ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

Géométrie analitique. Recherche de quelques propriétés des tangentes aux sections coniques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 225-230
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__225_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de quelques propriétés des tangentes aux sections coniques ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes ; soient de plus

$$y=ax+b\ , \qquad y=a'x+b'\ ,$$

les équations de deux droites quelconques.

Nous exprimerons que ces droites sont tangentes à l'ellipse, en écrivant

$$A^2a^2+B^2=b^2\ , \qquad A^2a'^2+B^2=b'^2\ ,$$

ou bien

$$A^2a^2+B^2=y^2-2axy+a^2x^2\ ,$$
$$A^2a'^2+B^2=y^2-2a'xy+a'^2x^2\ ,$$

ou encore

$$a^2+\frac{2xy}{A^2-x^2}a+\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=0\ ,$$

$$a'^2+\frac{2xy}{A^2-x^2}a'+\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=0\ ;$$

d'où l'on voit que a et a' sont racines d'une même équation qui n'est autre que l'une des deux précédentes, et qu'ainsi on doit avoir

$$\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=aa'. \qquad \text{(M)}$$

Si l'on suppose le produit aa' constant et négatif, l'équation (M) sera

$$y^2+aa'x^2=B^2+aa'A^2 \ ;$$

elle appartiendra donc à une ellipse concentrique à la première, dont les axes $2A'$, $2B'$ auront même direction que les axes primitifs, et seront déterminés par les équations

$$A'^2=\frac{B^2+aa'A^2}{aa'}\ , \qquad B'^2=B^2+aa'A^2 \ ;$$

en sorte que leur rapport sera

$$\frac{B'}{A'}=\sqrt{aa'}.$$

Si l'on suppose au contraire le produit aa' constant, mais positif, l'équation (M) deviendra

$$y^2-aa'x^2=B^2-aa'A^2 \ ;$$

elle appartiendra donc alors à une hyperbole concentrique à l'ellipse proposée ; les axes $2A'$ et $2B'$ de cette hyperbole, qui auront encore même direction que les axes primitifs, seront déterminés par les équations

$$A'^2=-\frac{B^2-aa'A^2}{aa'}\ , \qquad B'^2=B^2-aa'A^2 \ ;$$

en sorte que leur rapport sera

$$\frac{B'}{A'}=\sqrt{aa'} \ ;$$

et, suivant que aa' sera plus grand ou plus petit que $\frac{B^2}{A^2}$, l'axe transverse de cette hyperbole sera dirigé suivant le grand ou le petit axe de l'ellipse.

Comme on parviendrait évidemment aux mêmes conséquences, en rapportant l'ellipse à son petit axe, on peut établir le théorème suivant :

THÉORÈME. Si deux droites touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles forment avec l'un des axes soit cons-

tant, le point d'intersection de ces deux droites décrira une section conique concentrique à l'ellipse proposée, et dont les axes auront mêmes directions que ceux de cette ellipse.

En général, cette section conique sera une ellipse *ou une* hyperbole, *suivant que le produit constant sera* negatif *ou* positif. *Dans l'un et dans l'autre cas, le rapport des deux axes de la section conique sera la racine quarrée du produit constant.*

Si à l'ellipse qui a pour équation

$$y^2+aa'x^2=B^2+aa'A^2\ ,$$

et dont les axes $2A'$ et $2B'$ sont conséquemment déterminés par les équations

$$A'^2=\frac{B^2+aa'A^2}{aa'}\ , \qquad B'^2=B^2+aa'A^2\ ;$$

si à cette ellipse, disons-nous, on mène deux tangentes de manière que le produit aa' conserve la même valeur que précédemment et soit négatif, la courbe décrite par ces nouvelles tangentes sera une troisième ellipse dont les axes $2A''$, $2B''$ seront déterminés par les équations

$$A''^2=\frac{B'^2+aa'A'^2}{aa'}\ , \qquad B''^2=B'^2+aa'A'^2\ ;$$

mettant pour B'^2 et A'^2 leurs valeurs déjà déterminées, il viendra

$$A''^2=\frac{2(B^2+aa'A^2)}{aa'}=2A'^2\ , \qquad B''^2=2(B^2+aa'A^2)=2B'^2.$$

Si, en observant les mêmes conditions, on cherche le lieu de l'intersection des deux tangentes menées à cette troisième ellipse, on en déterminera une quatrième dont les axes $2A'''$, $2B'''$ seront donnés par les équations

$$A'''^2=2A''^2\ , \qquad B'''^2=2B''^2\ ,$$

et ainsi de suite : on aura donc

$$\sqrt{aa'}=\frac{B'}{A'}=\frac{B''}{A''}=\frac{B'''}{A'''}=\ldots\ldots;$$

ce qui donne lieu à ce théorème.

