ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FERRIOT

Géométrie. Analogies entre le triangle et le tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 133-144
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__133_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE.

Analogies entre le triangle et le tétraèdre ;

Par M. Ferriot, principal du collége de Baume.

On trouvera dans ce mémoire quelques propositions déjà connues, mais que j'ai cru néanmoins devoir y comprendre, afin d'en former un tout plus complet.

§. I.

1. *Avec trois droites données, telles que chacune soit moindre que la somme des deux autres, on peut toujours former un triangle, et on n'en peut former qu'un seul.*

2. *Avec six droites données et inégales, telles que chacune d'elles soit moindre que la somme de deux quelconques des autres, on peut toujours former* 60 *tétraèdres différens, dont* 30 *sont symétriques par rapport aux* 30 *autres, et on n'en saurait former un plus grand nombre.*

Soient en effet a, b, c, d, e, f, les six droites données, on pourra choisir trois d'entre elles de 20 manières différentes pour former la base du tétraèdre ; et, le choix de ces trois étant fait, il y aura encore six manières d'ajuster d'un côté de cette base les trois arêtes restantes, ce qui fera en tout 120 tétraèdres, et on en obtiendra 120 autres symétriques à ceux-là, en ajustant les mêmes trois arêtes restantes de l'autre côté de la face prise pour base ; mais il est évident qu'en procédant ainsi, les tétraèdres ne différeront, quatre à quatre, que par la face sur laquelle ils se trouveront posés : donc, en effet, le nombre des tétraèdres essentiellement différens se réduira à 60 seulement, dont 30 seront symétriques par rapport aux 30 autres.

Remarque I. La condition que l'une quelconque des six droites données soit moindre que la somme de deux prises d'une manière quelconque parmi les cinq autres, équivaut à 60 inégalités lesquelles doivent toutes avoir lieu pour que les 60 tétraèdres soient possibles. Si donc quelques-unes de ces inégalités n'étaient pas satisfaites, le nombre des tétraèdres possibles s'en trouverait d'autant diminué. Il serait plus long que difficile de déterminer à combien il se réduirait dans chaque cas.

Remarque II. Si plusieurs des droites données étaient égales entre elles; quand bien même toutes les conditions d'inégalité se trouveraient satisfaites, il pourrait y avoir diverses séries de tétraèdres égaux et superposables, en sorte que le nombre des tétraèdres différens tomberait alors au-dessous de 60. Il serait encore facile ici de déterminer à combien leur nombre se réduirait dans chaque cas. En particulier si les six droites données étaient toutes égales, auquel cas les 60 conditions d'inégalité se trouveraient satisfaites d'elles-mêmes, tous les tétraèdres se réduiraient à un seul qui serait le tétraèdre régulier.

Remarque III. Enfin, il pourrait arriver à la fois que les droites données ne satisfissent pas aux 60 conditions d'inégalité et qu'en outre plusieurs de ces droites fussent égales entre elles; on aurait alors deux causes qui conspireraient à la fois à réduire le nombre des tétraèdres possibles et réellement différens.

§. 2.

1. *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent toutes trois en un même point qui est le centre du cercle circonscrit.*

2. *Les plans perpendiculaires sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre, se coupent tous six en un même point qui est le centre de la sphère circonscrite.*

Ou autrement;

Les perpendiculaires élevées aux faces d'un tétraèdre par les centres des cercles circonscrits à ces faces, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de la sphère circonscrite.

Ces propositions deviennent évidentes si l'on considère que les arêtes d'un tétraèdre sont des cordes de la sphère qui lui est circonscrite, que les cercles circonscrits à ses faces, sont des cercles de cette même sphère, et que les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes d'une sphère ainsi que les droites menées par les centres de ses cercles perpendiculairement à leur plan, passent nécessairement par le centre de cette sphère.

§. 3.

1. *Les droites qui partagent les angles d'un triangle en deux parties égales, se coupent toutes trois en un même point qui est le centre du cercle inscrit.*

2. *Les plans qui divisent les angles dièdres d'un tétraèdre en deux parties égales, se coupent tous six en un même point qui est le centre de la sphère inscrite.*

Ou autrement,

Les droites qui, partant des sommets des angles trièdres d'un tétraèdre, font des angles égaux avec les faces de ces angles trièdres, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de la sphère inscrite.

