ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Sur les différences des ordres successifs des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique ; pour servir de réponse à la même question

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 185-191

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__185_1>

Sur les différences des ordres successifs des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique;

Pour servir de réponse à la même question ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Le théorème algébrique proposé à démontrer à la page 96 du 2.me volume des *Annales*, peut être énoncé comme il suit : *Les différences de l'ordre* m.eme *des puissances* m.emes *des nombres naturels successifs sont une quantité constante ; savoir : le pro-*

On pourrait prouver, plus généralement, que *si, dans une fonction entière et rationnelle du degré* m, *on substitue les termes d'une suite dont les* n.emes *différences soient constantes, les résultats des substitutions formeront une suite dont les* mn.emes *différences seront constantes.*

(*) M. Servois, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère, a aussi adressé aux rédacteurs des *Annales* une démonstration de cette formule ; mais elle ne diffère en rien de celle de M. Tédenat.

(*Notes des éditeurs.*)

duit continuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à l'exposant m.

Cette proposition appartient à la doctrine des différences finies, qui sert d'introduction aux calculs supérieurs. Je l'ai demontrée dans mon ouvrage intitulé : *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*. En travaillant de nouveau ce sujet, à l'occasion de la demande faite dans les *Annales*, j'ai établi la loi générale des différences de tous les ordres des puissances semblables des termes successifs d'une progression arithmétique. Le théorème proposé devient ainsi un cas très-particulier de cette doctrine générale.

§. 1.

Pour abréger et pour faciliter le développement de ce sujet, je vais d'abord établir quelques symboles.

Je désignerai par $\int.P_1$, $\int.P_2$, $\int.P_3$, $\int.P_4$,.... $\int.P_{n-1}$, $\int.P_n$, les sommes des produits de 1, 2, 3, 4,.... $n-1$, n, dimensions, faits avec des lettres proposées et leurs puissances.

Les lettres proposées étant A_1, A_2, A_3, A_4, la somme des produits de n dimensions, faits avec ces lettres determinées, sera exprimée comme il suit : $\int.P_n.\ A_1....A_4$.

Que les lettres qui composent ces produits soient au nombre de deux seulement ; on conservera cette symbolisation, en supprimant les points mis entre ces lettres. Ainsi l'expression $\int.P_n.A_1A_4$ est celle de la somme des produits de n dimensions, faits avec les deux lettres A_1 et A_4 (*).

§. 2.

Sur les différences premières.

Soient A et A′ deux termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les m.emes puissances ; et les differences premières de ces m.emes puissances : on aura

(*) Ces sortes de fonctions ont déja été considérées d'une manière spéciale par M. de Wronski ; (Voy. son *Introduction à la philosophie des mathématiques*,

$$A_2^m - A_1^m = (A_2 - A_1)(A_2^{m-1} + A_2^{m-2} A_1 + A_2^{m-3} A_1^2 + \ldots + A_2^2 A_1^{m-3} + A_2 A_1^{m-2} + A_1^{m-1})$$

$$= (A_2 - A_1) \int . P_{m-1} . A_2 A_1 .$$

Savoir : un terme des différences premières des puissances m.emes des termes d'une progression arithmétique, est le produit de la différence constante des termes de cette progression par la somme des produits de $m-1$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences premières des puissances.

§. 3.

Sur les différences secondes.

Soient A_1, A_2, A_3, trois termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les m.emes puissances, et les différences secondes de ces puissances, on a, par ce qui précède,

$$A_2^m - A_1^m = (A_2 - A_1) \int . P_{m-1} . A_2 A_1 ,$$

pag. 65) il les désigne par la caractéristique hébraïque (*Aleph*) ; ainsi, par exemple, la fonction

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc ,$$

que M. Lhuilier désigne par

$$\int . P_2 . abc ,$$

est désignée par M. de Wronski ainsi qu'il suit :

$$\aleph[a+b+c]^2 ;$$

de manière qu'en général

$$\int . P_m . abc \ldots k = \aleph[a+b+c+ \ldots + k]^m .$$

(*Note des éditeurs.*)

$$A_3^m - A_2^m = (A_2 - A_1)\int.P_{m-1}.A_3A_2\,;$$

d'où

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = (A_2 - A_1)\left\{\int.P_{m-1}.A_3A_2 - \int.P_{m-1}.A_2A_1\right\}$$

$$=(A_2 - A_1)\left\{\begin{array}{l}(A_3^{m-1} + A_3^{m-2}A_2 + \ldots\ldots + A_3A_2^{m-2} + A_2^{m-1})\\ -(A_2^{m-1} + A_2^{m-2}A_1 + \ldots\ldots + A_2A_1^{m-2} + A_1^{m-1})\end{array}\right\}$$

$$=1.2(A_2 - A_1)^2\left\{\int.P_{m-2}.A_3A_1 + A_2\int.P_{m-3}.A_3A_1 + A_2^2\int.P_{m-4}.A_3A_1 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + A_2^{m-3}\int.P_1.A_3A_1 + A_2^{m-2}\right\};$$

ou enfin

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2\int.P_{m-2}.A_3\ldots A_1.$$

Savoir : un terme de différences secondes des puissances $m.^{emes}$ des termes d'une progression arithmétique est le double du produit du quarré de la différence constante des termes de la progression par la somme des produits de $m-2$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences secondes des puissances.

