ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie analitique. Recherche de la position des axes principaux dans les surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 144-152
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__144_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de la position des axes principaux dans les surfaces du second ordre ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.

Les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, à un système de coordonnées obliques x',

y', z', ayant même origine que les premières sont, comme l'on sait

$$x=x'\mathrm{Cos.}\alpha+y'\mathrm{Cos.}\alpha'+z'\mathrm{Cos.}\alpha'' \;,$$
$$y=x'\mathrm{Cos.}\beta+y'\mathrm{Cos.}\beta'+z'\mathrm{Cos.}\beta'' \;,$$
$$z=x'\mathrm{Cos.}\gamma+y'\mathrm{Cos.}\gamma'+z'\mathrm{Cos.}\gamma'' \;.$$

Nous allons donner à ces formules une forme plus commode pour l'objet que nous avons en vue. Soient les équations des axes des x', y', z', ainsi qu'il suit

$$\text{axe des } x' \begin{cases} x=az\,, \\ y=bz\,; \end{cases} \quad \text{axe des } y' \begin{cases} x=a'z\,, \\ y=b'z\,; \end{cases} \quad \text{axe des } z' \begin{cases} x=a''z\,, \\ y=b''z\,; \end{cases}$$

et soient posées les équations

$$h=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\,, \quad h'=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}\,, \quad h''=\frac{1}{\sqrt{1+a''^2+b''^2}}\,;$$

nous aurons

$$\mathrm{Cos.}\alpha=ah\,, \quad \mathrm{Cos.}\alpha'=a'h'\,, \quad \mathrm{Cos.}\alpha''=a''h''\,,$$
$$\mathrm{Cos.}\beta=bh\,, \quad \mathrm{Cos.}\beta'=b'h'\,, \quad \mathrm{Cos.}\beta''=b''h''\,,$$
$$\mathrm{Cos.}\gamma=\;h\,; \quad \mathrm{Cos.}\gamma'=\;h'\,; \quad \mathrm{Cos.}\gamma''=\;h''\,;$$

et par conséquent

$$x=ahx'+a'h'y'+a''h''z' \;,$$
$$y=bhx'+b'h'y'+b''h''z' \;,$$
$$z=\;hx'+\;h'y'+\;h''z' \;.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation générale du second degré entre les trois variables x, y, z,

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0 \;,$$

on obtiendra une nouvelle équation du même degré que l'on pourra simplifier en disposant des quantités arbitraires a, a', a'', b, b', b'', qui déterminent la position des nouveaux axes. Faisant donc disparaître tous les rectangles des coordonnées, nous aurons les équations

(1) $(Aa'+B''b'+B')a+(B''a'+A'b'+B)b+(B'a'+Bb'+A'')=0$,

(2) $(Aa''+B''b''+B')a+(B''a''+A'b''+B)b+(B'a''+Bb''+A'')=0$,

(3) $(Aa''+B''b''+B')a'+(B''a''+A'b''+B)b'+(B'a''+Bb''+A'')=0$.

Cela posé, en éliminant a et b entre l'équation (2) et les équations $x=az$, $y=bz$ de l'axe des x', on tombera sur l'équation d'un plan tel que, l'axe des x' y étant situé d'une manière quelconque, l'équation de la surface sera délivrée du terme en $x'z'$. Pareillement, si entre l'équation (3) et les équations $x=a'z$, $y=b'z$ de l'axe des y' on élimine a' et b', on obtiendra l'équation d'un plan tel que, l'axe des y y étant situé d'une manière quelconque, l'équation de la surface sera délivrée du terme en $y'z'$. Mais, par la forme des équations (2) et (3) les équations des deux plans doivent être les mêmes; donc, en écrivant seulement les équations (2) et (3), on obtient pour un axe quelconque des z', un plan unique des $x'y'$ tel que la nouvelle équation de la surface du second ordre sera privée des rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme il est toujours facile, l'axe des z' étant constant, ainsi que le plan des $x'y'$, de donner aux axes des x' et des y' une direction telle que le troisième rectangle $x'y'$ disparaisse aussi; il s'ensuit que l'on peut, d'une infinité de manières, donner à l'équation générale des surfaces du second ordre, la forme plus simple

