ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RAYMOND

Géométrie analitique. Méthodes directes pour résoudre cette question : étant donnée, d'espèce et de position dans l'espace, une surface du premier ou du second ordre, placée comme on voudra par rapport aux plans coordonnés, établir l'équation numérique de cette surface, relativement à sa situation actuelle ?

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 233-240
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__233_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Méthodes directes pour résoudre cette question : Étant donnée, d'espèce et de position dans l'espace, une surface du premier ou du second ordre, placée comme on voudra par rapport aux plans coordonnés, établir l'équation numérique de cette surface, relativement à sa situation actuelle ?

(Article faisant suite à la question traitée à la page 180 de ce volume.)

Par M. Raymond, Principal et Professeur de mathématiques du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

Après avoir exposé le moyen d'établir les équations numériques des courbes du second degré, données sur un plan, il est naturel d'appliquer la même marche à l'espace, en traitant quelques exemples propres à mettre les élèves sur la voie. Ce n'est pas que cette recherche soit susceptible de difficultés ; mais il nous a paru convenable de compléter l'article que nous avons donné précédemment.

10. 1.° *Pour le plan.* L'équation générale du plan est, comme l'on sait,

$$Az+By+Cx+D=0.$$

Si l'on a un plan qui passe par les axes des x, des y, et des z, à des distances de l'origine des coordonnées, indiquées par les nombres respectifs 3, 2, 5, on aura, dans ce cas,

$$-\frac{D}{A}=5\,;\qquad -\frac{D}{B}=2\,,\qquad -\frac{D}{C}=3\,,$$

d'où l'on tire ces relations

$$5A=2B=3C=-D\,;$$

donnant donc à D la valeur que l'on voudra, on déterminera les quatre coefficients de l'équation du plan. Faisant, par exemple, $D=1$, on aura

$$A=-\frac{1}{5}\,,\qquad B=-\frac{1}{2}\,,\qquad C=-\frac{1}{3}\,,$$

ce qui donnera

$$6z+15y+10x-30=0\,,$$

pour l'équation du plan proposé.

C'est avec la même facilité que l'on établirait l'équation, si l'on avait pour données les valeurs des angles respectifs du plan proposé avec les plans coordonnés.

Il est inutile de s'arrêter à des considérations de cette nature ; passons aux surfaces du second ordre.

11. On sait que l'équation générale des surfaces du second ordre, résolue par rapport à z, donne :

$$z=-\left\{\frac{By+B'x+C}{2A}\right\}$$

$$\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left\{y^2+\frac{2(BB'-2AB'')}{B^2-4AA'}\,xy+\frac{(B'^2-4AA'')}{B^2-4AA'}x^2+\frac{2(BC-2AC')}{B^2-4AA'}\,y+\frac{2(B'C-2AC'')}{B^2-4AA'}\,x+\frac{C^2-4AF}{B^2-4AA'}\right\}}$$

et que le plan-diamètre de la surface a ainsi pour équation

$$z=-\left\{\frac{By+B'x+C}{2A}\right\}.$$

L'intersection de ce plan avec la surface appartient également au cylindre tangent qui limite cette surface et qui la projète sur le plan des xy. On obtient l'équation de cette intersection, en égalant à zéro le polynome en xy qui est sous le signe radical de la valeur de z ; et l'équation résultante, indépendante de z, appartient, à la fois, à tout le cylindre projetant et à la projection même de la surface sur le plan des xy. Ces choses étant rappelées, nous pouvons passer aux exemples.