En effet, 1.° les deux faces de l'un quelconque des angles dièdres d'un tétraèdre sont des plans tangens à la sphère inscrite, et il est évident que le plan qui divise en deux parties égales l'angle formé par ces deux-là, doit passer par le centre de la sphère.

2.° Soit un angle trièdre circonscrit à une sphère ; le cône droit inscrit à cet angle trièdre sera comme lui circonscrit à la sphère ; or, il est facile de voir que l'axe de ce cône, lequel ne sera autre chose qu'une droite qui, partant du sommet de l'angle trièdre, fera des angles égaux avec ses faces, passera par le centre de la sphère (*).

(*) Il existe toujours quatre cercles tangens à la fois aux trois côtés d'un même

§. 4.

1. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, se coupent toutes trois en un même point qui est le centre de gravité ou le centre des moyennes distances des trois sommets de ce triangle.*

---

triangle, considérés comme des droites indéfinies; l'un de ces cercles est intérieur au triangle et touche, à proprement parler, ses trois côtés; les trois autres lui sont extérieurs, et chacun d'eux touche un côté et les prolongemens des deux autres au delà du premier.

Si, pour chacune des droites qui par leur intersection forment un triangle, on regarde comme côté positif celui des deux côtés de cette droite qui regarde l'intérieur du triangle, et comme négatif le côté opposé, on pourra dire que, des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle, un touche ces trois côtés positivement, tandis que chacun des trois autres touche seulement deux côtés positivement et le troisième négativement.

Huit sphères différentes peuvent, en général, toucher à la fois les quatre faces d'un même tétraèdre, considérées comme des places indéfinies; et ces huit sphères, considérées relativement à leur situation par rapport au tétraèdre, peuvent être distribuées dans les trois classes que voici : 1.° une *sphère intérieure* qui est proprement la sphère inscrite; 2.° quatre *sphères sur les faces* dont chacune touche une face extérieurement et touche les prolongemens des trois autres au delà de cette première; 3.° enfin trois *sphères sur les arêtes*, touchant les prolongemens des quatre faces au delà de l'une des arêtes; ces dernières répondent toujours aux trois arêtes d'un même angle trièdre ou aux trois arêtes d'une même face.

Si, pour chacun des plans qui par leur intersection forment un tétraèdre, on regarde, comme côté positif, celui des deux côtés de ce plan qui regarde l'intérieur du tétraèdre, et comme négatif le côté opposé, on pourra dire que, des huit sphères qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre, celle qui est inscrite touche ces quatre faces positivement; que les sphères sur les faces touchent seulement trois faces positivement et la quatrième négativement; qu'enfin celles qui répondent aux arêtes touchent deux faces positivement et les deux autres négativement.

Si, en particulier, le tétraèdre est régulier, les sphères qui répondent aux arêtes ont leur centre à une distance infinie et leur rayon infini; de plus chacune d'elles peut être indifféremment considérée comme répondant à une arête ou à son opposée; en sorte qu'on peut dire également, ou que les faces d'un tel tétraèdre ne peuvent être touchées que par cinq sphères seulement, ou qu'elles peuvent être touchées par onze sphères dont six sont infinies. (*Note des éditeurs.*)

2. *Les droites qui joignent chaque sommet d'un tètraèdre au centre commun de gravité ou des moyennes distances de ses trois autres sommets, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de gravité ou des moyennes distances des quatre sommets de ce tétraèdre.*

On peut se convaincre facilement, comme il suit, de la vérité de ces deux propositions : 1.° si l'on joint les milieux des côtés du triangle donné par des droites, on formera un nouveau triangle inscrit au premier et dans lequel les droites, joignant les sommets aux milieux des côtés opposés, seront encore les mêmes que dans le premier; en opérant d'une manière semblable sur ce nouveau triangle et poursuivant ainsi à l'infini, on formera une série de triangles continuellement décroissans, dont le dernier se réduira à un point unique qui, contenant toujours les trois droites dont il s'agit, sera conséquemment leur commune section.

