ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RAYMOND
VECTEN
LHUILIER
ENCONTRE
LABROUSSE
FERRIOT
ROCHAT
FAUQUIER
AJASSON

Démonstrations du théorème énoncé à la page 32 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 126-132
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__126_1>

Démonstrations du théorème énoncé à la page 32 de ce volume.

Par MM. RAYMOND, VECTEN, LHUILIER, ENCONTRE, LABROUSSE, FERRIOT, ROCHAT, FAUQUIER et AJASSON.

QUELQUES-UNS des géomètres qui se sont occupés de ce théorème, en ont donné, à la fois, des démonstrations analitiques et des démonstrations synthétiques ; d'autres se sont bornés à une démonstration de l'une ou de l'autre sorte ; enfin deux en ont donné des démonstrations mixtes, c'est-à-dire, partie analitique et partie synthétique.

M. *Raymond*, principal du collége de Chambery, a donné deux démonstrations purement analitiques ; et MM. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, *Rochat*, professeur de navigation à St.-Brieux, et *Ajasson*, élève du lycée d'Angers, en ont chacun donné une. Ces diverses démonstrations reviennent à peu près à ce qui suit.

L'équation d'une hyperbole équilatérale, rapportée à ses asymptotes prises pour axes, est de la forme

$$xy=A^2\ ;$$

et, si α et β sont les coordonnées de l'une des extrémités d'un diamètre, $-\alpha$ et $-\beta$ seront les coordonnées de son autre extrémité ; en sorte que, si par un point dont les coordonnées sont x et y, on mène des droites à ces deux-là, en désignant par m et m' les tangentes tabulaires des angles que feront ces droites, d'un même côté, avec l'asymptote prise pour axe des x, on aura

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}\,, \quad m'=\frac{y+\beta}{x+\alpha}.$$

Mais comme on a

$$xy=A^2\,, \quad \alpha\beta=A^2\,,$$

on a aussi

$$xy=\alpha\beta \quad \text{d'où} \quad y=\frac{\alpha\beta}{x}\,;$$

donc

$$m=-\frac{\beta}{x}\,, \quad m'=+\frac{\beta}{x}\,;$$

et par conséquent

$$m'=-m\,;$$

les angles formés d'un même côté avec l'asymptote par les deux droites, sont donc supplémens l'un de l'autre; ces deux angles, pris de différens côtés, sont donc égaux.

Ainsi, *Les droites qui vont d'un même point quelconque d'une hyperbole équilatérale aux deux extrémités d'un même diamètre transverse, sont également inclinées à l'une quelconque des asymptotes.*

Passons actuellement aux démonstrations synthétiques. M. *Raymond* a déduit la sienne de ces deux propositions connues.

1.° Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les deux cordes supplémentaires qui répondent à un même diamètre, indiquent, par leur direction, un système de diamètres conjugués.

2.° Dans toute hyperbole, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques, a ses diagonales dirigées suivant les asymptotes.

Il est évident en effet, par la première proposition, que les droites qui vont d'un point quelconque d'une hyperbole aux deux extrémités d'un même diamètre transverse, sont parallèles à deux autres diamètres conjugués l'un à l'autre; ces droites sont donc, en vertu de la seconde proposition, parallèles aux droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un certain parallélogramme dont les diagonales se confondent avec les asymptotes de l'hyperbole; si donc cette hyperbole est équilatérale, ce parallélogramme ayant ses diagonales rectangulaires devient un rhombe; les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés sont donc également inclinées à une quelconque des diagonales, c'est-à-dire, à une même asymptote; il en doit donc être de même de deux parallèles à ces droites.

Quoique la première des deux propositions sur lesquelles M. *Raymond* a fondé sa démonstration se trouve démontrée dans divers ouvrages élémentaires, on verra sans doute ici avec plaisir la démonstration très-simple qu'il en donne lui-même, et qui peut également être appliquée à l'ellipse.

Soient HBK (fig. 10) l'une des branches d'une hyperbole, C son centre, AB l'un quelconque de ses diamètres transverses, MA et MB des droites menées aux deux extrémités de ce diamètre, d'un point quelconque de la courbe; si, par le centre C, on mène des parallèles à MA et MB, coupant ces droites en E et D; parce que C est le milieu de AB, E sera le milieu de MB; le diamètre CE coupera donc en deux parties égales toutes les cordes parallèles à MB; son conjugué sera donc parallèle à cette corde, et sera par conséquent CD.

