ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise. Exposé d'une méthode propre à faciliter l'élimination, dans les équations des degrés supérieurs

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 321-332
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__321_0>

ANALISE.

Exposé d'une méthode propre à faciliter l'élimination, dans les équations des degrés supérieurs ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. EN nous proposant l'équation générale du degré n, nous la présenterons, pour la commodité du calcul, sous la forme

$$\text{(N)} \qquad \lambda y^{n}=ay^{n-1}+by^{n-2}+cy^{n-3}+dy^{n-4}+\ldots\ldots$$

Si on la multiplie, de part et d'autre, par λy, en mettant pour λy^n, dans le second membre de l'équation résultante, sa valeur donnée par l'équation même, elle deviendra

$$\lambda^2 y^{n+1}=(aa+\lambda b)y^{n-1}+(ab+\lambda c)y^{n-2}+(ac+\lambda d)y^{n-3}+\ldots\ldots$$

équation que, pour abréger, nous écrirons ainsi

$$\lambda^2 y^{n+1}=a'y^{n-1}+b'y^{n-2}+c'y^{n-3}+d'y^{n-4}+\ldots\ldots$$

Multipliant encore de part et d'autre par λy, en mettant toujours pour λy^n, dans le second membre, la valeur donnée par la proposée, elle deviendra

$$\lambda^3 y^{n+2}=(aa'+\lambda b')y^{n-1}+(ba'+\lambda c')y^{n-2}+(ca'+\lambda d')y^{n-3}+\ldots\ldots$$

En continuant de même, on parviendra à donner à toutes les puissances de y supérieures à y^{n-1} des formes polynomiales parfaitement analogues à celle de cette dernière puissance ; et si, pour abréger, on fait

$$\lambda y^{n} = a\,y^{n-1} + b\,y^{n-2} + c\,y^{n-3} + \ldots\ldots ,$$

$$\lambda^2 y^{n+1} = a'\,y^{n-1} + b'\,y^{n-2} + c'\,y^{n-3} + \ldots\ldots ,$$

$$\lambda^3 y^{n+2} = a''\,y^{n-1} + b''\,y^{n-2} + c''\,y^{n-3} + \ldots\ldots ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

on parviendra à trouver les valeurs littérales de tous ces coefficiens au moyen de l'algorithme fort simple que voici :

$$\text{pour } y^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} a' = aa + \lambda b\ , \\ b' = ba + \lambda c\ , \\ c' = ca + \lambda d\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+2} \left\{ \begin{array}{l} a'' = aa' + \lambda b'\ , \\ b'' = ba' + \lambda c'\ , \\ c'' = ca' + \lambda d'\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+3} \left\{ \begin{array}{l} a''' = aa'' + \lambda b''\ , \\ b''' = ba'' + \lambda c''\ , \\ c''' = ca'' + \lambda d''\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+4} \left\{ \begin{array}{l} a'''' = aa''' + \lambda b'''\ , \\ b'''' = ba''' + \lambda c'''\ , \\ c'''' = ca''' + \lambda d'''\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array} \right.$$

2. De ces séries on en peut déduire d'autres à l'aide desquelles chacun de ces coefficiens pourra être immédiatement déduit de ceux

qui le précéderont dans la même série. On trouve d'abord, pour la série des coefficiens a', a'', a'''.....

$$
\begin{aligned}
a' &= aa + \lambda b\,,\\
a'' &= aa' + \lambda ba + \lambda^2 c\,,\\
a''' &= aa'' + \lambda ba' + \lambda^2 ca + \lambda^3 d\,,\\
a'''' &= aa''' + \lambda ba'' + \lambda^2 ca' + \lambda^3 da + \lambda^4 e\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

ainsi les coefficiens a, a', a'', a''', ..., forment une série récurrente dont l'échelle de relation est

$$a\,,\quad \lambda b\,,\quad \lambda^2 c\,,\quad \lambda^3 d\,,\ \ldots\ldots;$$

de manière que la série indéfinie

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \ldots\ldots$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{a + \lambda bx + \lambda^2 cx^2 + \lambda^3 dx^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots\ldots}:$$

