ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FERRIOT

Géométrie. De l'inscription du quarré au triangle, et de celle du cube au tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 180-182

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__180_0>

GÉOMÉTRIE.

De l'inscription du quarré au triangle, et de celle du cube au tétraèdre;

Par M. Ferriot, principal du collége de Baume.

I. Un quarré ayant quatre angles et un triangle ayant seulement trois côtes ; la première de ses figures ne saurait être inscrite à la seconde à moins que deux de ses sommets ne soient situés sur un même côté du triangle et que conséquemment un côté de la première figure se trouve appliqué sur un côté de la seconde.

Mais, d'autant que le côté du triangle avec lequel doit se confondre un côté du quarré à inscrire peut être choisi de trois manières différentes, on voit que le problème a, en général, trois solutions.

Entre les diverses méthodes que l'on peut indiquer pour inscrire un quarré à un triangle, la suivante paraît devoir mériter la préférence, tant à cause de sa simplicité que parce qu'elle peut être facilement étendue à l'inscription du cube au tétraèdre.

Soit ASB (fig. 5) le triangle proposé ; soit AB le côté de ce triangle sur lequel on veut que repose un côté du quarré à inscrire et soit A'B'D'E' ce quarré. Sur AB, comme côté, soit construit un autre quarré ABDE ; les triangles ASB et A'SB' étant semblables, les pentagones ASBDE et A'SB'D'E' doivent l'être aussi, d'où il est aisé de conclure que le point E' doit être sur la droite SE.

La construction se réduit donc à ce qui suit : A l'une quelconque A des extrémités de AB soit élevée à cette droite du côté opposé au triangle, une perpendiculaire AE égale à elle ; en menant SE, son intersection E' avec AB sera l'un des sommets du quarré cherché, et alors le problème pourra être considéré comme résolu.

II.

II. Un cube ayant huit sommets, et un tétraèdre ayant quatre faces seulement, mais qui, trois à trois, concourent en un meme point; il est impossible que les huit sommets d'un cube inscrit à un tetraèdre soient distribués deux à deux sur les quatre faces du tetraèdre. D'un autre côté, il est aisé de voir que trois des sommets d'un cube ne sauraient être sur une des faces d'un tétraèdre, dans lequel il est inscrit, sans qu'un quatrième sommet soit aussi sur la même face du tétraèdre, et qu'alors cette face n'en peut recevoir un plus grand nombre; et, comme alors les quatre sommets restants doivent être distribués sur trois faces seulement, l'une d'elles devra en contenir deux, et contiendra conséquemment une des arêtes du cube.

Lors donc qu'un cube est inscrit à un tétraèdre, l'une des faces du cube doit se confondre avec le plan de l'une des faces du tétraèdre, et la face opposée de ce cube doit être un quarré inscrit à la section faite au tétraèdre par le plan de cette face.

Or, la face du tétraèdre qui doit recevoir une des faces du cube peut être choisie de quatre manières différentes, et, dans chaque cas, celle des trois autres faces du tétraèdre qui doit contenir une des arêtes du cube, peut être choisie de trois manières; ainsi, on peut, en général, inscrire à un tétraèdre douze cubes différens.

Cela posé, qu'il soit question d'inscrire un cube au tétraèdre SABC (fig. 6), de telle manière que la face ABC du tétraèdre contienne une des faces du cube, et que la face ASC du tétraèdre contienne une des arêtes de ce cube.

Soit $D'E'F'G'H'I'K'L'$ le cube demandé, dont la face $H'I'K'L'$ soit sur la face ABC du tétraèdre, l'arête $D'G'$ sur la face ASC de ce tétraèdre, et enfin les sommets E', F', sur les faces SBA, SBC, respectivement. Soit joint le point S aux points D', E', F', G', par des droites se terminant en D, E, F, G, au plan de la face ABC; il est aisé de voir que ces points seront les sommets d'un quarré DEFG inscrit à cette face. Sur ce quarré, et du côté opposé au tétraèdre soit construit le cube DEFGHIKL; à cause de la similitude des pyramides quadrangulaires SDEFG et $SD'E'F'G'$, ces pyramides augmentées des deux cubes formeront deux polyèdres semblables; d'où il est aisé de conclure que, si l'on mène SI, cette droite contiendra le point I'.

La construction se réduit donc à ce qui suit: soit déterminé (I) le point D de AC sur lequel doit être situé l'un des sommets du quarré inscrit au triangle ABC; soit menée DE, perpendiculaire à AC et se terminant en E à AB; soit ensuite élevée au plan de ABC, par le même point D, une perpendiculaire DI égale à DE; enfin soit menée SI coupant en I' la base ABC; ce point I' sera l'un des sommets du cube cherché; et, ce sommet étant ainsi déterminé, le problème pourra être regardé comme résolu.