§. 4.

Sur les différences troisièmes.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les $m.^{emes}$ puissances et les différences troisièmes de ces puissances. On a, par ce qui précède,

A_3^m

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \int .P_{m-2} \,.\, A_3 \ldots A_1 ,$$

$$A_4^m - 2A_3^m + A_2^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \int .P_{m-2} \,.\, A_4 \ldots A_2 ;$$

d'où

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \left\{ \int .P_{m-2} \,.\, A_4 \ldots A_2 - \int .P_{m-2} \,.\, A_3 \ldots A_1 \right\}$$

$$= 1.2(A_2 - A_1)^2 \left\{ \begin{array}{l} (A_4^{m-2} - A_1^{m-2}) \\ +(A_4^{m-3} - A_1^{m-3}) \int .P_1 A_3 A_2 \\ +(A_4^{m-4} - A_1^{m-4}) \int .P_2 A_3 A_2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(A_4^3 - A_1^3) \int .P_{m-5} \,.\, A_3 A_2 \\ +(A_4^2 - A_1^2) \int .P_{m-4} \,.\, A_3 A_2 \\ +(A_4 - A_1) \int .P_{m-3} \,.\, A_3 A_2 ; \end{array} \right.$$

ou enfin

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.3.(A_2 - A_1)^3 \int .P_{m-3} \,.\, A_4 \ldots\ldots A_1 \quad ;$$

savoir : un terme des différences troisièmes des puissances m.emes des termes d'une progression arithmétique est le produit continuel des trois premiers nombres naturels, du cube de la différence constante des termes de la progression et de la somme des produits de $m - 3$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences troisièmes des puissances.

§. 5.

En procédant continuellement de cette manière, on parvient à déterminer les différences quatrièmes d'après la connaissance des différences troisièmes, puis les différences cinquièmes, et ainsi de suite.

En général; soient A_1, A_2, A_3, ... A_n, A_{n+1}; $n+1$ termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les m.^{emes} puissances, et les $(n+1)^{emes}$ différences de ces puissances. Qu'on se soit assuré qu'on a l'équation

$$A_n^m - \frac{n}{1}A_{n-1}^m + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A_{n-2}^m - \ldots \pm \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}A_3^m \mp \frac{n}{1}A_2^m \pm A_1^m$$

$$= 1.2.3\ldots(n-1)(A_2 - A_1)^{n-1}\int.P_{m-n+1}.A_n \ldots A_1,$$

j'affirme qu'on a aussi l'équation

$$A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1}A_n^m + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_{n-1}^m - \ldots \mp \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_3^m \pm \frac{n+1}{1}A_2^m \mp A_1^m$$

$$= 1.2.3\ldots n(A_2 - A_1)^n\int.P_{m-n}.A_{n+1}\ldots A_1.$$

En effet, des deux équations supposées vraies pour les termes $A_{n+1}\ldots A_1$ et $A_n\ldots A_1$, on tire

$$A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1}A_n^m + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_{n-1}^m - \ldots \mp \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_3^m \pm \frac{n+1}{1}A_2^m \mp A_1^m$$

$$= 1.2.3\ldots(n-1)(A_2 - A_1)^{n-1}\left\{\int.P_{m-n+1}.A_{n+1}\,A_1 - \int.P_{m-n+1}.A_n\right\}$$

$$= 1.2.3\ldots n(A_2 - A_1)^n\int.P_{m-1}.A_{n+1}\ldots A_1.$$

On a donc le théorème général suivant :

Soit une progression arithmétique des termes de laquelle on prend les $m.^{emes}$ puissances et les différences $n.^{emes}$ de ces puissances. Un terme quelconque de ces différences est le produit continuel des nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à n; de la $n.^{eme}$ puissance de la différence constante des termes de la progression, et de la somme des produits de $m-n$ dimensions, faits avec les termes des puissances, desquels on prend les différences $n.^{emes}$.

En particulier, soit $m=n$; la somme des produits qui forme le troisième facteur est l'unité; et partant, les différences de l'ordre $m.^{eme}$ des puissances $m.^{emes}$ des termes d'une progression arithmétique sont une quantité constante: savoir, le produit continuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à m, et de la puissance $m.^{eme}$ de la différence constante des termes de la progression.