On trouvera de même, pour la série des coefficiens b', b'', b''',..,

$$
\begin{aligned}
b' &= ab + \lambda c\,,\\
b'' &= ab' + \lambda bb + \lambda^2 d\,,\\
b''' &= ab'' + \lambda bb' + \lambda^2 cb + \lambda^3 e\,,\\
b'''' &= ab''' + \lambda bb'' + \lambda^2 cb' + \lambda^3 db + \lambda^4 f\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

ainsi les coefficiens b, b', b'', b''', ..., forment une série récurrente dont l'échelle de relation est la même que ci-dessus ; en sorte que la série indéfinie

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \ldots\ldots$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{b + \lambda cx + \lambda^2 dx^2 + \lambda^3 ex^4 + \ldots\ldots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots\ldots}.$$

Les coefficiens c', c'', c''', ..., auront les valeurs littérales qui suivent :

$$\begin{aligned}
c' &= ac + \lambda d\,,\\
c'' &= ac' + \lambda bc + \lambda^2 e\,,\\
c''' &= ac'' + \lambda bc' + \lambda^2 cc + \lambda^3 f\,,\\
c'''' &= ac''' + \lambda bc'' + \lambda^2 cc' + \lambda^3 dc + \lambda^4 g\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;
\end{aligned}$$

ces valeurs forment encore une série récurrente ayant même échelle de relation que les précédentes, en sorte que la série indéfinie

$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \ldots\ldots$$

est le développement de la fraction

$$\frac{c + \lambda dx + \lambda^2 ex^2 + \lambda^3 fx^3 + \ldots.}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots.}\,;$$

et il en irait absolument de même pour les autres séries de valeurs $d\,,\ d'\,,\ d''\,,\ d'''\,,\ldots\ldots;\ e\,,\ e'\,,\ e''\,,\ e'''\ldots\ldots;\ \ldots\ldots$

3. Qu'on ait présentement, outre l'équation (N) du degré n, une autre équation (M), aussi en y, mais d'un autre degré quelconque m, supérieur à n ; en mettant dans cette dernière, pour

$$\overset{n}{y}\,,\quad \overset{n+1}{y}\,,\quad \overset{n+2}{y}\,,\ldots\ldots,\ \overset{m}{y}\,,$$

les valeurs de ces puissances déduites de la première, par le procédé très-simple que nous venons d'exposer ; elle ne sera plus que du degré $n-1$. On aura donc, à la place des proposées, deux équations des degrés n et $n-1$ qui, en leur appliquant le même procédé, en feront trouver une nouvelle du degré $n-2$; en poursuivant donc de la même manière, on parviendra enfin à une équation du degré *zéro* ; ce sera l'équation de condition qui devra exister entre les coefficiens des deux équations proposées, pour qu'elles puissent subsister ensemble (*) ; c'est-à-dire, pour qu'il y ait un facteur commun entre elles.

(*) Ce sera conséquemment l'équation finale, si les coefficiens des deux proposées sont des fonctions d'une inconnue autre que y.

(*Note des éditeurs.*)

Sur quoi il est nécessaire d'observer que si, avant d'arriver à cette équation du degré *zéro*, on en rencontre une dont tous les coefficiens soient *zéro*, celle qui la précédera sera facteur commun aux deux proposées, indépendamment de toute détermination de leurs coefficiens.

4. La question se trouvant réduite, dès la première opération, ainsi qu'on vient de le voir, à éliminer l'inconnue y entre deux équations dont les degrés ne diffèrent seulement que d'une unité, nous allons examiner ce cas en particulier, et présenter, comme modèle, les deux équations

$$0=Ay^{n}+By^{n-1}+Cy^{n-2}+Dy^{n-3}+Ey^{n-4}+\ldots,$$
$$0=ay^{n-1}+by^{n-2}+cy^{n-3}+dy^{n-4}+ey^{n-5}+\ldots.$$

Appliquant la méthode précédente à ces deux équations, on en déduira une troisième du degré $n-2$; et, si l'on désigne cette dernière par

$$0=a'y^{n-2}+b'y^{n-3}+c'y^{n-4}+d'y^{n-5}+\ldots,$$

les expressions littérales des coefficiens a', b', c', d', ..., seront celles qui suivent :

$$a'=b(Ab-Ba)-a(Ac-Ca),$$
$$b'=c(Ab-Ba)-a(Ad-Da),$$
$$c'=d(Ab-Ba)-a(Ae-Ea),$$
$$d'=e(Ab-Ba)-a(Af-Fa),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