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+Qx'+Q'y'+Q''z'+D=0.$$

L'équation du plan des $x'y'$ sera

$$(Aa''+B''b''+B')x+(B''a''+A'b''+B)y+(B'a''+Bb''+A'')z=0.$$

Parmi tous les systèmes d'axes pour lesquels l'équation prend cette forme, il n'en est généralement qu'un seul qui soit rectangulaire. En effet, assujétissons l'axe arbitraire des z', dont les équations sont $x=a''z$, $y=b''z$, à être perpendiculaire au plan des $x'y'$ dont nous venons de trouver l'équation.

$$(Aa''+B''b''+B')x+(B''a''+A'b''+B)y+(B'a''+Bb''+A'')z=0\,;$$

nous obtiendrons les équations de condition

$$(4)\left\{\begin{aligned} Aa''+B''b''+B' &= (B'a''+Bb''+A'')a''\,, \\ B''a''+A'b''+B &= (B'a''+Bb''+A'')b''\,; \end{aligned}\right.$$

substituant dans la première la valeur de a'' donnée par la dernière, on parvient à l'équation du 3.ᵉ degré

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\{(A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''\}b''^3 \\ &+\{(A'-A)(A'-A'')B'-(A+A'-2A'')BB''+(2B''^2-B^2-B'^2)B'\}b''^2 \\ &+\{(A''-A)(A''-A')B''-(A+A''-2A')BB'+(2B'^2-B^2-B''^2)B''\}b'' \\ &+\{(A-A'')BB''+(B^2-B''^2)B'\}=0. \end{aligned}\right.$$

Or, on démontre, dans les élémens d'algèbre, que cette équation a toujours au moins une racine réelle, et que même, lorsque le coefficient de son premier terme s'évanouit, cette racine est alors infinie, ce qui n'implique point ici contradiction; car b'' exprime une tangente trigonométrique. Par conséquent il existe, pour toutes les surfaces du second ordre, un axe des z', perpendiculaire à un plan des $x'y'$, de manière que l'équation générale de ces surfaces ne renferme plus les rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme on peut toujours chasser le rectangle $x'y'$ qui reste encore dans l'équation, on en conclut que, non-seulement on trouve un axe des z', perpendiculaire au plan des $x'y'$, qui prive la nouvelle équation des rectangles $x'z'$, $y'z'$, mais encore qu'il existe un axe des x', perpendiculaire au plan des $y'z'$, et un axe des y', perpendiculaire au plan des $x'z'$, jouissant des mêmes propriétés; donc si, au moyen de l'équation (3) et des équations de l'axe des z', on détermine le plan des $x'y'$, on trouvera que son équation est

$$(Aa'+B''b'+B')x+(B''a'+A'b'+B)y+(B'a'+Bb'+A'')z=0.$$

Écrivant que l'axe des y', dont les équations sont $x=a'z$, $y=b'z$, est perpendiculaire à ce plan, on parviendra aux mêmes équations

(4) ; donc l'équation (5) détermine b' en même temps que b'' ; on prouvera de même que sa troisième racine doit être b.

On conclut de tout ce qui précède,

1.° Qu'il n'existe, généralement parlant, pour une origine donnée, qu'un système d'axes rectangulaires tel que les surfaces du second ordre, rapportées à ce système, soient privées, dans leur équation, des rectangles xy, xz, yz.

2.° Que les équations des nouveaux axes étant

$$\left\{\begin{array}{l} x=az\,, \\ y=bz\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=a'z\,, \\ y=b'z\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y=a''z\,, \\ x=b''z\,; \end{array}\right.$$

l'équation (5) a ses trois racines réelles qui sont b, b', b''; la seconde des équations (4) donnant les valeurs correspondantes de a, a', a''.

