ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ENCONTRE
ROCHAT

Solutions du problème de statique proposé à la page 96 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 191-195
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__191_1>

Solutions du problème de statique proposé à la page 96 de ce volume ;

Par M. D. Encontre, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier ;

Et M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux (*).

Nous allons comprendre ces deux solutions dans une rédaction unique, en faisant remarquer toutefois les différences, très-légères d'ailleurs, qui les distinguent.

PROBLÈME. Une table horizontale, non pesante, de forme

(*) M. Tédenat a aussi remis aux rédacteurs des *Annales* quelques notes relatives à ce problème ; elles rentrent, quant au fond, dans les solutions dont on va rendre compte.

quelconque, posant, par des points déterminés, sur trois piliers verticaux, susceptibles, au plus, de résistances respectivement représentées par F, F$'$, F$''$, *et qu'on suppose données; on demande :*

1.° *Quel est le plus grand poids que puisse supporter un point déterminé quelconque de la table ?*

2.° *Quels sont les points de cette table qui peuvent supporter un poids donné quelconque* P ?

3.° *Quel est le plus grand poids que la table puisse supporter ?*

4.° *Enfin quel est le point de cette table qui peut supporter ce plus grand poids ?*

Solution. Soient f, f', f'', (fig. 7) les points respectifs de la table où répondent les piliers dont les forces sont F, F', F'' ; soit P un poids placé en p, et cherchons comment la pression qu'il exerce en ce point se répartira entre les trois points d'appui f, f', f''.

Pour cela, formons le triangle $ff'f''$, et, par p et ses sommets, menons des droites se terminant aux côtés opposés en q, q', q''. Soit décomposé le poids P en deux autres situés en f et q, il ne s'agira plus ensuite que de décomposer ce dernier en deux autres situés en f', f''. Mais comme, au lieu de décomposer, en premier lieu, suivant fq, on pourrait d'abord décomposer suivant $f'q'$ ou $f''q''$, il s'ensuit qu'on peut obtenir trois expressions différentes de chacune des pressions exercées en f, f', f''. En les égalant entre elles, on obtiendra, entre les parties de la figure, diverses équations qui, par leur combinaison, donneront naissance à plusieurs théorèmes de géométrie parmi lesquels M. Rochat remarque le suivant.

$$pq.f'q'.f''q''+pq'.f''q''.fq+pq''.fq.f'q'=fq.f'q'.f''q'' ;$$

on peut y ajouter encore celui-ci

$$\frac{pq}{fq}+\frac{pq'}{f'q'}+\frac{pq''}{f''q''}=1.$$

En désignant par Φ, Φ', Φ'', les pressions exercées en f, f', f'', respectivement, leurs expressions les plus simples seront les suivantes :

$$\Phi=P.\frac{pq}{fq}\ ,\quad \Phi'=P.\frac{pq'}{f'q'}\ ,\quad \Phi''=P.\frac{pq''}{f''q''}\ ;$$

ce sont aussi celles qu'adopte M. Rochat ; mais M. Encontre remarque qu'à cause des triangles de même base, en désignant par T l'aire du triangle $ff'f''$, et par t, t', t'' les aires respectives des triangles $f'pf''$, $f''pf$, fpf', on a

$$\frac{pq}{fq}=\frac{t}{T}\ ,\quad \frac{pq'}{f'q'}=\frac{t'}{T}\ ,\quad \frac{pq''}{f''q''}=\frac{t''}{T}\ ;$$

d'où résulte

$$\Phi=P.\frac{t}{T}\ ,\quad \Phi'=P.\frac{t'}{T}\ ,\quad \Phi''=P.\frac{t''}{T}\ ;$$

et conséquemment

$$\Phi:\Phi':\Phi''::t:t':t''.$$

I. Ces préliminaires établis, si le point p est donné, et qu'on demande la plus grande valeur qu'il soit possible de donner à P, cette valeur sera limitée par les trois inégalités

$$\Phi<F,\quad \Phi'<F',\quad \Phi''<F'',$$

ou

$$P\frac{t}{T}<F\ ,\quad P\frac{t'}{T}<F'\ ,\quad P\frac{t''}{T}<F''\ ,$$

ou encore

$$P<F.\frac{T}{t}\ ,\quad P<F'.\frac{T}{t'}\ ,\quad P<F''.\frac{T}{t''}\ ,$$

le signe $<$ n'excluant pas l'égalité, et deux de ces inégalités étant nécessairement comportées par la troisième. Ainsi il faudra prendre P égal à la plus petite des trois quantités

$$F.\frac{T}{t}\,,\qquad F.'\frac{T}{t'}\,,\qquad F.''\frac{T}{t''}\,.$$

II. On peut supposer, en second lieu, que c'est le poids P qui est donné, et qu'il s'agit de déterminer quels sont tous les points p de la table qui peuvent le supporter. Dans ce cas, les mêmes inégalités doivent encore avoir lieu, à la fois.