Voici présentement la démonstration de M. *Lhuilier*.

« Soit C le centre d'une hyperbole équilatère (fig. 11). Soit ACA′
» un diamètre transverse de cette hyperbole, dont les extrémités soient
» A et A′. Soit M un point de cette hyperbole auquel soient menées
» les droites AM, A′M. Par M soit menée une droite parallèle à l'une
» des asymptotes; et, sur cette droite, soient abaissées les perpendi-
» culaires AB, A′B′. J'affirme que les angles AMB, A′MB′ sont
» égaux entre eux.

» Soit, en effet, menée par C l'autre asymptote, qui rencontre en
» P la droite BB′; et, sur CP, soient abaissées les perpendiculaires
» AD, A′D′.

» On a, par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée à
» ses asymptotes,

$$AD \times CD = MP \times CP\text{, ou } AD : MP = CP : CD;$$

de là

» de là

$$AD-MP : AD+MP = CP-CD \,.\, CP+CD,$$

» ou, à cause de $AD=A'D'=B'P$, et de $CD=CD'$

$$MB : MB'=AB : A'B' ;$$

» les deux triangles rectangles MBA et MB'A' sont donc semblables
» entre eux ; et, par suite, les angles AMB et A'MB' sont égaux
» entre eux.

» *Application.* Soient deux points A, A' donnés de position, et
» soit une droite BB' qui se meut parallèlement à elle-même dans un même
» plan passant par ces deux points. Dans chacune des positions de cette
» droite, soit déterminé, sur elle, le point M dont la somme des
» distances aux points A, A' est la plus petite ; le lieu de ce point
» M est une hyperbole équilatère dont AA' est un diamètre trans-
» verse, et dont une asymptote est parallèle à BB'.

» Ce point est aussi le point d'incidence des rayons qui, partant de l'un
» des points A, A', sont réfléchis à l'autre point, par la droite BB'. »

La démonstration de M. *Encontre*, Professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier, suppose, outre le premier des deux principes employés par M. *Raymond*, les deux autres principes que voici ; 1.° la tangente à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, a son point de contact à son milieu ; et elle est égale au conjugué du diamètre mené par ce point de contact ; 2.° deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole équilatérale sont égaux entre eux.

Ces principes posés, soient C (fig. 12) le centre d'une hyperbole équilatérale, AA' un diamètre, MA, MA' des droites joignant un point quelconque M de la courbe aux extrémités de ce diamètre, et supposons que ces droites coupent l'une des asymptotes en B et D. Soit EF une tangente parallèle à MA, soient E le point de contact de cette tangente et F le point où elle coupe l'asymptote ; en menant le diamètre EE' il aura pour conjugué le diamètre parallèle à EF ou MA ; ce diamètre EE' sera donc, par la propriété des cordes supplémentaires, parallèle à MA' ; les deux triangles CEF et DMB seront donc semblables ; mais, si l'hyperbole est équilatérale, on a

$EC=EF$, et conséquemment le premier de ces deux triangles est isocèle; le second doit donc l'être aussi ; on doit donc avoir Ang.$MBD=$Ang.MDB.

M. *Encontre* remarque de plus que, si l'on désigne par G et H les points où MA' et MA remontrent l'autre asymptote, on aura, par ce qui précède et par les propriétés générales de l'hyperbole,

$$MB=MD,$$

$$MH=MG,$$

$$AB=MH;$$

retranchant la dernière équation de la somme des deux premières, il vient, en réduisant,

$$MA=DG.$$

Les démonstrations synthétiques de MM. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, et *Labrousse*, maître de mathématiques dans la même ville, sont absolument les mêmes et reposent uniquement sur l'égalité des portions de sécantes interceptées entre les asymptotes et la courbe; elles reviennent à peu près à ce qui suit.

Soient toujours C (fig. 13) le centre de la courbe, BE et CH les asymptotes, AA' un diamètre, MA, MA' deux droites joignant ses extrémités à un point quelconque M de l'hyperbole; la première de ces droites coupant les asymptotes en B et H, et la seconde en D et G.

Soit menée par A' une parallèle à MA terminée en E à l'asymptote, et soit joint EH; à cause de l'égalité des triangles CAB et $CA'E$, et de $MH=AB$, HE sera parallèle à MA', et conséquemment les triangles EHB et DMB seront semblables; mais, parce que HC perpendiculaire à BE tombe sur son milieu, le premier de ces deux triangles est isocèle; le dernier l'est donc aussi; on a donc Ang.MBD $=$Ang.MDB.

