$$

donc

$$MX'''=MN.\frac{SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M}{SN\times S'A\times S''A'\times S'''A''-SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M}.$$

cette valeur de MX''' étant construite, par des quatrièmes proportionnelles, on connaitra la position du sommet X''', et alors il sera facile d'achever le polygone.

Quatrième solution;

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Soit SS' (fig. 13) l'un des cotés du polygone donné; soit X celui des sommets du polygone cherché qui doit se trouver sur la direction de ce côté, et soit fait $SX=x$.

Soit pris arbitrairement un point A sur la direction SS′, et soit opéré avec ce point A, comme on le ferait avec le point X, si, ce dernier étant connu, on voulait construire le polygone demandé. Si le dernier côté du polygone construit, à partir de A, venait se terminer à ce même point, le point A serait, en effet, le point cherché; mais en général ce dernier coté viendra se terminer en un autre point B de SS′.

Si l'on opère ensuite par rapport au point B comme par rapport au point A, on déterminera un troisième point C, dépendant du point B de la même manière que celui-ci dépend du point A.

Soient faits $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$.

Si l'on prend le point S pour origine, et le côté SS′ pour axe des x, on se convaincra facilement que la relation entre les deux variables a et b doit être du premier degré seulement, et peut conséquemment être représentée par l'équation

$$pa+qb=r\ ; \qquad \text{(I)}$$

dans laquelle p, q, r sont des constantes dépendant de la nature du polygone donné, et de la direction connue des cotes du polygone cherché.

Mais, puisque c dépend de b de la même manière que cette dernière quantite dépend de a, on doit avoir pareillement

$$pb+qc=r\ ; \qquad \text{(II)}$$

or, si a eût été pris égal à x, b eût aussi été égal à x; on doit donc avoir encore

$$px+qx=r\ . \qquad \text{(III)}$$

Retranchant successivement de l'équation (III) les équations (I) et (II), il viendra, en transposant,

$$p(x-a)=-q(x-b) ,$$

$$p(x-b)=-q(x-c) ;$$

équations qui, étant divisées membre à membre, donneront

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-b}{x-c} \text{ d'où } x=\frac{b^2-ac}{2b-(a+c)}$$

expression facile à construire.

Pour plus de simplicité, on peut prendre pour le point arbitraire A le point S lui-même ; on a alors $a=0$, et par consequent

$$x=\frac{b^2}{2b-c} ,$$

ce qui réduit la solution du problème à la recherche d'une troisième proportionnelle à deux lignes données.

Supposons qu'on ait pris $a<x$, il est facile de se convaincre que le nombre des côtes du polygone étant impair, on aura $b>x$ et $c<x$; on aura donc aussi $a<b$, $c<b$ d'où $a+c<2b$; ainsi, dans ce cas, le dénominateur de la valeur de x ne pouvant devenir nul, le problème sera toujours possible.

Mais, a étant toujours pris $<x$, si le nombre des côtés du polygone est pair, on aura $a<x$, $b<x$, $c<x$, et il pourra fort bien arriver qu'on ait $a+c=2b$, alors le problème sera impossible, à moins cependant qu'on ait, en outre, $ac=b^2$, auquel cas le problème serait indeterminé ; or, des équations

$$a+c=2b \text{ et } ac=b^2 ,$$

il est facile de conclure

$$a=b=c ;$$

ainsi, dans le cas d'un nombre de côtés pair, on reconnaitra que le problème est impossible, si le point B se trouve au milieu de l'intervalle qui sépare les points A et C; et on reconnaitra qu'il est indéterminé, si, le point A étant pris quelconque, le point B coincide avec lui (*).