EXEMPLE I. Déterminer le diviseur commun aux deux polynomes.

$$5y^3-2y^2-3y+8, \qquad 3y^2-7y+2\,?$$

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\left\{\begin{array}{l}0=5y^3-2y^2-3y+8,\\ 0=3y^2-7y+2.\end{array}\right.$$

$A=+5$, $a=+3$, $Ab-Ba=-29$, $a'=+146=2.73$;
$B=-2$, $b=-7$, $Ac-Ca=+19$, $b'=+14=2.7$;
$C=-3$, $c=+2$; $Ad-Da=-24$;
$D=+8$;

Troisième équation : $0=73y+7$.

SECONDE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0=3y^2-7y+2, \\ 0=73y+7. \end{cases}$$

$A=+3$, $a=+73$, $Ab-Ba=+532$, $a'=14382$.
$B=-7$, $b=+7$; $Ac-Ca=-146$;
$C=+2$;

Troisième équation : $0=14382$.

L'absurdité de cette dernière équation fait voir que les deux polynomes proposés n'ont point de facteur commun.

EXEMPLE II. Déterminer le facteur commun aux deux polynomes.
$5y^5-27y^4+22y^3+17y^2-49y+24$, $3y^4-22y^3+46y^2-31y+6$?

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0=5y^5-27y^4+22y^3+17y^2-49y+24, \\ 0=3y^4-22y^3+46y^2-31y+6. \end{cases}$$

$A=+5$, $a=+3$, $Ab-Ba=-29$, $a'=+146=+2.73$,
$B=-27$, $b=-22$, $Ac-Ca=+164$; $b'=-716=-2.358$,
$C=+22$, $c=+46$, $Ad-Da=-206$, $c'=+368=+2.184$,
$D=+17$, $d=-31$, $Ae-Ea=+177$, $d'=+42=+2.21$.
$E=-49$, $e=+6$; $Af-Fa=-72$;
$F=+24$;

Troisième équation : $0=73y^3-358y^2+184y+21$.

SECONDE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0 = 3y^4 - 22y^3 + 46y^2 - 31y + 6, \\ 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21. \end{cases}$$

$A=+3$, $a=+73$, $Ab-Ba=+532$, $a'=+14382=+14382.1$,
$B=-22$, $b=-358$, $Ac-Ca=-2806$, $b'=-71910=-14382.5$,
$C=+46$, $c=+184$, $Ad-Da=+2326$, $c'=+43146=+14382.3$.
$D=-31$, $d=+21$; $Ae-Ea=-438$;
$E=+6$;

Troisième équation : $0=y^2-5y+3$.

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21, \\ 0 = y^2 - 5y + 3. \end{cases}$$

$A=+73$, $a=+1$, $Ab-Ba=-7$, $a'=0$,
$B=-358$, $b=-5$, $Ac-Ca=+35$, $b'=0$.
$C=+184$, $c=+3$; $Ad-Da=-21$;
$D=+21$;

Troisième équation : $0=0$.

Cette équation identique, $0=0$, nous apprend donc que y^2-5y+3 est le diviseur commun des deux polynomes proposés.

5. La recherche du facteur commun le plus élevé, entre deux polynomes proposés, conduit à la détermination des *racines égales*. Dans mon *Arithmétique universelle* (page 268) j'ai démontré le théorème général qui suit : *Si l'on désigne par* X' *le commun diviseur le plus élevé entre le polynome* X *et sa première dérivée* DX ; *par* X'' *le commun diviseur le plus élevé entre* X' *et sa première dérivée* DX'; *par* X''' *le commun diviseur le plus élevé entre* X'' *et sa première dérivée* DX'', *et ainsi de suite ; le produit des facteurs simples de* X *sera* $\frac{XX''}{X'^2}$; *celui des facteurs doubles* $\frac{X'X'''}{X''^2}$; *celui des facteurs*

triples $\frac{X''X''''}{X'''^2}$; *et ainsi des autres, de manière qu'on aura*

$$X=\left(\frac{XX''}{X'^2}\right)\left(\frac{X'X'''}{X''^2}\right)^2\left(\frac{X''X''''}{X'''^2}\right)^3\ldots\ldots$$

Nous allons appliquer le théorème, aussi bien que la méthode, au polynome proposé dans l'endroit que nous venons de citer, et qu'il serait bien difficile de décomposer, en y employant les méthodes ordinaires.