THÉORÈME. Si deux droites, touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles forment avec l'un des axes soit constant et négatif, le point d'intersection des deux tangentes décrira une seconde ellipse. Si on conçoit deux tangentes à cette seconde ellipse, mobiles comme les premières, et assujetties aux mêmes conditions qu'elles, l'intersection de ces dernières décrira une troisième ellipse de laquelle, en suivant les mêmes procédés, on en pourra déduire une quatrième, et ainsi de suite. Cela posé :

1.° *Toutes les ellipses construites sur la première seront semblables entre elles ; elles lui seront concentriques, et leurs axes auront la même direction que les siens.*

2.° *Les aires de ces ellipses formeront une progression croissante par quotiens dont la raison sera* $=2$.

3.° *Enfin les tangentes dont l'intersection décrira l'une quelconque de ces ellipses, seront continuellement parallèles à deux cordes supplémentaires de l'ellipse qui la précédera immédiatement, dans l'ordre de leur génération successive.*

Considérons présentement quelques cas particuliers.

Soit 1.° $aa'=-1$; dans ce cas l'équation (M) deviendra simplement

$$y^2+x^2=A^2+B^2 \ ;$$

ce qui donne ce théorème connu :

THÉORÈME. Si les deux côtés d'un angle droit mobile sont continuellement tangens à une même ellipse, son sommet décrira un cercle concentrique à cette ellipse, et ayant pour rayon la corde qui joint l'une des extrémités du grand axe à l'une des extrémités du petit.

Soit 2.° $aa'=+1$; l'équation (M) deviendra alors

$$y^2-x^2=-(A^2-B^2) \ ;$$

ainsi, dans ce cas, le lieu du point d'intersection des deux tangentes mobiles est une hyperbole equilatérale dont les axes sont égaux à la distance entre les foyers de l'ellipse.

Soit 3.° $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$ l'équation (M) deviendra

$$A^2y^2+B^2x^2=2A^2B^2\ ;$$

on aura donc une ellipse dont les demi-axes seront $A\sqrt{2}$, $B\sqrt{2}$; et, comme $\frac{B\sqrt{2}}{A\sqrt{2}}=\frac{B}{A}$ et $(A\sqrt{2})^2=2A^2$, cette ellipse sera semblable à la première, et son aire sera double de la sienne ; la condition $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$ convenant d'ailleurs aux cordes supplémentaires de l'ellipse proposée, on en peut conclure ce théorème :

THÉORÈME. Si deux droites mobiles, continuellement tangentes à une même ellipse, sont constamment parallèles à deux cordes supplémentaires de cette ellipse, le lieu géométrique de l'intersection de ces deux tangentes sera une autre ellipse, concentrique et semblable à la première, ayant ses axes dans la même direction et dont l'aire sera double de la sienne (*).

Soit 4.° $aa'=+\frac{B^2}{A^2}$; l'équation (M) donnera

$$y=\pm\frac{B}{A}x\ ;$$

c'est-à-dire, qu'on aura alors, pour le lieu géométrique cherché, les diagonales du rectangle des axes.

Si, dans tout ce qui précède, on change B en $B\sqrt{-1}$, la courbe primitive sera une hyperbole, et on pourra établir, pour cette courbe, des théorèmes analogues aux précédens.

Enfin, en appliquant le même procédé à la parabole, on parvient à ce théorème.

THÉORÈME. Si deux droites mobiles, touchant continuellement

(*) Ce théorème est un corollaire du deuxième de ceux qui précèdent.

une même parabole se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques de leur inclinaison à l'axe de cette parabole soit constant, le lieu de l'intersection de ces deux droites sera une droite indéfinie perpendiculaire à cet axe.

Cette droite indéfinie sera la directrice de la parabole, si les deux tangentes sont constamment perpendiculaires l'une à l'autre.

St-Brieux, le 20 de novembre 1811.