ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Questions résolues. Solution du problème d'hydrodynamique proposé à la page 164 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 248-256

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__248_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'hydrodynamique proposé à la page 164 de ce volume ;

Par M. GERGONNE. (**)

1. On a deux vases V et V′, en forme de prismes ou de cylindres droits. Leurs bases sont horizontales et ont des aires respectivement égales à b et b'. Ces vases étant remplis d'eau jusqu'à des hauteurs h et h', on pratique à la fois à l'un et à l'autre et latéralement une fente verticale d'une largeur uniforme par laquelle l'eau s'écoule. L'eau du vase V est reçue dans le vase V′ et celle de celui-ci est évacuée au dehors. On suppose d'ailleurs que la quantité d'eau qui s'écoule des deux vases est indépendante de la pression du liquide supérieur, que conséquemment, pour chaque vase, elle est constante dans toute l'étendue de la fente qui répond au liquide. On suppose enfin que le volume d'eau écoulé pendant l'unité de temps, par une unité de longueur de la fente, est v pour le vase V et v' pour le vase V′.

Cela posé, on propose de déterminer, 1.° quelle sera la hauteur du liquide dans les deux vases à une époque donnée quelconque ;

(**) Ce problème a été proposé par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

2.°

2.° à quelle époque l'eau aura atteint son maximum de hauteur dans le vase V′ ; 3.° enfin quelle sera alors la hauteur du liquide dans ce vase.

2. Soit z la hauteur du liquide dans le vase V à l'époque t ; à l'époque $t+i$ cette hauteur sera

$$z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ ; \qquad (\mathrm{A})$$

elle aura donc diminué de la quantité

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ ;$$

d'où il suit que le volume du liquide évacué durant l'intervalle de temps i sera

$$b\left(-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\ldots\right),$$

c'est-à-dire ;

$$-b\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}-b\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ ; \qquad (\mathrm{B})$$

3. Présentement si, pendant l'intervalle de temps i, le liquide eût été constamment entretenu dans le vase V à la hauteur z, le volume d'eau évacué durant cet intervalle eût été

$$vz\frac{i}{1}\ ; \qquad (\mathrm{C})$$

et si, au contraire, le liquide eût constamment été, pendant le même temps, à la hauteur où il n'est parvenu qu'à l'époque $t+i$, le volume de la partie évacuée durant le temps i n'eût été que

$$vi\left(z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\ldots\right),$$

c'est-à-dire,

$$vz\frac{i}{1}+2v\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i^2}{1.2}+3v\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}^2t}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots\ . \qquad (\mathrm{D})$$

Or il est visible que l'on peut toujours supposer i assez petit, sans être nul, pour que le volume d'eau reellement évacué soit compris entre ces deux-là : c'est-à-dire, pour que la fonction (B) soit comprise entre les fonctions (C) et (D), et qu'alors il en sera de même pour toutes les valeurs de i inferieures à celle-là ; on doit donc avoir, rigoureusement en vertu d'un théorème connu (*),

$$-b\,.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=vz\ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{b}z\,.\quad (^{**})\qquad\qquad (E)$$

4. Si l'on fait $z=e^x$, d'où $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=e^x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, il viendra, en substituant et divisant par e^x

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{b}\ ,$$

d'où

$$x=T-\frac{v}{b}t\ ,$$

T étant une constante arbitraire. On aura donc

$$z=e^{T-\frac{v}{b}t}\ ;\qquad\qquad (F)$$

au bout du temps $t+i$, z sera donc devenu

$$e^{T-\frac{v}{b}(t+i)}=e^{T-\frac{v}{b}t}\times e^{-\frac{v}{b}i}=z.e^{-\frac{v}{b}i},$$

c'est-à-dire,

$$z-\frac{v}{b}z\frac{i}{1}+\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ldots\qquad\qquad (G)$$

(*) Voyez le *Calcul des dérivations* d'Arbogast, note de la préface, page XIV. Voyez aussi le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, deuxième édition, tome 1.er, introduction, page 65.

(**) On parvient à ce résultat d'une maniere moins rigoureuse, à la vérité, quant au langage, mais beaucoup plus courte, en remarquant que $vz\mathrm{d}t$ et $-b\mathrm{d}z$ ne sont que deux expressions différentes du volume de liquide évacué durant l'instant $\mathrm{d}t$.

formule qui doit coïncider avec la formule (A), et qui montre que l'abaissement du liquide dans le temps i est

$$\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad \text{(H)}$$

5. Si l'on veut compter les temps depuis l'époque où l'écoulement a commencé, on devra avoir à la fois $z=h$ et $t=0$, ce qui donnera

$$h=e^T\ ;$$

divisant l'équation (F) par celle-ci, il viendra, en chassant le dénominateur,

$$z=he^{-\frac{v}{b}t}$$

c'est là l'expression de la hauteur du liquide dans le vase V au bout du temps t: elle montre que cette hauteur, bien qu'elle décroisse continuellement, ne pourra jamais devenir tout à fait nulle.

