BRET

Géométrie analitique. Discussion des équations du second degré entre deux variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 218-224
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__218_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Discussion des équations du second degré entre deux variables ;

Par M. BRET, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.

§. 1.

Construction des courbes qui ont un centre.

L'ÉQUATION générale des courbes du second ordre qui ont un centre, peut toujours, comme l'on sait, être facilement ramenée à la forme

$$ay^2+2bxy+cx^2=P; \qquad (1)$$

x et y désignant des coordonnées rectangulaires.

Nous allons chercher à construire, le plus simplement possible, les différentes courbes que cette équation peut représenter.

L'équation

$$gy'^2+hx'^2=P, \qquad (2)$$

construite sur les axes obliques des x', y', déterminés de position par rapport aux premiers, et ayant la même origine, donnera les mêmes courbes, si, en substituant pour x', y', dans l'équation (2), les fonctions équivalentes de x, y, on obtient une équation identiquement la même que l'équation (1).

Or, les formules connues qui donnent les valeurs des coordonnées obliques x', y' en coordonnées rectangulaires, sont

$$x'=\frac{x\text{Sin.}\alpha'-y\text{Cos.}\alpha'}{\text{Sin.}\theta}, \quad y'=\frac{x\text{Sin.}\alpha-y\text{Cos.}\alpha}{-\text{Sin.}\theta};$$

dans lesquelles α' et α désignent respectivement les angles que font les axes de x' et y' avec l'axe des x, du côté des x positifs, et où on a fait, pour abréger $\alpha'-\alpha=\theta$.

Effectuant donc le calcul que nous venons d'indiquer, et exprimant que l'équation résultante est identique avec l'équation (1), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} g\,\text{Cos.}^2\alpha+h\,\text{Cos.}^2\alpha'=a\,\text{Sin.}^2\theta\ , \\ g\,\text{Sin.}^2\alpha+h\,\text{Sin.}^2\alpha'=c\,\text{Sin.}^2\theta\ , \\ g\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Cos.}\alpha+h\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Cos.}\alpha'=-b\,\text{Sin.}^2\theta. \end{array}\right\}\ (3)$$

De ces équations on déduit facilement ; savoir : la valeur de la somme $g+h$, en ajoutant les deux premières, et la valeur du produit gh, en retranchant de leur produit le quarré de la troisième. Ces valeurs sont

$$\left.\begin{array}{l} g+h=(a+c)\,\text{Sin.}^2\theta\ , \\ gh=(ac-b^2)\,\text{Sin.}^2\theta\ , \end{array}\right\}\ (4)$$

et par conséquent l'équation du second degré qui a pour racines g et h, sera

$$z^2-(a+c)z\,\text{Sin.}^2\theta+(ac-b^2)\,\text{Sin.}^2\theta=0\ ; \qquad (5)$$

ses racines sont imaginaires lorsqu'on a

$$(a+c)^2\,\text{Sin}^2.\theta-4(ac-b^2)<0\ ,$$

ce qui emporte la condition

$$ac-b^2>0\ ,$$

et donne

$$\text{Sin.}^2\theta<\frac{4(ac-b^2)}{(a+c)^2}\ ;$$

dans ce cas seulement l'équation (2) cesse de représenter les courbes comprises dans l'équation (1). Ainsi, la plus petite valeur que puisse atteindre Sin.θ est donnée par l'équation

$$\text{Sin.}^2\theta=\frac{4(ac-b^2)}{(a+c)^2}\ ;$$

alors les racines de l'équation (5) sont égales, c'est-à-dire, qu'on a alors $g=h$; ce qui démontre que l'angle obtus formé par les diamètres conjugués égaux est le plus grand de tous ceux que puissent former deux diamètres conjugués.

En éliminant g et h entre les équations (3) on obtient

$$a\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\alpha'+b\{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha'+\mathrm{Sin}.\alpha'\mathrm{Cos}.\alpha\}+c\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha'=0 \;,$$

ou

$$a\mathrm{Tang}.\alpha\mathrm{Tang}.\alpha'+b(\mathrm{Tang}.\alpha+\mathrm{Tang}.\alpha')+c=0 \;, \qquad (6)$$

cette équation sert à fixer la position des nouveaux axes.