EXEMPLE. On propose de déterminer si le polynome

$$X=y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8$$

a des facteurs égaux; et, au cas qu'il en ait de tels, de les mettre en évidence?

On a ici

$$\mathrm{D}X=9y^8+16y^7+7y^6+36y^5+35y^4-8y^3+9y^2+4y-12\ ;$$

ce qui donne lieu aux opérations suivantes :

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\text{\textit{Équations}}\left\{\begin{array}{l}0=y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8,\\ 0=9y^8+16y^7+7y^6+36y^5+35y^4-8y^3+9y^2+4y-12.\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{llll}
A=+1, & a=+9, & Ab-Ba=-2, & a'=-14=-2\cdot 7,\\
B=+2, & b=+16, & Ac-Ca=-2, & b'=+148=+2\cdot 74,\\
C=+1, & c=+7, & Ad-Da=-18, & c'=+180=+2\cdot 90,\\
D=+6, & d=+36, & Ae-Ea=-28, & d'=-160=-2\cdot 80,\\
E=+7, & e=+35, & Af-Fa=+10, & e'=+178=+2\cdot 89,\\
F=-2, & f=-8, & Ag-Ga=-18, & f'=+108=+2\cdot 54,\\
G=+3, & g=+9, & Ah-Ha=-14, & g'=-872=-2\cdot 436,\\
H=+2, & h=+4, & Ai-Ia=+96, & h'=-624=-2\cdot 312.\\
I=-12, & i=-12; & Ak-Ka=+72; & \\
K=-8; & & &
\end{array}$$

SECONDE

SECONDE OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\begin{cases} o=9y^8+16y^7+7y^6+36y^5+35y^4-8y^3+9y^2+4y-12, \\ o=7y^7-74y^6-90y^5+80y^4-89y^3-54y^2+436y+312. \end{cases}$$

$A=+9$, $a=+7$, $Ab-Ba=-778$, $a'=+81.785$,
$B=+16$, $b=-74$, $Ac-Ca=-859$, $b'=+81.824$,
$C=+7$, $c=-90$, $Ad-Da=+468$, $c'=-81.678$,
$D=+36$, $d=+80$, $Ae-Ea=-1046$, $d'=+81.892$,
$E=+35$, $e=-89$, $Af-Fa=-430$, $e'=+81.185$,
$F=-8$, $f=-54$, $Ag-Ga=+3861$, $f'=-81.4428$,
$G=+9$, $g=+436$, $Ah-Ha=+2780$, $g'=-81.3004$;
$H=+4$, $h=+312$; $Ai-Ia=+84$;
$I=-12$;

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\begin{cases} o=7y^7-74y^6-90y^5+80y^4-89y^3-54y^2+436y+312, \\ o=785y^6+824y^5-678y^4+892y^3+185y^2-4428y-3004. \end{cases}$$

$A=+7$, $a=+785$, $Ab-Ba=+63858$, $a'=+9408.94$,
$B=-74$, $b=+824$, $Ac-Ca=+65904$, $b'=+9408.117$,
$C=-90$, $c=-678$, $Ad-Da=-56556$, $c'=+9408.117$,
$D=+80$, $d=+892$, $Ae-Ea=+71160$, $d'=+9408.305$,
$E=-89$, $e=+185$, $Af-Fa=+11394$, $e'=+9408.257$,
$F=-54$, $f=-4428$, $Ag-Ga=-363288$, $f'=+9408.46$;
$G=+436$, $g=-3004$; $Ah-Ha=-244920$;
$H=+312$;

QUATRIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\begin{cases} o=785y^6+824y^5-678y^4+892y^3+185y^2-4428y-3004, \\ o=94y^5+117y^4+117y^3+305y^2+257y+46. \end{cases}$$