12. 2.° *Pour l'ellipsoïde.* Soit $ILI'L'$ (fig. 1) la projection, sur le plan des xy, d'un ellipsoïde disposé de manière que son grand axe soit parallèle au plan des xy, et élevé au-dessus de ce plan d'une quantité égale à 4. Soient

$$AB=2\ ,\quad AB'=4\ ,\quad BI=1\ ,\quad OL=1.$$

L'ellipse $ILI'L'$ aura pour équation (2) :

$$y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8=0.$$

Le plan-diamètre, parallèle au plan des xy, aura pour équation (10) :

$$z=4\ ,$$

en sorte que l'équation de la surface sera de la forme

$$z=4\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}.$$

Il ne restera donc plus qu'à déterminer le facteur $\frac{B^2-4AA'}{4A^2}$, ce qui se fera comme il suit.

Les coordonnées x et y, relatives au centre de l'ellipsoïde, sont ici

$$AC=3\ ,\qquad CO=\tfrac{3}{2}\ ;$$

faisant donc $x=3$, $y=\frac{3}{2}$, dans le polynome en xy ci-dessus, la valeur du radical deviendra alors celle du demi-second-axe de la surface. Exécutant donc la substitution, et supposant le demi-second-axe égal à l'unité, il faudra poser

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\times-1}=1\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1\ ;$$

au moyen de quoi l'équation de la surface deviendra

$$z=4\pm\sqrt{-(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}\ ,$$

ou

$$4z^2-4xy+4y^2+5x^2-32z-24x+96=0\ ;$$

équation cherchée, que l'on vérifiera aisément par la discussion.

On obtiendrait une équation toute différente, si, sous la même projection, on supposait, au second axe de l'ellipsoïde, une autre valeur que celle que nous lui avons assignée.

13. Supposons que la même projection de la figure 1.re appartienne à un ellipsoïde incliné sur les trois plans coordonnés, tel que son plan-diamètre, parallèle à l'axe des y, fasse, avec le plan des xy, un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$, et passe sur l'axe des z à une hauteur égale à l'unité, l'équation de ce plan sera :

$$z=\tfrac{1}{2}x+1\ ;$$

celle de la surface sera donc de la forme

$$z=\tfrac{1}{2}x+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}\ ;$$

et, le second axe étant encore supposé égal à 2, on aura, comme précédemment

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1\ ,$$

ce qui donnera définitivement pour l'équation cherchée

$$z=\tfrac{1}{2}x+1\pm\sqrt{-(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}\ ,$$

ou

$$4z^2-4zx-4xy+4y^2+6x^2-8z-20x+36=0.$$

14. Soit le point conjugué O (fig. 2), considéré comme le résultat de la contraction totale d'un ellipsoïde situé au-dessous du plan des xy, et projeté sur ce plan au point O'; soit le plan-diamètre passant par les points D, E, F, de telle sorte que l'on ait

$$AD=1\ ,\qquad AE=2\ ,\qquad AF=1\ ;$$

soient enfin

$$AC=2\ ,\qquad CO'=3\ ,$$

le plan-diamètre aura pour équation :

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\ ;$$

l'équation de la projection O' sera (3) :

$$y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4=0\ ,$$

de manière que celle de l'ellipsoïde O sera de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4)}.$$

Substituant donc, dans le polynome en xy, les valeurs de AC et CO', et égalant le radical à zéro, à cause de l'évanouissement des axes de l'ellipsoïde, il viendra

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=\frac{0}{0}\ ;$$

en donnant donc à ce facteur une valeur arbitraire; en le faisant, par exemple, et pour plus de simplicité, égal à -1, on aura

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{-(y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4)}\ ,$$

d'où

$$4z^2+4zy+8zx-8xy+5y^2+17x^2-8z-4y-24x+20=0\ ,$$

équation cherchée.