On conclut de tout ce qui précède qu'il y a une infinité de systèmes de coordonnées pour lesquels l'équation des courbes du second ordre qui ont un centre, conserve la forme

$$gy'^2+hx'^2=P. \; (*)$$

Cherchons maintenant si, parmi ces systèmes, il en peut exister de rectangulaires. Supposons l'angle θ droit et prenons l'axe des x', dans l'angle des x et y positifs ; il viendra

$$\mathrm{Cos}\alpha'=-\mathrm{Sin}\alpha \;, \qquad \mathrm{Sin}\alpha'=\mathrm{Cos}\alpha \;;$$

d'après quoi les équations (3) se transformeront en celles-ci

$$a=g\mathrm{Cos}.^2\alpha+h\mathrm{Sin}.^2\alpha \;,$$
$$c=g\mathrm{Sin}.^2\alpha+h\mathrm{Cos}.^2\alpha \;,$$
$$b=(h-g)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha \;,$$

prenant la différence des deux premières, il viendra

$$a+c=(g-h)(\mathrm{Cos}.^2\alpha-\mathrm{Sin}.^2\alpha) \;;$$

or,

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha-\mathrm{Sin}.^2\alpha=\mathrm{Cos}.2\alpha \qquad \text{et} \qquad 2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha=\mathrm{Sin}.2\alpha \;;$$

(*) Non seulement il y a une infinité de systèmes de coordonnées pour lesquels l'équation conserve cette forme, mais il n'est aucune droite menée par le centre de la courbe, qui ne puisse être prise pour l'un des axes d'un de ces systèmes; et c'est là un point sur lequel il conviendrait d'appuyer un peu plus dans les élémens.

(*Note des éditeurs.*)

donc

donc

$$\text{Cos.}2\alpha=\frac{a-c}{g-h}\ ,\quad \text{Sin.}2\alpha=\frac{2b}{h-g}\ ,\quad \text{d'où}\quad \text{Tang.}2\alpha=-\frac{2b}{a-c}\ ;$$

cette dernière formule fait connaître la direction des axes principaux.

Mais il est nécessaire de distinguer, par quelques caractères, la valeur de g de celle de h. Pour cela nous observerons que α étant, par hypothèse, moindre que le quadrans, 2α est plus petit que deux angles droits; d'où il suit que Sin.2α est positif : la différence $h-g$ aura donc le signe qui affectera b; c'est-à-dire, que, si b est positif, on prendra pour h la plus grande racine, et que, si b est négatif, on choisira, au contraire, pour h la plus petite de ces racines. Ainsi, par ce qui précède, les courbes du second ordre qui ont un centre, se trouvent entièrement connues de grandeur et de situation par rapport aux axes primitifs.

Les racines de l'équation

$$z^2-(a+c)z+(ac-b^2)=0$$

sont essentiellement réelles.

1.° Si ces racines sont de même signe, la courbe est une *ellipse.*

2.° Si elles sont de signes contraires, la courbe est une *hyperbole.*

3.° Si, en particulier, elles sont numériquement égales, la courbe sera un *cercle* ou une *hyperbole équilatérale.*

On déduit très-simplement des équations (4 et 6) les relations qui ont lieu entre les grandeurs des axes principaux et les grandeurs et directions des diamètres conjugués. Considérons, en effet, l'équation

$$gy'^2+hx'^2=P$$

dans deux systèmes différens de coordonnées; nous aurons deux équations correspondantes des mêmes courbes auxquelles nous donnerons les formes suivantes :

$$\pm\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1\ ,\quad \pm\frac{y'^2}{B'^2}+\frac{x'^2}{A'^2}=1.$$

La première, dans laquelle x, y désignent des coordonnées rectangulaires, répond à l'équation (1); et la seconde, dans laquelle x', y' expriment des coordonnées obliques, répond à l'équation (2). Comparant ces équations entre elles, on obtient

$$a=\pm\frac{1}{B^2}\ ,\ b=0\ ,\ c=\frac{1}{A^2}\ ,\ g=\pm\frac{1}{B'^2}\ ,\ h=\frac{1}{A'^2}$$

d'après quoi les équations (4 et 6) deviennent

$$\pm\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{A'^2}=\left(\pm\frac{1}{B^2}+\frac{1}{A^2}\right)\text{Sin.}^2\theta\ ,$$

$$\frac{1}{A'^2B'^2}=\frac{1}{A^2B^2}\text{Sin.}^2\theta\ ,$$

$$\pm\frac{1}{B^2}\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\alpha'+\frac{1}{A^2}=0\ ;$$

d'où on déduit, sur-le-champ, les relations connues
$AB=A'B'\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)$, $A^2\pm B^2=A'^2\pm B'^2$, $A^2\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\alpha'\pm B^2=0$.