Si l'on désigne par d, d', d'', les distances respectives du point p aux droites $f'f''$, $f''f$, ff', et par D, D', D'', les distances des points f, f', f'', aux mêmes droites; à cause des triangles de mêmes bases, on aura

$$\frac{t}{T}=\frac{d}{D}\,,\qquad \frac{t'}{T}=\frac{d'}{D'}\,,\qquad \frac{t''}{T}=\frac{d''}{D''}\,;$$

substituant ces valeurs dans les inégalités ci-dessus, on en tirera

$$d<D.\frac{F}{P}\,,\qquad d'<D'.\frac{F'}{P}\,,\qquad d''<D''.\frac{F''}{P}\,.$$

A des distances de $f'f''$, $f''f$, ff' (fig. 8), respectivement égales à $D.\frac{F}{P}$, $D'.\frac{F'}{P}$, $D''.\frac{F''}{P}$, et du côté de l'intérieur du triangle, soient menées des parallèles $m'm''$, $m''m$, mm' à ces côtés. Le point p sera assujéti, par la première condition à être entre $f'f''$ et $m'm''$, par la seconde à être entre $f''f$ et $m''m$, et enfin par la troisième à être entre ff' et mm'. Ainsi on ne pourra prendre pour le point p que l'un de ceux du triangle $mm'm''$ (*).

(*) Nous saisirons cette occasion de remarquer qu'en général, de même que l'équation $y=ax+b$ exprime tous les points d'une droite indéfinie, tracée sur un plan, les inégalités $y>ax+b$, $y<ax+b$ expriment, l'une tous les points du plan de cette droite qui sont situés au-dessus d'elle, et l'autre tous les points de ce plan qui sont situés au-dessous. De même des deux inégalités $x^2+y^2<r^2$, $x^2+y^2>r^2$, la première

Si le triangle $mm'm''$, au lieu d'être tourné en sens inverse du triangle $ff'f''$, était tourné dans le même sens que lui, le problème serait impossible, puisque alors le point p serait assujéti à se trouver à la fois dans les trois espaces déterminés par chaque côté du triangle $mm'm''$ et par les prolongemens des deux autres au-delà de celui-ci.

III. Quant au plus grand poids que la table puisse supporter, il est clair qu'il ne saurait surpasser la somme des résistances F, F', F'', puisque, dans l'hypothèse contraire, l'une au moins de ses composantes surpasserait la résistance qui lui correspondrait.

IV. Ce plus grand poids doit donc être égal à $F+F'+F''$, et il est aisé de déduire de ce qui précède, qu'il ne peut être appliqué qu'en un point unique qui n'est autre que le centre commun de gravité des trois forces F, F', F''. Alors aussi le triangle $mm'm''$ se réduit à un point.

M. Encontre termine par observer que, quand même la table serait supposée pesante, le problème n'en serait pas pour cela plus difficile, pourvu que l'on connût son poids et son centre de gravité; il est clair, en effet, qu'en décomposant ce poids en trois autres appliqués en f, f', f'', et prenant seulement pour F, F', F'', non les résistances des piliers, mais les excès de ces résistances sur les portions du poids de la table qui leur correspondent, le problème se trouverait réduit au cas où la table est sans pesanteur.

---

exprime tous les points d'un plan qui sont intérieurs à un cercle, et la seconde tous ceux qui lui sont extérieurs.

D'après ces considérations, qu'il est facile d'appliquer à l'étendue à trois dimensions, il est aisé de voir qu'il n'est aucune portion d'étendue limitée, en tout ou en partie qu'on ne puisse parvenir à exprimer analitiquement, par un système d'équations et d'inégalités considérées comme ayant lieu à la fois; ainsi, par exemple, un arc de cercle ayant son centre à l'origine sera exprimé par le système

$$y>ax+b\ ,\quad y<a'x+b'\ ,\quad x^2+y^2=r^2$$

(*Note des éditeurs.*)