PILATTE
LEGRAND
ROCHAT

Questions résolues. Démonstration du théorème énoncé à la page 164 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 266-270
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__266_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 164 de ce volume;

Par MM. PILATTE, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers, LEGRAND, professeur de Mathématiques, et ROCHAT, professeur de navigation à St-Brieux.

ENONCÉ. *Si, par l'un quelconque* P *des points du périmètre d'une hyperbole, on mène deux droites* PA, PB, *respectivement parallèles à ses asymptotes, et que, par un autre point quelconque* m, *pris sur ce périmètre, on mène une suite de droites coupant* PA *en* a, a′, a″, ..., PB *en* b, b′, b″, ..., *et la courbe en* n, n′, n″, ...; *on aura* $\frac{\mathrm{na}}{\mathrm{nb}}=\frac{\mathrm{n'a'}}{\mathrm{n'b'}}=\frac{\mathrm{n''a''}}{\mathrm{n''b''}}=..=$Constante.

Démonstration. MM Pilatte, Legrand et Rochat ont donné de ce théorème des démonstrations analitiques qui reviennent à peu près à ce qui suit.

Soient pris (fig. 5) le point P pour origine, la droite PA pour axe des x, et la droite PB pour axe des y ; l'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$xy=hx+gy\,, \quad \text{(I)}$$

et donnera

$$y=\frac{hx}{g-x}\;;$$

si donc on désigne par α l'abscisse du point m , son ordonnée sera

$$\frac{h\alpha}{g-\alpha}.$$

En conséquence l'équation de Mn sera de la forme

$$y-\frac{h\alpha}{g-\alpha}=k(x-\alpha)\;; \qquad \text{(II)}$$

k déterminant la direction de cette droite.

Si, dans l'équation (II) on fait $y=0$, la valeur qui en résultera pour x sera celle de Pa ; on aura donc

$$Pa=\alpha-\frac{h\alpha}{k(g-\alpha)}.$$

Si ensuite on élimine y entre les équations (I) et (II), en divisant l'équation résultante par $x-a$, la valeur qui en résultera pour x sera alors l'abscisse du point n , laquelle aura pour expression

$$g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}\;;$$

ce sera donc là aussi la projection de nb sur l'axe des x. Quant à la projection de na sur le même axe , elle est la différence des abscisses des points n et a prises avec leurs signes ; ce sera donc

$$\left\{\alpha-\frac{h\alpha}{k(g-\alpha)}\right\}-\left\{g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}\right\} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{k}-(g-\alpha).$$

Ainsi, les projections de na et nb sur l'axe des x seront respectivement

$$\frac{h}{k}-(g-\alpha)=\frac{h-k(g-\alpha)}{k},$$

$$g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}=-g.\frac{h-k(g-\alpha)}{k(g-\alpha)};$$

et comme na et nb sont proportionnelles à leurs projections sur une même droite, on doit avoir

$$\frac{na}{nb}=-\frac{h-k(g-\alpha)}{k}.\frac{k(g-\alpha)}{h-k(g-\alpha)}.\frac{1}{g}=\frac{\alpha-g}{g}$$

quantité indépendante de k, qui détermine la direction de mn, et qui sera conséquemment la même lorsque cette direction changera, pourvu que le point m reste le même.

Outre cette démonstration analitique, M. *Legrand* a donné du théorème la démonstration purement géométrique que voici :

Soient C le centre de la courbe ; Cg, Ch ses asymptotes; M, N les points où elles sont rencontrées par la droite mn ; G, H ceux où elles sont rencontrées par les prolongemens de PB et PA ; et soit menée par le point m une parallèle à Cg, se terminant en d à Ch et coupant PG en e.

Par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes et par les parallèles, on a

$$dm:PG::de:Ge\ ,$$
$$PG:Ma::Ge:mM\ ,$$
$$mN:dm::Nb:de\ ;$$

proportions qui, étant multipliées par ordre, donneront, en réduisant,

$$mN:Ma::Nb:mM\ ,$$

d'où

$$Ma\times Nb=mM\times mN.$$

On aurait semblablement

$$Ma\times Nb=nM\times nN\ ;$$

ce qui fournit déjà un théorème assez remarquable.

Maintenant la proportion

$$mN:Ma::Nb:mM$$

donne

$$mN-Ma:Nb-mM::Ma:mM\ ;$$

ou, en faisant attention que $mM=nN$,

$$mn-ma:nb::Ma:mM::PG:eG$$

ou

$$na:nb::PG:eG\ ,$$

d'où

$$\frac{na}{nb}=\frac{PG}{eG}$$

quantité constante, quelle que soit la direction de mn, tant que le point m restera le même.

M. *Pilatte* indique, comme application de ce théorème, la résolution du problème suivant :

Décrire une hyperbole qui passe par trois points donnés, et dont les asymptotes soient parallèles à deux droites données ?

On tire, en effet, de la proportion ci-dessus

$$na-nb:na::PG-eG:PG\ ,$$

ou

$$ab:na::Pe:PG\ ;$$

et, si l'on mène par n une parallèle à Ch, coupant PH en f, on aura pareillement

$$ab:mb::Pf:PH.$$

Cela posé, soient m, P, n les trois points donnés; par P soient menées des parallèles aux droites données, et conséquemment aux asymptotes; soit menée mn, coupant PA et PB en a et b; et soient enfin menées, parallèlement aux mêmes droites, les droites me et nf, rencontrant en e et f les prolongemens de PB et PA. Alors les trois premiers termes de chacune des deux proportions ci-dessus se trouvant connus, on pourra déterminer PG et PH, et conséquemment les points G, H par lesquels menant des parallèles Cg et Ch aux droites données, ces parallèles seront les asymptotes de la courbe, dont la construction, par points, ne présentera plus alors aucune difficulté.