3.° Que l'équation

$$t^3-(A+A'+A'')t^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)t+(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-2BB'B''-AA'A'')=0\,,$$

a ses trois racines réelles et donne les valeurs de P, P', P'' dans l'équation transformée

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+Qx'+Q'y'+Q''z'+D=0 \text{ (*)} ;$$

car le procédé que nous avons suivi, dans la recherche de l'équation en t, n'oblige point de faire d'abord disparaître les premières puissances de x, y, z.

Nous observerons en passant que, pour les surfaces du second ordre qui n'ont pas de centre, l'équation en t a nécessairement une ou deux racines qui s'évanouissent.

L'équation (5) pouvant avoir une racine infinie et pouvant aussi être identique, il est nécessaire d'examiner ces différens cas.

D'abord, le premier terme seulement de l'équation (5) s'évanouissant, on a

$$(A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''=0.$$

(*) *Voy.* notre précédent mémoire, page 33 de ce volume.

Dans

Dans ce cas, une des racines b'' est infinie, a'' est aussi infini; ainsi les équations $x=a''z$, $y=b''z$ de l'axe des z' deviennent $z=0$; cet axe est donc situé sur le plan des xy. Pour le déterminer, on cherchera le rapport $\frac{b''}{a''}$: or la dernière des équations (4), dans la supposition de a'' et b'' infinis se transforme en celle-ci

$$(B'a''+Bb'')=0\ ,\quad \text{d'où}\quad \frac{b''}{a''}=-\frac{B'}{B}\ ;$$

ainsi, les équations de l'axe cherché sont

$$z=0\ ,\qquad By+B'x=0\ ;$$

à l'égard des deux autres axes, on les obtient en résolvant une équation du second degré.

Supposons, en second lieu, que les deux premiers termes de l'équation (5) s'évanouissent; alors les deux autres termes disparaissent d'eux-mêmes; ainsi les deux équations

$$(6)\ \left\{\begin{aligned}&(A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''=0\ ,\\&(A-A'')BB''+(B^2-B''^2)B'=0\ ,\end{aligned}\right.$$

expriment que l'équation (5) est identique. Il existe donc, dans ce cas, pour une même origine donnée, une infinité de systèmes d'axes rectangulaires pour lesquels l'équation générale des surfaces du second degré ne renferme aucun des rectangles des coordonnées. Pour étudier ces différens systèmes, nous remonterons aux équations (4), mises sous cette forme

$$B'a''^2+B\,a''b''+(A''-A)a''-B''b''-B'=0\ ,$$
$$B\,b''^2+B'a''b''+(A''-A')b''-B''a''-B=0\ ;$$

retranchant du produit de la première des équations (6) par B'' le produit de la seconde par B', en divisant le résultat par B, il viendra

$$(A''-A')B'B''+(B''^2-B'^2)B=0\ ,$$

éliminant $A''-A$ et $A''-A'$ des deux équations ci-dessus, au moyen de cette dernière et de la dernière des équations (6), il viendra

$$(B\,a''-B'')(B'B''a''+BB''b''+BB')=0\ ,$$
$$(B'b''-B'')(B'B''a''+BB''b''+BB')=0\ .$$

Ces deux équations sont satisfaites en posant

$$Ba''-B''=0\ ,$$
$$B'b''-B''=0\ ;$$

ce qui détermine un axe dont les équations sont

$$B\,x-B''z=0\ ,$$
$$B'y-B''z=0\ ;$$

ensuite on a l'équation commune aux deux autres axes

$$B'B''a''+BB''b''+BB'=0\ ;$$

éliminant a'', b'', entre cette équation et les équations $x=a''z$, $y=b''z$ de l'axe des z', on obtient le résultat

$$B'B''x+B''By+BB'z=0\ ;$$

équation d'un plan perpendiculaire à l'axe déjà déterminé, et qui contient les deux autres axes rectangulaires. La rencontre de ce plan avec la surface du second ordre donne une courbe du second degré qui aura par conséquent une infinité de systèmes d'axes rectangulaires, puisque son équation sera dépourvue du rectangle des coordonnées; or, on sait que le cercle est la seule courbe du second degré qui jouisse de cette propriété ; donc la section faite par ce plan est un cercle. Si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre de ce cercle, l'équation de la surface rapportée au nouveau système prendra la forme

$$x^2+y^2+kz^2+k'z+k''=0\ ,$$

équation qui appartient à une surface de révolution.