La démonstration donnée par M. *Ferriot*, principal du collége de Baume, est d'une forme particulière; il démontre d'abord, comme il suit, que la proposition est vraie, dans le cas où le diamètre dont il s'agit est l'axe transverse lui-même.

Soient C (fig. 14) le centre de l'hyperbole, CD son asymptote, AA′ son axe transverse, prolongé vers X, MA et MA′ les droites joignant les extrémités de cet axe à un point quelconque M de la courbe, ces droites coupant l'asymptote en D et E ; soit enfin AF une perpendiculaire à l'axe, coupant l'asymptote en F.

Dans l'hyperbole équilatérale, deux diamètres conjugués, et conséquemment deux cordes supplémentaires, terminées au premier axe, font d'un même côté avec cet axe des angles complément l'un de l'autre ; ainsi MA′C est complément de MAX, et, comme FAD l'est aussi, il en résulte que ces deux angles sont égaux ; mais, d'un autre côté, les angles A′CE et AFD valent l'un et l'autre un angle droit et demi ; donc les triangles A′CE et AFD sont semblables. On a donc Ang.MDE = Ang.CEA = Ang.MED.

Cela posé, soit un plan arbitraire passant par CD, et soit projetée la figure sur ce plan ; sa projection sera toujours une hyperbole équilatérale, ayant encore CD pour asymptote, mais dont la projection de AA′ ne sera plus l'axe, mais un diamètre transverse, lequel pourra être quelconque, à cause de l'indétermination du plan conduit par CD ; d'un autre côté, à cause de la situation arbitraire du point M, les projections de MA et MA′ pourront, dans la nouvelle hyperbole, devenir des droites joignant un point quelconque de la courbe aux deux extrémités d'un diamètre transverse quelconque ; et, comme les projections des angles égaux MDE et MED seront encore des angles égaux, il en résulte que la proposition aura encore lieu dans ce cas.

La démonstration mixte de M. *Vecten*, et celle de M. *Fauquier* élève du lycée de Nismes, consistent également à prouver d'abord, par l'analise, que les droites qui vont d'un point quelconque d'une hyperbole équilatérale aux deux extrémités d'un même diamètre transverse font, d'un même côté, avec le premier axe, des angles complément l'un de l'autre ; ce qui est évident, d'après ce qui précède, puisque ces droites sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués.

Cette proposition une fois établie, la proposition principale s'en déduit facilement.

Soient, en effet, C (fig. 15) le centre d'une hyperbole équilatérale, XX′ la direction de son premier axe, YY′ celle du second, CD et CG ses deux asymptotes, AA′ un diamètre transverse quelconque, MA et MA′ des droites joignant les extrémités de ce diamètre à un point quelconque M de la courbe, F et F′ les points où ces droites coupent le premier axe; soient enfin B et H les intersections de MA avec les asymptotes, D, G, celles de MA′ avec les mêmes droites, et I l'intersection de DG avec CY.

Par ce qui précède, l'angle MFX est complément de l'angle MF′X; il est donc égal a CIF′; mais MFX et CIF′ sont respectivement des angles extérieurs dans les triangles CFH et CGI, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\text{Ang.ICH}+\text{Ang.IGC}=\text{Ang.CHF}+\text{Ang.HCF}\,;$$

ou simplement, à cause de Ang.ICH=Ang.GCF,

$$\text{Ang.IGC ou Ang.HGM}=\text{Ang.CHF ou Ang.GHM}\,;$$

et, comme les angles MDB et MBD sont les complémens respectifs de ces deux-là, ils doivent aussi être égaux.

M. *Fauquier* a déduit de cette proposition la conséquence que voici. Soient C le centre (fig. 16) et A, A′ les sommets d'une hyperbole équilatérale; soient pris les arcs

$$Am=A'm',\ An=A'n',\ \text{d'où}\ mn=m'n'\,;$$

soient joints les points m, m', n, n', à un point quelconque P de la courbe par des droites coupant l'une des asymptotes en g, g', h, h'. Les points m et m', ainsi que les points n et n', se trouvant, par la construction, les extrémités d'un même diamètre, les triangles mPn et m'Pn' seront semblables, par ce qui précède, comme ayant des angles égaux en g et g', h et h'; on aura donc

$$\text{Ang.}m\text{P}n=\text{Ang.}m'\text{P}n'.$$