2.° Pareillement, en considérant les centres des moyennes distances des aires des faces du tétraèdre donné comme les sommets d'un nouveau tétraèdre inscrit à celui-là, il est facile de voir que les droites qui, dans ce dernier, joindront les sommets aux centres des moyennes distances des aires des faces opposées, seront les mêmes que dans le premier; opérant donc de la même manière sur ce nouveau tétraèdre et poursuivant ainsi à l'infini, on formera une série de tétraèdres continuellement décroissans, dont le dernier se réduira à un point unique qui, contenant toujours les quatre droites dont il sagit, sera conséquemment leur commune section.

Corollaire. Les triangles et tétraèdres dont il vient d'être question étant tous semblables et ayant leurs côtés et faces homologues parallèles, on peut établir les propositions suivantes :

1.° *Si par les sommets d'un triangle donné on mène des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles formeront un nouveau triangle tel que les sommets du premier se trouveront situés aux milieux de ses côtés.*

2.° *Si par les sommets d'un tétraèdre donné on mène des plans parallèles aux faces opposées, ces plans formeront un nouveau* *tétraèdre tel que les sommets du premier se trouveront situés aux centres des moyennes distances de ses faces.*

Remarque I. Les triangles inscrits les uns aux autres dont il a été question ci-dessus étant tels que les côtés de chacun sont moitiés de leurs homologues dans celui qui le précède immédiatement; si l'on prend pour unité le contour du plus grand, la somme des contours des autres sera

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots=1.$$

Et, si l'on prend pour unité l'aire du plus grand, la somme des aires des autres sera

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{3}.$$

Remarque II. Les tétraèdres inscrits les uns aux autres dont il a été question ci-dessus, étant tels que les arêtes de chacun sont le tiers de leurs homologues dans celui qui le précède immédiatement; si l'on prend pour unité la surface du plus grand, la somme des surfaces des autres sera

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{8}.$$

Et, si l'on prend pour unité le volume du plus grand, la somme des volumes des autres sera

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{27^2}+\frac{1}{27^3}+\frac{1}{27^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{26}.$$

§. 5.

1. *L'un quelconque des côtés d'un triangle est égal à la somme des produits des deux autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur celui-là.*

2. *L'une quelconque des faces d'un tétraèdre est égale à la somme des produits des trois autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur celle-là.*

Soient c, c', c'', les trois côtés d'un triangle ; le côté c'', par exemple, n'est autre chose que la somme des projections des côtés c, c', sur sa direction (le mot somme étant pris ici comme en algèbre); ainsi on doit avoir

$$c''=c\,\text{Cos.}(cc'')+c'\,\text{Cos.}(c'c'').$$

Soient t, t', t'', t''', les quatre faces d'un tétraèdre ; la face t''', par exemple, n'est autre chose que la somme des projections des faces t, t', t'', sur son plan (le mot somme étant toujours pris dans le même sens) ; ainsi on doit avoir

$$t'''=t\,\text{Cos.}(tt''')+t'\,\text{Cos.}(t't''')+t''\,\text{Cos.}(t''t''').$$

§. 6.

1. *Le quarré de l'un des côtés d'un triangle égale la somme des quarrés des deux autres moins le double du produit de ces mêmes côtés et du cosinus de leur inclinaison l'un à l'autre.*

2. *Le quarré de l'aire de l'une des faces d'un tétraèdre égale la somme des quarrés des trois autres moins les doubles des produits de ces mêmes faces multipliées deux à deux et par les cosinus de leurs inclinaisons les unes aux autres.*

En effet 1.° on a, par ce qui précède,

$$c\ =c'\,\text{Cos.}(c\,c')+c''\,\text{Cos.}(c\,c'')\ ,$$
$$c'=c''\,\text{Cos.}(c'c'')+c\ \text{Cos.}(c\,c')\ ,$$
$$c''=c\ \text{Cos.}(c\,c'')+c'\,\text{Cos.}(c'c'')\ ;$$

multipliant respectivement ces équations par leur premier membre, et retranchant ensuite la dernière de la somme des deux premières, il viendra, en réduisant et transposant,

$$c''^2=c^2+c'^2-2cc'\,\text{Cos.}(cc').$$

2.° On a aussi, par ce qui précède,

$$t\ =t'\,\text{Cos.}(t\,t')+t''\,\text{Cos.}(t\,t'')+t'''\,\text{Cos.}(tt''')\ ,$$
$$t'=t''\,\text{Cos.}(t't'')+t'''\,\text{Cos.}(t't''')+t\ \text{Cos.}(tt')\ ,$$

