ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 112-115
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__112_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Lemme I. Partager deux droites données de grandeur, l'une et l'autre en deux parties, de manière que le rectangle d'une partie de l'une de ces droites par une partie de l'autre soit donné de grandeur, et que le rectangle des deux autres parties soit aussi donné de grandeur ?

$$\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta,$$

et, à son autre extrémité, par une force unique égale à

$$\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta-m\frac{d\theta}{dt}=\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta-\frac{m^2}{r},$$

la force centrifuge, proprement dite, évidemment égale à la différence de ces deux-là, sera donc simplement $\frac{m^2}{r}$, c'est-à-dire, exactement la même que si le centre était fixe, et tout à fait indépendante de la situation du point décrivant sur la circonférence.

(*Note des éditeurs.*)

Soient

Soient AB, A′B′ (fig. 2) deux droites données de grandeur ; on demande de couper ces droites l'une et l'autre en deux parties aux points X et X′, de manière que les rectangles $AX \times A'X'$ et $BX \times B'X'$ soient l'un et l'autre donnés de grandeur ?

Soient

$$AX \times A'X' = AB \times A'a' \quad \text{et} \quad BX \times B'X' = AB \times B'b',$$

on aura

$$AX : AB = A'a' : A'X' \quad \text{et} \quad BX : AB = B'b' : B'X' ;$$

donc

$$BX : AB = a'X' : A'X' \quad \text{et} \quad AX : AB = b'X' : B'X' ;$$

donc aussi

$$a'X' : A'X' = B'b' : B'X' \quad \text{et} \quad b'X' : B'X' = A'a' : A'X' ;$$

ce qui donne

$$a'X' \times b'X' = A'a' \times B'b'.$$

On connaît donc la somme $a'b'$ des deux distances $a'X'$, $b'X'$ et le rectangle de ces mêmes distances ; ainsi elles sont données de grandeur et conséquemment le point X′ est donné de position.

Remarque I. Pour fixer l'attention sur un cas déterminé, j'ai supposé que les positions des points donnés et des points cherchés sont respectivement AXB, A′X′B′, et que les droites $A'a'$, $B'b'$, sont données de grandeur de manière à répondre à cette supposition. Si l'on voulait faire l'énumération de toutes les positions dont ces points sont susceptibles, il paraît d'abord qu'il y aurait neuf cas à examiner ; mais quelques-uns de ces cas rentreraient les uns dans les autres ; ils dépendraient de la grandeur des droites données $A'a'$, $B'b'$ et des directions suivant lesquelles on les porterait depuis les points A′ et B′. La géométrie et l'algèbre indiquant la liaison qui règne entre ces différens cas, par les changemens de directions et de signes des lignes obtenues, j'ai cru devoir me borner à l'exposition sommaire de l'un de ces cas.

Remarque II. On obtient, comme il suit, la condition de possibilité du problème proposé :

$$a'b'^{2} \overset{=}{>} 4A'a' \times B'b' \;,$$

$$[A'B' - (A'a' + B'b')]^{2} \overset{=}{>} 4A'a' \times B'b' \;,$$

$$A'B' - (A'a' + B'b') \overset{=}{>} 2\sqrt{A'a' \times B'b'} \;,$$

$$A'B' \overset{=}{>} A'a' + 2\sqrt{A'a' \times B'b'} + B'b' \;,$$

$$\sqrt{A'B'} \overset{=}{>} \sqrt{A'a'} + \sqrt{B'b'}.$$

LEMME II. Partager trois droites données de grandeur chacune en deux parties de manière que l'on connaisse de grandeur chacun des rectangles suivans : savoir, le rectangle d'une partie de la première par une partie de la seconde ; le rectangle de l'autre partie de la seconde par une partie de la troisième ; enfin le rectangle de l'autre partie de la troisième par l'autre partie de la première ?

Je vais montrer comment le problème proposé, sur trois droites, peut être ramené au problème correspondant sur deux droites seulement.

Soient AB, $A'B'$, $A''B''$ (fig. 3), trois droites données de grandeur, à couper en X, X', X'', de manière que l'on connaisse de grandeur chacun des rectangles $AX \times A'X'$, $B'X' \times A''X''$, $B''X'' \times BX$?

Soient

$$AX \times A'X' = A'B' \times Aa \quad \text{et} \quad B'X' \times A''X'' = A'B' \times A''a'' \;,$$

on aura

$$AX : Aa = A'B' : A'X' \quad \text{et} \quad A'B' : B'X' = A''X'' : A''a'' \;,$$

donc

$$AX : aX = A'B' : B'X' \quad \text{et} \quad A'B' : A'X' = A''X'' : a''X'' \;,$$

et par conséquent

$$AX : aX = A''X'' : A''a'' \quad \text{et} \quad AX : Aa = A''X'' : a''X'' \;,$$

d'où résulte

$$aX : Aa = A''a'' : a''X'' \;,$$

ou $$aX\times a''X''=Aa\times A''a''.$$

Donc on connaît les droites aB, $a''B''$, et en outre les rectangles $aX\times a''X''$, $BX\times B''X''$ sont donnés de grandeur ; donc le problème sur trois droites données de grandeur et sur trois rectangles formés par leurs parties, d'une manière conforme à l'énoncé, est ramené au problème correspondant sur deux droites seulement.

Remarque. On ramenera précisément de la même manière le problème proposé sur quatre droites, au problème correspondant sur trois droites; et généralement, le problème étant proposé sur un certain nombre de droites, on le ramenera au problème correspondant sur un nombre de droites inférieur d'une unité.

Problème. A un triangle donné, inscrire un triangle dont les côtés passent par des points donnés ?

Soient A, A', A'', les sommets d'un triangle donné ; soient P, P', P'', trois points donnés sur le plan de ce triangle. On demande d'inscrire au triangle donné, un triangle $XX'X''$, dont les côtés XX', $X'X''$, $X''X$, passent respectivement par les points P'', P, P' ?

$$\text{Par}\left\{\begin{matrix}P\\P'\\P''\end{matrix}\right\}\text{soient menées aux côtés}\left\{\begin{matrix}AA',\,AA''\\A'A'',\,A'A\\A''A,\,A''A'\end{matrix}\right\}\text{les parallèles}\left\{\begin{matrix}Pa',\,Pb'',\\P'a'',\,P'b,\\P''a,\,P''b'.\end{matrix}\right.$$

$$\text{Les rectangles}\left\{\begin{matrix}aX\times b'X, & a''X''\times bX, & a'X'\times b''X'', \\ aA''\times b'A''; & a''A'\times bA', & a'A\times b''A;\end{matrix}\right.$$

sont égaux deux à deux ; ainsi ceux de la première ligne sont donnés de grandeur ; et, comme on connaît en outre les distances ab, $a'b'$, $a''b''$, le problème se trouve ramené au *lemme* précédent.

Remarque. A l'aide de l'extension dont on a vu tout à l'heure que ce *lemme* est susceptible, on résoudra d'une manière semblable le problème général. *A un poligone donné, inscrire un poligone de même nom, dont les côtés (ou leurs prolongemens) passent respectivement par des points (en même nombre) donnés de position ?*