6. Considérons actuellement ce qui se passe dans le vase V'; soit z' la hauteur du liquide dans ce vase à l'époque t; à l'époque $t+i$ elle sera

$$z'+\frac{dz'}{dt}\frac{i}{1}+\frac{d^2z'}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\ ; \qquad \text{(I)}$$

et le volume de liquide introduit dans ce vase pendant le temps i sera (H)

$$b\left(\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\right). \qquad \text{(K)}$$

Si ce volume eût été subitement introduit à l'époque t, il eût élevé le liquide d'une quantité

$$\frac{b}{b'}\left(\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\right),$$

c'est-à-dire,

$$\frac{v}{b'}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{bb'}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\ ; \qquad \text{(L)}$$

de manière que ce liquide se fût trouvé, à l'époque t, à une hauteur

$$z'+\frac{v}{b'}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{bb'}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

sa hauteur à l'époque $t+i$ eût donc été dans cette hypothèse (G)

$$\left(z'+\frac{v}{b'}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{bb'}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\right)-\frac{v'}{b'}\left(z'+\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\ldots\right)\frac{i}{1}$$
$$+\frac{v'^2}{b'^2}(z'+\ldots\ldots)\frac{i^2}{1.2}-\ldots$$

c'est-à-dire,

$$z'+\left(\frac{v}{b'}z-\frac{v'}{b'}z'\right)\frac{i}{1}+\left(\frac{v'^2}{b'^2}z'-\frac{v^2}{bb'}z-2\frac{vv'}{bb'}z\right)\frac{i^2}{1.2}+\ldots \qquad \text{(M)}$$

7. Si, au contraire ce volume de liquide eût été subitement introduit à l'époque $t+i$; comme à l'époque t il se trouvait à la hauteur z', sa hauteur à l'époque $t+i$ se fût trouvée d'abord (G)

$$z'-\frac{v'}{b'}z'\frac{i}{1}+\frac{v'^2}{b'^2}z'\frac{i^2}{1.2}-\ldots;$$

à quoi ajoutant l'élévation (L) due au liquide subitement introduit, c'est-à-dire,

$$\frac{v}{b'}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{bb'}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots;$$

on aura pour hauteur totale, à l'époque $t+i$,

$$z'+\left(\frac{v}{b'}z-\frac{v'}{b'}z'\right)\frac{i}{1}+\left(\frac{v'^2}{b'^2}z'-\frac{v^2}{bb'}z\right)\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad \text{(N)}$$

8. Présentement il est facile de voir que i peut toujours être supposé assez petit, sans être nul, pour que la hauteur effective du liquide dans le vase V', à l'époque $t+i$ soit moyenne entre celles qui résultent de ces deux hypothèses, c'est-à-dire, pour que la fonction (I) soit comprise entre les fonctions (M) et (N); d'où l'on doit conclure, comme ci-dessus,

$$\frac{dz'}{dt}=\frac{v}{b'}z-\frac{v'}{b'}z',$$

ou

$$b'.\frac{dz'}{dt}=vz-v'z' \text{ (*)}. \qquad (O)$$

9. Pour que la hauteur z' du liquide dans le vase V' soit un *maximum*, il faut qu'on ait $\frac{dz'}{dt}=0$, ce qui donne

$$vz-v'z'=0 \qquad \text{d'où} \qquad vz=v'z' \ ;$$

or vz et $v'z'$ sont les dépenses respectives des vases V et V' dans le même temps ; ainsi le liquide sera à sa plus grande hauteur dans le vase V', lorsque ce vase perdra précisément autant d'eau dans un instant que le vase V lui en fournira, ce qui était d'ailleurs facile à prévoir.

10. Si entre les équations (E) et (O) on élimine dt, on obtiendra

$$b'vz\frac{dz'}{dz}=b(v'z'-vz) \ ;$$

posant alors $z'=zy$ d'où $\frac{dz'}{dz}=z\frac{dy}{dz}+y$, il viendra, en substituant et divisant par z,

$$b'v\left(z\frac{dy}{dz}+y\right)=b(v'y-v) \ ,$$

ou

$$\frac{dz}{z}=\frac{b'vdy}{(bv'-b'v)y-bv}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\cdot\frac{(bv'-b'v)dy}{(bv'-b'v)y-bv} \ ;$$

d'où

$$\text{Log}.z+\text{Log}.C=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log}.\{(bv'-b'v)y-bv\} \ ;$$

ou en remettant pour y la valeur $\frac{z'}{z}$ et réduisant

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log}.z+\text{Log}.C=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log}.\{(bv'-b'v)z'-bvz\} \ .$$

(*) On parvient sur-le-champ à ce résultat, en remarquant que l'accroissement du volume du liquide dans le vase V', durant l'instant dt, peut être également exprimé par $b'dz'$ et par $(vz-v'z')dt$.