$$t'' = t'''\text{Cos.}(t''t''') + t\,\text{Cos.}(t\,t'') + t'\,\text{Cos.}(t'\,t'')\ ,$$
$$t''' = t\ \ \text{Cos.}(t\,t''') + t'\text{Cos.}(t't''') + t''\text{Cos.}(t''t''')\ ,$$

multipliant respectivement ces équations par leur premier membre, et retranchant ensuite la dernière de la somme des trois premières, il viendra, en réduisant et transposant,

$$t'''^2 = t^2 + t'^2 + t''^2 - 2tt'\text{Cos.}(tt') - 2tt''\text{Cos.}(tt'') - 2t't''\text{Cos.}(t't'').$$

Corollaire. Il suit de là 1.° que, *dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés*; 2.° que, *dans un tétraèdre rectangle, le quarré de l'aire de la face hypothénusale est égal à la somme des quarrés des aires des trois autres faces.*

§. 7.

1. *Dans tout triangle, la somme des trois angles est constante et égale à deux angles droits.*

2. *Dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont perpendiculaires, la somme des six angles dièdres augmentée de la somme des douze inclinaisons des six arêtes sur les quatre faces est constante et égale à douze angles droits.*

Soient A, B deux arêtes opposées du tétraèdre; par A soit fait passer un plan perpendiculaire à B; ce plan déterminera un triangle dont un des angles mesurera l'inclinaison des deux faces qui passent par B, tandis que les deux autres mesureront les inclinaisons de l'arête A sur ces deux faces; opérant de même successivement sur chaque arête, on en conclura que la somme des angles dièdres et des inclinaisons des arêtes sur les faces est la même que la somme des angles de six triangles; c'est-à-dire, que cette somme est constante et égale à douze angles droits.

§. 8.

1. *Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point.*

2.°

2.° Si deux arêtes contiguës d'un tétraèdre sont respectivement perpendiculaires à leurs opposées, les deux arêtes restantes seront aussi perpendiculaires l'une à l'autre, et alors les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre sur les plans des faces opposées se couperont toutes quatre en un même point lequel est aussi le point d'intersection des six plans conduits par chaque arête, perpendiculairement à son opposée.

Ce même point est encore celui où se coupent les quatre perpendiculaires élevées aux faces du tétraèdre par les points de ces faces où se coupent les trois perpendiculaires abaissées de leurs sommets sur les directions des côtés opposés.

Soient a, b, c, les trois arêtes de la base d'un tétraèdre; a', b', c', celles qui leur sont respectivement opposées et qui conséquemment concourent au sommet; supposons que a' et b' soient respectivement perpendiculaires à a et b; par a' et b' soient fait passer deux plans A et B respectivement perpendiculaires à a et b, et ayant pour intersections avec la base du tétraèdre deux droites α et β se coupant en o: ces deux plans se coupant eux-mêmes suivant une droite p passant par o et par le sommet du tétraèdre; enfin, par c' et p soit conduit un plan C, dont l'intersection avec la base sera une droite γ, passant par o : a étant perpendiculaire à A doit l'être aussi à α, et b doit pareillement être perpendiculaire à β; α et β ne sont donc autre chose que les perpendiculaires abaissées sur les directions de a et b des sommets qui leur sont opposés; donc γ qui passe par o, intersection de α et β, est aussi une perpendiculaire abaissée sur la direction de c du sommet de l'angle opposé : de plus A et B étant respectivement perpendiculaires à a et b, sont perpendiculaires à la base du tétraèdre, et conséquemment leur intersection p est aussi perpendiculaire à cette base, et par suite à c; le plan C qui passe par p et par γ perpendiculaires à c, est donc lui-même perpendiculaire à cette droite; la droite c' qui est dans ce plan est donc aussi perpendiculaire à c; ce qui démontre la première partie de la proposition. Le même raisonnement prouve aussi que, dans un tétraèdre dont les arêtes sont à angles droits, la perpendiculaire abaissée sur le plan d'une face, du sommet de l'angle opposé, se termine au point de cette face où se croisent les perpendiculaires abaissées sur les directions de ses côtés des sommets des angles opposés.

