PENJON

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 280-281
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__280_0>

Deuxième solution ;

Par M. Penjon, professeur de mathématiques au lycée d'Angers.

J'observerai d'abord que, pour que le problème proposé n'ait qu'une solution unique, il est nécessaire d'indiquer à laquelle des droites données de position chaque coté du polygone cherché doit être parallèle ; car autrement, m désignant le nombre des côtés du polygone donné, et conséquemment aussi le nombre des droites données de position, le nombre des solutions du problème serait $1.2.3.....m$.

Soient S_1S_2 et S_2S_3 deux côtés consécutifs du polygone donné (fig. 11), et soit X_1X_2 le coté du polygone cherché qui répond à l'angle S_2. Par S_1 soit menée S_1K_2 parallèle à celle des droites données de position à laquelle X_1X_2 doit être lui-même parallèle. Soient $S_2S_1=a_1$, $S_2K_2=b_2 S_2X_1=x_1$, $S_2X_2=y_2$; nous aurons

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{b_2}{y_2} \quad \text{ou} \quad a_1y_2=b_2x_1 \ ,$$

et il est clair que, si m est le nombre des côtés du polygone proposé, nous aurons m équations semblables entre les $2m$ inconnues

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\quad x_3\ ,.....x_m\ ;$$
$$y_1\ ,\quad y_2\ ,\quad y_2\ ,.....y_m\ .$$

Nous aurons de plus, entre les mêmes inconnues, m autres équations de la forme $x_1+y_1=a_1$, $x_2+y_2=a_2$, ... ce qui sera suffisant pour les déterminer ; et, comme ces équations sont toutes du premier degré, le problème, lorsqu'il sera possible et déterminé, n'admettra jamais plus d'une solution.

Premier exemple. Pour le triangle, les équations seront

$$a_1y_2=b_2x_1\ ,\quad x_1+y_1=a_1\ ,$$
$$a_2y_3=b_3x_2\ ,\quad x_2+y_2=a_2\ ,$$
$$a_3y_1=b_1x_3\ ,\quad x_3+y_3=a_3\ ,$$

d'où

d'où on tirera

$$x_1=a_1\frac{a_1a_2a_3-b_1a_2a_3+b_1a_2b_3}{a_1a_2a_3+b_1b_2b_3}.$$

Deuxième exemple. Pour le quadrilatère, les équations seront

$$a_1y_2=b_2x_1\ ,\quad x_1+y_1=a_1\ ,$$

$$a_2y_3=b_3x_2\ ,\quad x_2+y_2=a_2\ ,$$

$$a_3y_4=b_4x_3\ ,\quad x_3+y_3=a_3\ ,$$

$$a_4y_1=b_1x_4\ ,\quad x_4+y_4=a_4\ ,$$

d'où on tirera

$$x_1=a_1\,.\frac{a_1a_2a_3a_4-b_1a_2a_3a_4+b_1a_2a_3b_4-b_1a_2b_3b_4}{a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4}.$$

Ces résultats, dont la loi est manifeste, se construiront par des quatrièmes proportionnelles.