$A=+\ 785$, $a=+\ 94$, $Ab-Ba=+\ 14389$, $a'=+12940725{\cdot}1$,
$B=+\ 824$, $b=+117$, $Ac-Ca=+155577$, $b'=+12940725{\cdot}1$,
$C=-\ 678$, $c=+117$, $Ad-Da=+155577$, $c'=+12940725{\cdot}1$,
$D=+\ 892$, $d=+305$, $Ae-Ea=+184355$, $d'=+12940725{\cdot}3$,
$E=+\ 185$, $e=+257$, $Af-Fa=+452342$, $e'=+12940725{\cdot}2$.
$F=-4428$, $f=+\ 46$; $Ag-Ga=+282376$;
$G=-3004$;

CINQUIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=94y^5+117y^4+117y^3+305y^2+257y+46\,, \\ 0=\ \ y^4+\ \ y^3+\ \ y^2+\ 3y+\ 2. \end{array}\right.$$

$A=+\ 94$, $a=+1$, $Ab-Ba=-23$, $a'=0$,
$B=+117$, $b=+1$, $Ac-Ca=-23$, $b'=0$,
$C=+117$, $c=+1$, $Ad-Da=-23$, $c'=0$,
$D=+305$, $d=+3$, $Ae-Ea=-69$, $d'=0$.
$E=+257$, $e=+2$; $Af-Fa=-46$;
$F=+\ 46$;

On aura donc, pour le commun diviseur le plus élevé entre le polynome proposé X et sa première dérivée $\mathrm{D}X$

$$X'=\ y^4+\ y^3+\ y^2+3y+2\,,$$

d'où

$$\mathrm{D}X'=4y^3+3y^2+2y+3\,;$$

ce qui donnera lieu aux opérations suivantes:

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=\ y^4+\ y^3+\ y^2+3y+2\,, \\ 0=4y^3+3y^2+2y+3. \end{array}\right.$$

$A=+1$, $a=+4$, $Ab-Ba=-1$, $a'=+\ 5$,
$B=+1$, $b=+3$, $Ac-Ca=-2$, $b'=+34$,
$C=+1$, $c=+2$, $Ad-Da=-9$, $c'=+29$.
$D=+3$, $d=+3$; $Ae-Ea=-8$;
$E=+2$;

SECONDE OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=4y^3+\ 3y^2+2y+3\ ,\\ 0=5y^2+34y\ +29. \end{array}\right.$$

$A=+4$, $a=+\ 5$, $Ab-Ba=+121$, $a'=+3584.1$,
$B=+3$, $b=+34$, $Ac-Ca=+106$, $b'=+3584.1$.
$C=+2$, $c=+29$; $Ad-Da=-\ 15$;
$D=+3$;

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=5y^2+34y+29\ ,\\ 0=\ y+\ 1. \end{array}\right.$$

$A=+\ 5$, $a=+1$, $Ab-Ba=-29$, $a'=0$.
$B=+34$, $b=+1$; $Ac-Ca=-29$;
$C=+29$;

On aura donc

$$X''=y+1\ ,$$

d'où

$$\mathrm{D}X''=1\ ;$$

le diviseur commun le plus élevé entre ces deux fonctions étant $X'''=1$, d'où $\mathrm{D}X'''=0$ et $X''''=1$, l'opération se termine ici.

Ayant donc

$$\begin{array}{ll} X & =y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8\ ,\\ X' & =y^4+\ y^3+y^2+3y\ +2\ ,\\ X'' & =y\ +1\ ,\\ X''' & =1\ ,\\ X'''' & =1\ ; \end{array}$$

on aura

$$\frac{XX''}{X'^2}=\frac{(y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5+2y^4+3y^3+2y^2-12y-8)(y+1)}{(y^4+y^3+y^2+3y+2)^2}=y^2+y-2\ ,$$

$$\frac{X'X'''}{X''^2}=\frac{y^4+y^3+y^2+3y+2}{(y+1)^2}=y^2-y+2\ ,$$

$$\frac{X''X''''}{X'''^2}=\frac{y+1}{1^2}=y+1\ ;$$

en conséquence, le polynome proposé équivaudra à

$$(y^2+y-2)(y^2-y+2)^2(y+1)^3.$$