Le tétraèdre ayant ainsi ses arêtes opposées perpendiculaires l'une à l'autre ; concevons que, par les trois arêtes de sa base, on conduise des plans perpendiculaires aux arêtes qui leur sont respectivement opposées ; ces trois plans se couperont en un certain point suivant trois droites passant par ce point, et qui, par ce qui vient d'être démontré, ne seront autre chose que les perpendiculaires abaissées respectivement des trois sommets de la base sur les plans des faces opposées. De plus, il arrivera aussi, par ce qui précède, que le point de chacune de ces faces où se terminera la perpendiculaire tombant sur son plan, sera celui où se croisent les perpendiculaires abaissées des sommets de cette face sur les directions des côtés opposés.

Ainsi, dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, chacune des perpendiculaires abaissées d'un sommet sur le plan de la face opposée, se termine au point de cette face où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses trois sommets sur les directions des côtés opposés ; et trois de ces perpendiculaires se coupent, et se coupent en un même point ; d'où il résulte qu'elles se coupent toutes quatre en ce point ; et, comme chacune d'elles est la commune section de trois des plans conduits par des arêtes perpendiculairement à leurs opposées, il faut en conclure que les six plans conduits de cette manière passent aussi par ce point.

Remarque. Il est facile de s'assurer que ces propositions ont leur réciproque, et qu'ainsi, si un tétraèdre a seulement deux arêtes opposées perpendiculaires, les perpendiculaires abaissées de ses quatre sommets sur les plans des faces opposées se couperont deux à deux et seront comprises dans deux plans, tandis qu'il n'y aura aucun point commun à plusieurs de ces perpendiculaires, si aucune des arêtes du tétraèdre n'est perpendiculaire à son opposée.

§. 9.

1. *Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se coupent toutes trois au même point.*

2. *Dans tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, les perpendiculaires élevées aux plans des faces par leurs centres de gravité se coupent toutes quatre en un même point.*

En effet, les centres de gravité des faces du tétraèdre dont il s'agit, peuvent (§. 4.) être considérés comme les sommets d'un tétraèdre semblable à celui-là, et ayant ses faces parallèles à leurs homologues dans le premier : ce nouveau tétraèdre a donc, comme le tétraèdre proposé, ses arêtes opposées à angle droit; et par conséquent (§. 8.) les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les plans des faces opposées, lesquelles ne sont autre chose que les perpendiculaires élevées aux plans des faces du premier par les centres de gravité de ces faces, doivent toutes quatre se couper au même point.

§. 10.

1. *Dans tout triangle, l'intersection des perpendiculaires sur les milieux des côtés, le centre commun de gravité des sommets et l'intersection des perpendiculaires abaissées de ces sommets sur les directions des côtés opposés, sont trois points situés sur une même ligne droite, de manière que le second est intermédiaire aux deux autres. De plus, la distance entre les deux derniers est double de la distance entre les deux premiers.*

2. *Dans tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, l'intersection des perpendiculaires élevées aux plans des faces par leurs centres de gravité, le centre commun de gravité des sommets du tétraèdre et l'intersection des perpendiculaires abaissées de ces sommets sur les plans des faces opposées sont trois points situés sur une même ligne droite, de manière que le second est intermédiaire aux deux autres. De plus, la distance entre les deux derniers est triple de la distance entre les deux premiers.*

Soit T un triangle, g son centre de gravité et p le point de son plan où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Soit T′ un autre triangle ayant ses sommets aux milieux des côtés du premier; soit g' son centre de gravité et p' le point où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Les deux triangles T et T′ étant semblables (§. 5.), ayant leurs côtés homologues parallèles et dans le rapport de 2 à 1, il en résulte que les distances gp et $g'p'$ qui sont des lignes homologues de ces deux triangles seront parallèles ou dirigées suivant une même droite et qu'on aura $gp = 2g'p'$; mais g' étant le même que g (§. 4.), il s'ensuit que p, g, p' sont trois points en ligne droite, parmi lesquels g est intermédiaire à p et p', puisque T′ est situé en sens inverse de T : or, si l'on désigne par q le point où se croisent les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés de T, ce point q ne sera autre chose que le point p'; donc les points p, g, q, sont en ligne droite, de telle manière que g est intermédiaire à p et q et qu'on a $gp = 2gq$.

La même démonstration a lieu pour le tétraèdre, en recourant à un second tétraèdre ayant ses sommets aux centres de gravité des faces du premier.