15. 3.° *Pour l'hyperboloïde.* Soit un hyperboloïde à deux nappes, projeté sur le plan des xy, comme on le voit (fig. 3) et de telle façon que l'on ait

$$AB=7\ ,\qquad AB'=1\ ,\qquad AD=AO=4\ ,\qquad OL=4.$$

L'équation de la projection sera

$$y^2+2xy+\tfrac{5}{9}x^2-8y-\tfrac{40}{9}x+\tfrac{116}{9}=0.$$

Supposons que le plan-diamètre, parallèle à l'axe des x, fasse avec le plan des xy un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$, qu'il s'élève du côté des y négatives et passe sur l'axe des z, au-dessus du point A, à une hauteur égale à 1; ce plan diamètre aura pour équation

$$z=-\tfrac{1}{2}y+1\ ;$$

l'équation de la surface sera donc de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left(y^2+2xy+\tfrac{5}{9}x^2-8y-\tfrac{40}{9}x+\tfrac{116}{9}\right)}\ ;$$

faisant, dans le polynome en xy, $x=AO=4$, $y=0$, et égalant le radical à la valeur du demi-second-axe, supposée égale à 4, et rendue imaginaire, on trouvera

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1\ ,$$

ce qui donnera, pour l'équation cherchée,

$$36z^2+36zy+72xy+45y^2+20x^2-72z-324y-160x+500=0.$$

16. Soient les deux droites OS et OR (fig. 4), considerées comme les traces, sur le plan des xy, d'un système de deux plans tangens à la surface d'un cône, et projetant cette surface sur ce plan ; soient

$$AD=3\ ,\qquad AE=6\ ,\qquad AC=\tfrac{1}{2}\ ,\qquad OC=3\ ;$$

les droites OS et OR auront respectivement pour équations

$$y+2x-6=0\ ,\qquad y-2x=0.$$

Multipliant ces deux équations par ordre, on aura pour équation de la projection

$$y^2-4x^2-6y+12x=0.$$

Si l'on suppose maintenant que le plan-diamètre, en vertu des données convenables, ait pour équation

$$z-4y-6x=0\ ;$$

l'équation de la surface conique sera de la forme

$$z=4y+6x\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left(y^2-4x^2-6y+12x\right)}\ ;$$

substituant, sous le radical, les valeurs de AC et CO, et égalant ce radical à zéro, on trouvera

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=\frac{0}{0}\ ;$$

faisant donc, pour plus de simplicité

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1,$$

l'équation cherchée deviendra

$$z=4y+6x\pm\sqrt{-(y^2-4x^2-6y+12x)},$$

ou

$$z^2-8zy-12zx+48xy+17y^2+32x^2-6y+12x=0.$$

17. 4.° *Pour le paraboloïde.* Soit NIN′ (fig. 5) la projection, sur le plan des xy, d'un paraboloïde tellement situé que l'on ait

$$AD=2\,, \qquad AB=5\,, \qquad AE=3\,;$$

et soit le paramètre $NN'=4\sqrt{13}$, d'où l'on déduira

$$AC=7\,, \qquad CO=\tfrac{15}{2}.$$

L'équation de la projection sera

$$y^2-3xy+\tfrac{9}{4}x^2+6y-35x+139=0.$$

Supposons que le plan-diamètre passant par l'axe des x fasse, avec le plan des xy, du côté des y négatives, un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$; l'équation de ce plan sera

$$z=-\tfrac{1}{2}y\,,$$

et celle du paraboloïde sera de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-3xy+\tfrac{9}{4}x^2+6y-35x+139)}.$$

Substituant, dans le polynome en xy les valeurs de $AC=7$ et de $CO=\frac{15}{2}$, et égalant le radical à $2\sqrt{13}$, valeur supposée du demi-paramètre, on trouvera, toutes réductions faites,

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1,$$

ce qui donnera

$$z=-\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{-(y^2-3xy+\tfrac{9}{4}x^2+6y-35x+139)}\ ,$$

ou enfin

$$4z^2-4zy-12xy+5y^2+9x^2+24y-140x+556=0.$$

Nous laissons aux élèves le soin de varier davantage les données ; ils peuvent se proposer, par exemple, l'hyperboloïde à deux nappes, situé dans le sens des z, l'hyperboloïde à une seule nappe, le paraboloïde hyperbolique, etc.