Nous terminerons par l'application de ces méthodes à la construction d'une ellipse donnée par l'équation

$$5y^2+2xy+5x^2-12y-12x=0\ ;$$

en portant l'origine au centre, dont les coordonnées sont l'une et l'autre égales à l'unité, cette équation deviendra

$$5y^2+2xy+5x^2=12.$$

Reprenant alors les formules

$$ay^2+2bxy+cx^2=P\ ,\quad gy'^2+hx'^2=P$$

$$\text{Sin.}2\alpha=\frac{2b}{h-g}\ ,\quad \text{Tang.}2\alpha=-\frac{2b}{a-c}$$

$$z^2-(a+c)z+(ac-b^2)=0$$

on trouve

$$\text{Sin.}2\alpha=\frac{2}{h-g}\ ,\quad \text{Tang.}2\alpha=\infty$$

$$z^2-10z+24=0\text{, d'où } z=4 \text{ ou } 6\ ;$$

or, comme Sin.2α doit être positif, il s'ensuit que $h=6$, $g=4$; en sorte que l'ellipse a pour équation

$$6x'^2+4y'^2=12\text{, ou } 3x'^2+2y'^2=6.$$

§. 2.

Construction de la parabole.

L'équation générale de la parabole est

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0\ ,$$

en écrivant que $b^2=ac$

Si on la résout successivement par rapport à x et par rapport à y, on trouvera

$$y=-\frac{bx+d}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{2(bd-ae)x+(d^2-af)}\ ,$$

$$x=-\frac{by+e}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{2(be-cd)y+(e^2-cf)}\ .$$

Soient ensuite posées les équations

$$ay+bx+d=0\ , \qquad (1)$$
$$by+cx+e=0\ , \qquad (2)$$
$$2(bd-ae)x+(d^2-af)=0\ , \qquad (3)$$
$$2(be-cd)y+(e^2-cf)=0\ . \qquad (4)$$

Soient désignés par A et B les points où la droite (3) coupe les diamètres (1) et (2), et par C et D ceux où la droite (4) rencontre ces mêmes diamètres. On voit que ces droites (3) et (4) sont tangentes à la parabole aux points A et D. Si maintenant des points A et D on abaisse sur les droites (2) et (1) des perpendiculaires qui aboutissent respectivement aux points E et F de ces lignes, et qu'ensuite on joigne le point A au milieu de BE et le point D au milieu de CF, par deux droites, ces droites se couperont au sommet S de la parabole.

Cette construction est fondée sur cette propriété de la parabole rapportée soit à son axe soit à ses diamètres, savoir : que la soustangente est double de l'abscisse du point de contact.

On peut employer une construction semblable pour déterminer d'autres points que le sommet. Si, en effet, au lieu d'abaisser des points A et D des perpendiculaires sur les diamètres (2) et (1), on mène, par ces points, des parallèles AE, DF, sous un angle quelconque; en continuant la construction, comme ci-dessus, on obtiendra le point de la parabole où sa tangente est parallèle aux droites AE ou DF.

Ayant le sommet, il est facile de trouver le foyer; il suffit, en effet, pour cela de mener le rayon vecteur du point A, c'est-à-dire, de mener par le point A une droite faisant avec la droite (1) un angle égal à celui que fait celle-ci avec la droite (3), cette droite par sa rencontre avec l'axe de la courbe qui est maintenant connu, déterminera le point cherché. On pourrait aussi déterminer le foyer par l'intersection des rayons vecteurs des points A et D; mais quelquefois ces rayons vecteurs pourraient se confondre.

Ayant ainsi le sommet et le foyer de la courbe, il est facile de la tracer, soit par points, soit par un mouvement continu.