PILATTE

# Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 2 (1811-1812), p. 157-160
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__157_1>

---

*Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume ;*

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Montucla, qui a considéré un cas particulier de ce problème, dans l'édition qu'il a donnée des récréations mathématiques d'*Ozanam*, le regarde si non comme impossible, du moins comme très-difficile à résoudre, par des considérations purement géométriques. Il paraît qu'en le proposant, dans les *Annales*, on n'a eu en vue que les polygones plans ; je vais le généraliser un peu, en étendant son énoncé à un polygone gauche.

*PROBLÈME. Soient divisés, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone donné* P, *plan ou gauche, de* m *côtés, en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de deux nombres donnés* p *et* q. *Si l'on joint les points de division consécutifs par des droites, ces droites formeront un nouveau polygone* P′, *plan ou gauche, aussi de* m *côtés. Opérant sur celui-ci comme sur le premier, on obtiendra un troisième polygone* P″ *duquel on pourra déduire, par un semblable procédé, un quatrième polygone* P‴ ; *et ainsi de suite.*

*Les côtés de ces polygones décroissant continuellement, si l'on poursuit l'opération à l'infini, le dernier polygone se réduira nécessairement à un point. On demande de déterminer la situation de ce point, relativement au polygone primitif* P ?

*Solution.* Soit rapporté le polygone proposé à trois plans rectangulaires quelconques ; soient $S_1$, $S_2$, $S_3$, ..... $S_{m-2}$, $S_{m-1}$, $S_m$, les sommets consécutifs du polygone $P$ ; soient $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$, .... $S'_{m-2}$, $S'_{m-1}$, $S'_m$, ceux du polygone $P'$, et ainsi de suite. Supposons de plus que $S'_1$ soit entre $S_1$ et $S_2$ ; que $S'_2$ soit entre $S_2$ et $S_3$ ; et ainsi de suite ; et soient les coordonnées de ces différens sommets ainsi qu'il suit :

$$\text{pour } S_1\begin{cases}a_1\,,\\ b_1\,,\\ c_1\,;\end{cases}\text{ pour } S_2\begin{cases}a_2\,,\\ b_2\,,\\ c_2\,;\end{cases}\text{....pour } S_{m-1}\begin{cases}a_{m-1}\,,\\ b_{m-1}\,,\\ c_{m-1}\,;\end{cases}\text{ pour } S_m\begin{cases}a_m\,,\\ b_m\,,\\ c_m\,;\end{cases}$$

$$\text{pour } S'_1\begin{cases}a'_1\,,\\ b'_1\,,\\ c'_1\,;\end{cases}\text{ pour } S'_2\begin{cases}a'_2\,,\\ b'_2\,,\\ c'_2\,;\end{cases}\text{ .... pour } S'_{m-1}\begin{cases}a'_{m-1}\,,\\ b'_{m-1}\,,\\ c'_{m-1}\,;\end{cases}\text{ pour } S'_m\begin{cases}a'_m\,,\\ b'_m\,,\\ c'_m\,.\end{cases}$$

...................................

on trouvera facilement, d'après cela,

$$c'_1=\frac{qc_1+pc_2}{p+q},$$

$$c'_2=\frac{qc_2+pc_3}{p+q},$$

$$c'_3=\frac{qc_3+pc_4}{p+q},$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$c'_{m-2}=\frac{qc_{m-2}+pc_{m-1}}{p+q},$$

$$c'_{m-1}=\frac{qc_{m-1}+pc_m}{p+q},$$

$$c'_m=\frac{qc_m+pc_1}{p+q};$$

prenant alors la somme de ces valeurs, il viendra, en réduisant et exécutant la division,

$$c'_1+c'_2+c'_3+\ldots+c'_{m-2}+c'_{m-1}+c'_m=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{m-2}+c_{m-1}+c_m.$$

Ainsi la somme des distances des sommets du polygone $P'$ au plan des $xy$, c'est-à-dire à un plan quelconque, est égale à la somme des distances des sommets du polygone $P$ au même plan.

La vérité de cette proposition peut au surplus être aperçue sans calcul. Que l'on conçoive en effet des masses égales entre elles, et représentées par $p+q$, appliquées aux sommets $S_1$, $S_2$, $S_3$, .... du polygone $P$, on pourra composer en une seule la portion $p$ de la masse appliquée à chacun de ces sommets avec la portion $q$ de la masse appliquée au sommet suivant; en procédant ainsi, on aura substitué aux $m$ masses $p+q$, appliquées en $S_1$, $S_2$, $S_3$, ...., $m$ nouvelles masses, aussi égales à $p+q$, lesquelles se trouveront précisément appliquées aux points $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$, .... Ainsi la somme des momens de ces derniers points par rapport à un plan quelconque sera égale à la somme des momens des premiers par rapport au même plan. Otant donc de ces sommes égales le facteur commun $p+q$, on en conclura que la somme des distances de ces derniers points à un plan quelconque est égale à la somme des distances des premiers au même plan. C'est à peu près de cette manière que *Montucla* traite le cas particulier qu'il considère. (*)

Il suit de là généralement que la somme des distances des sommets de chacun des polygones $P'$, $P''$, $P'''$, ..... à un même plan quelconque est une quantité constante et égale à la somme des distances des sommets du polygone $P$ au même plan ; il en sera donc de même pour le dernier polygone; et comme ce dernier polygone se réduira à un seul point, la somme des distances de ses sommets à un plan quelconque ne sera autre chose que $m$ fois sa distance à ce plan.

Ainsi la distance du point cherché à un plan quelconque n'est autre chose que la $m$.eme partie de la somme des distances des sommets du polygone donné au même plan ; ou en d'autres termes :

*Le point demandé n'est autre que le centre de gravité ou le centre des moyennes distances des sommets du polygone proposé.*

Il est aisé de voir que cette proposition aurait également lieu si les nombres $p$ et $q$, au lieu d'être constants, variaient d'une manière quelconque d'un polygone à l'autre.

---

(*) Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs des *Annales* ont reçu de M. Fauquier, élève de l'école polytechnique, une solution fondée sur cette considération.

( *Note des éditeurs.* )