ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 154-155

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__154_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.

PROBLÈME. *Trois figures planes étant données de grandeur seulement, sur trois plans, non parallèles deux à deux, donnés de position ; déterminer un quatrième plan sur lequel ces figures étant projetées orthogonalement, les aires de leurs projections soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

Solution. Représentons par A, B, C, les aires des trois figures données ; par a, b, c, les nombres proportionnels aux projections orthogonales de ces figures ; par α, β, γ, les angles dièdres que forment, deux à deux, les plans de ces figures ; enfin par x, y, z, les angles que forment ces plans avec le plan cherché.

Les plans des trois figures données et le plan cherché forment une pyramide triangulaire dont les angles dièdres sont α, β, γ, x, y, z ; or, d'après un théorème connu, on a

$$\begin{aligned}
0=1&-(\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^3\gamma+\mathrm{Cos.}^2x+\mathrm{Cos.}^2y+\mathrm{Cos.}^2z)\\
&+(\mathrm{Cos.}\alpha^2.\mathrm{Cos.}^2x+\mathrm{Cos.}^2\beta.\mathrm{Cos.}^2y+\mathrm{Cos.}^2\gamma.\mathrm{Cos.}^2z)\\
&-2(\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}x.\mathrm{Cos}\,y+\mathrm{Cos.}\alpha\,\mathrm{Cos.}y.\mathrm{Cos.}z+\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}z.\mathrm{Cos.}x+\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma)\\
&-2(\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}x.\mathrm{Cos.}y+\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}y.\mathrm{Cos.}z+\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}z.\mathrm{Cos.}x).
\end{aligned}$$

Mais, d'après un autre théorème connu, les projections orthogonales des figures A, B, C, sur le plan cherché sont représentées par $A.\text{Cos}.x$, $B.\text{Cos}.y$, $C.\text{Cos}.z$; et puisque ces projections doivent être porportionnelles aux nombres a, b, c, on aura

$$cA.\text{Cos}.x=aC.\text{Cos}.z\,, \qquad cB.\text{Cos}.y=b.C.\text{Cos}.z.$$

Or, si, dans l'équation ci-dessus, on substitue pour $\text{Cos}.x$ et $\text{Cos}.y$, les valeurs que donnent ces deux dernières, l'équation résultante n'étant que du second degré en $\text{Cos}.z$, l'angle z pourra être déterminé, et par suite les angles x et y.

Le problème est donc ramené à celui-ci : deux plans qui se coupent étant donnés de position, mener un troisième plan qui fasse avec ces deux-là des angles respectivement égaux à deux angles donnés.

Or, on a des méthodes graphiques et des méthodes de calcul pour résoudre ce dernier problème; on voit, en effet, qu'il est question de résoudre un triangle sphérique dans lequel les trois angles sont connus.