On conclut de là que l'équation

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0\ ,$$

lorsque les équations (6) sont satisfaites, représente toujours une surface de révolution du second ordre; et que, si l'on veut chasser de cette équation les rectangles xy, yz, zx, en passant à un nouveau système rectangulaire, on obtiendra une infinité de ces systèmes, l'un des nouveaux étant fixe.

Il nous reste encore à discuter ce qui arrive dans les surfaces du second ordre, lorsque un, deux ou trois rectangles des coordonnées manquent dans leur équation.

D'abord, pour qu'il y ait une infinité de systèmes de coordonnées rectangles, il faut toujours que les équations (6) aient lieu. Soit donc $B'=0$, nous aurons $B=0$; et comme alors le plan dont l'équation est

$$B'B''x+B''By+BB'z=0\ ,$$

n'existe plus, puisque son équation se réduit à $0=0$, nous reprendrons l'équation des surfaces qui aura la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0.$$

Faisant disparaître le rectangle xy, en passant à un nouveau système rectangulaire dans le plan des xy, nous obtiendrons l'équation

$$Px^2+P'y^2+A''z^2+gx+g'y+C''z+D=0\ ,$$

dans laquelle P et P' seront les racines de l'équation

$$t^2-(A+A')t+(AA'-B''^2)=0. \quad (*).$$

Maintenant il s'agit de produire tous les systèmes rectangulaires de manière que l'équation des surfaces conserve toujours cette forme

$$Px^2+P'y^2+A''z^2+gx+g'y+C''z+D=0.$$

Substituant à x, y, z, les formules

$$\begin{aligned} x&=ahx'+a'h'y'+a''h''z'\ ,\\ y&=bhx'+b'h'y'+b''h''z'\ ,\\ z&=\ hx'+\ h'y'+\ h''z'\ ,\end{aligned}$$

et faisant disparaître tous les rectangles qui s'introduisent, on trouvera des équations qui servent à déterminer le plan de deux axes,

$$Pa''x+P'b''y+A''z=0\ ;$$

écrivant que la droite dont les équations sont $x=a''z$, $y=b''z$, est perpendiculaire à ce plan, on aura les équations

$$\begin{aligned}(P-A'')a''&=0\ ,\\ (P'-A'')b''&=0\ .\end{aligned}$$

(*) *Voy.* le mémoire déjà cité.

1.° Supposons que P, P', A'' soient différens ; il s'ensuivra que

$$a''=0\ ,\qquad b''=0\ ;$$

conséquemment on retombera sur le système d'axes rectangulaires d'où l'on était parti.

2.° Supposons $P=P'$, et A'' de grandeur différente ; on aura encore

$$a''=0\ ,\qquad b''=0\ ;$$

ce qui redonne l'axe primitif z ; mais les axes des x et des y pouvant être pris rectangulaires d'une infinité de manières différentes, la surface sera alors de révolution autour de l'axe des z.

Si l'on supposait $P=A''$, et P' de grandeur différente, on démontrerait également qu'il existe une infinité de systèmes rectangulaires et que la surface du second ordre est de révolution autour de l'axe qui est fixe. Comme P est racine de l'équation

$$t^2-(A+A')t+(AA'-B''^2)=0\ ,$$

l'hypothèse de $P=A''$ donnera

$$A''^2-(A+A')A''+AA'-B''^2=0\ ,$$

ou

$$(A''-A)(A''-A')-B''^2=0.$$

3.° Soit enfin $P=P'=A''$; alors l'équation de la surface devient celle d'une sphère, et elle a évidemment une infinité de systèmes d'axes rectangulaires principaux.