
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Autre solution du même problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 155-157

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__155_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Autre solution du même problème ;

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



LEMME. Soient trois points (non en ligne droite) donnés de position dans l'espace , et soit un quatrième point (hors de leur plan) donné de position ; on demande de mener , par ce quatrième point , un plan sur lequel abaissant des perpendiculaires des trois premiers , les rapports de ces perpendiculaires soient égaux à des rapports donnés ?

Ce lemme donne lieu à différens cas , suivant que les trois premiers points donnés sont supposés devoir être situés d'un même côté du plan cherché ou de différens côtés de ce plan. Pour fixer les idées , je supposerai d'abord que les trois premiers points doivent être situés d'un même côté du plan cherché.

Pour abrégér, que les trois premiers points soient désignés par A, A', A'' , et que le quatrième point donné soit désigné par B .

Que les rapports donnés soient des rapports d'inégalité, et que la perpendiculaire abaissée du point A'' doive être plus grande que chacune des autres.

Soient prolongées les droites $A''A, A''A'$ en D, D' , de manière que les rapports de $A''D$ à AD et de $A''D'$ à $A'D'$ soient respectivement égaux aux rapports donnés. Le plan mené par les points B, D, D' , sera le plan cherché.

Remarque I. Pour que le problème (s'il est possible) soit déterminé, les points A, A', A'' , ne doivent pas être situés sur une même droite, et le point B , s'il est situé sur quelque'une des droites $A''A, A''A'$, ne doit pas coïncider avec l'un des points D, D' .

Remarque II. Lorsque l'un des rapports donnés, tel que celui des perpendiculaires abaissées des points A'' et A' est un rapport d'égalité, le plan cherché est parallèle à la droite $A''A'$; et partant il passe par la droite menée par B parallèlement à $A''A'$.

Si les rapports donnés sont chacun des rapports d'égalité, le plan cherché est parallèle au plan $AA'A''$.

Remarque III. Que les points donnés doivent être situés de différens côtés du plan cherché; que, par exemple, le point A'' doive être situé d'un côté de ce plan, et les points A, A' du côté opposé.

Alors les points D, D' au lieu d'être sur les prolongemens des droites $A''A, A''A'$, devront être sur ces droites elles-mêmes.

Remarque IV. Cette conception géométrique de la solution du lemme proposé me paraît plus lumineuse que le développement algébrique (appelé analitique).

Que le point donné B soit pris pour l'origine des coordonnées rectangulaires ;

que les coordonnées des points $\left\{ \begin{array}{l} A \\ A' \\ A'' \end{array} \right\}$ soient respectivement $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \\ a', b', c' \\ a'', b'', c'' \end{array} \right.$;

que l'équation du plan cherché soit

$x \cos.$

$$x \operatorname{Cos}.\alpha + y \operatorname{Cos}.\beta + z \operatorname{Cos}.\gamma = 0.$$

Les perpendiculaires abaissées des points donnés sur ce plan seront

$$\text{pour } A, \quad a \operatorname{Cos}.\alpha + b \operatorname{Cos}.\beta + c \operatorname{Cos}.\gamma ;$$

$$\text{pour } A', \quad a' \operatorname{Cos}.\alpha + b' \operatorname{Cos}.\beta + c' \operatorname{Cos}.\gamma ;$$

$$\text{pour } A'', \quad a'' \operatorname{Cos}.\alpha + b'' \operatorname{Cos}.\beta + c'' \operatorname{Cos}.\gamma .$$

Que les rapports de ces perpendiculaires soient respectivement ceux des quantités données m, m', m'' ; on obtiendra, entre les cosinus des angles α, β, γ , deux équations desquelles on déduira les rapports de ces cosinus; puis on déterminera chacun d'eux au moyen de l'équation de condition

$$\operatorname{Cos}.\alpha^2 + \operatorname{Cos}.\beta^2 + \operatorname{Cos}.\gamma^2 = 1.$$

PROBLÈME. Soient trois plans (non parallèles deux à deux) donnés de position. Sur ces plans, soient trois figures données de grandeur. On demande la direction du plan sur lequel, ces trois figures étant projetées orthographiquement, les rapports de leurs projections soient donnés ?

Solution. Du point de section des plans donnés soient élevées à ces plans des perpendiculaires respectivement proportionnelles aux figures données de grandeur qui y sont tracées. Par ce même point soit mené (lemme) le plan dont les distances aux extrémités de ces perpendiculaires soient respectivement dans le rapport des projections des figures données. Ce plan (ainsi que tout plan qui lui sera parallèle) pourra être pris pour le plan demandé.