11. En considérant que les valeurs h et h' de z et z' doivent se correspondre, on aura pareillement

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log.}h+\text{Log.C}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\{(bv'-b'v)h'-bvh\},$$

équation qui, retranchée de la précédente, donne

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log.}\frac{z}{h}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh},$$

ou simplement

$$bv'\text{Log.}\frac{z}{h}=b'v\text{Log.}\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh};$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{z}{h}\right)^{bv'}=\left\{\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh}\right\}^{b'v}, \qquad \text{(P)}$$

ou encore

$$\{(bv'-b'v)h'-bvh\}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}=(bv'-b'v)z'-bvz,$$

et donne

$$z'=\frac{\{(bv'-b'v)h'-bvh\}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}+bvz}{bv'-b'v},$$

formule qui donnera z' lorsque z sera connu.

12. Nous avons trouvé (5)

$$z=he^{-\frac{v}{b}t}, \text{ d'où } \frac{z}{h}=e^{-\frac{v}{b}t} \text{ et } \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}=e^{-\frac{v'}{b'}t};$$

substituant donc, il viendra

$$z'=h'e^{-\frac{v'}{b'}t}+bvh.\frac{e^{-\frac{v}{b}t}-e^{-\frac{v'}{b'}t}}{bv'-b'v} \quad (*). \qquad \text{(Q)}$$

(*) Si dans l'équation (O), on substitue pour z sa valeur en t, elle deviendra

$$b'\frac{dz'}{dt}=vhe^{-\frac{v}{b}t}-v'z';$$

C'est là la hauteur du liquide dans le vase V' à l'époque t.

13. Si dans l'équation (P) on met pour z' sa valeur $\frac{vz}{v'}$ qui convient au maximum, elle deviendra

$$z^{bv'-b'v}=h^{bv'}.\left\{\frac{b'v^2}{v'[bvh-(bv'-b'v)h']}\right\}^{b'v};$$

on remettant pour z sa valeur en t, on aura

$$e^{\left(\frac{b'}{b}-\frac{v'}{b}\right)t}=h^{b'v}\left\{\frac{v}{v'}\cdot\frac{b'v}{bvh-(bv'-b'v)h'}\right\}^{b'v};$$

ou en passant des nombres aux logarithmes

$$\left(\frac{b'}{b}-\frac{v'}{v}\right)t=\text{Log.}h^{b'v}\left\{\frac{v}{v'}\cdot\frac{b'v}{bvh-(bv'-b'v)h'}\right\}^{b'v};$$

équation qui donnera l'époque t où le liquide du vase V' aura atteint son *maximum* d'élévation.

14. Ces dernières formules se simplifient lorsque le vase V' ne contient d'autre liquide que celui qu'il reçoit du vase V. On a alors $h'=0$, ce qui donne pour la hauteur de l'eau dans le vase V' à l'époque t,

$$z'=\frac{e^{-\frac{v}{b}t}-e^{-\frac{v'}{b'}t}}{\frac{v'}{b}-\frac{b'}{b}}h;$$

et pour l'époque du *maximum* de hauteur du liquide dans ce vase,

$$t=\frac{\text{Log.}\left(\frac{v}{b}\right)-\text{Log.}\left(\frac{v'}{b'}\right)}{\frac{v}{b}-\frac{v'}{b'}};$$

il est remarquable qu'alors l'époque du *maximum* est indépendante du volume d'eau contenu dans le vase V.

15. Si de plus on suppose les vases V et V' absolument égaux et percés de la même manière, on trouvera 1.° pour la hauteur du

cette équation, qui ne paraît être facilement intégrable par aucun moyen connu, a donc pour intégrale l'équation (Q).

liquide dans le vase V′ à l'époque t

$$z'=h.\frac{v}{b}\,te^{-\frac{v}{b}t}\ ;$$

2.° pour la plus grande hauteur du liquide dans ce vase

$$z'=\frac{h}{e}\ ;$$

3.° enfin pour l'époque où le *maximum* d'élévation du liquide aura lieu dans le vase V′

$$t=\frac{b}{v}\ .$$

On traiterait de la même manière le cas où l'un des vases ou tous les deux seraient construits en forme de cônes ou de pyramides, tronqués ou non tronqués, et celui où l'on aurait égard à la pression du liquide supérieur ; mais il est douteux qu'alors on parvînt à des formules intégrables.