ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

D. ENCONTRE

Questions résolues. Solution du problème I de la page 17 de ce volume, pris dans son énoncé le plus général

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 122-124
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__122_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème I de la page 17 de ce volume, pris dans son énoncé le plus général (1).

Par M. D. Encontre, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.

Enoncé. Circonscrire à un cercle donné un polygone de m côtés; de manière que les sommets des angles du polygone soient situés sur m droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle ?

Solution. Par une propriété du cercle qui lui est commune avec toutes les courbes du second degré (2) ; lorsqu'un angle circonscrit à un cercle est assujetti à avoir son sommet sur une droite donnée,

(1) On trouvera ci-après, pag. 127, une construction très-simple de ce problème, pour le cas particulier du triangle.

(2) La démonstration générale et analitique tant de cette propriété des courbes du second degré, que de la propriété analogue des surfaces de ce degré, sera le sujet d'un article dans ces annales.

la corde qui joint les points de contact de ses côtés avec le cercle, se trouve par là même assujettie à passer par un certain point qui est aussi donné (1).

Puis donc que les sommets des angles du polygone demandé doivent être situés sur m droites données, il en résulte que, si l'on forme un polygone inscrit d'un pareil nombre de côtés, qui ait les sommets de ses angles aux points où le premier touche le cercle donné, les côtés de ce dernier prolongés, s'il le faut, passeront par m points donnés. Il est de plus évident que, le polygone inscrit étant construit, il suffira, pour former l'autre, de mener, par les sommets des angles de celui-ci, des tangentes au cercle auquel il est inscrit.

Le problème par lequel on propose de circonscrire à un cercle donné un polygone de m côtés, qui ait les sommets de ses angles sur m droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle, revient donc à celui où l'on proposerait d'inscrire au cercle donné un polygone de m côtés, dont les côtés, prolongés ou non prolongés, passassent par m points donnés (2).

---

(1) Ce point peut être facilement déterminé de plusieurs manières différentes. Soit en effet C le centre du cercle donné, et D la droite donnée.

On pourra d'abord abaisser de C sur D, une perpendiculaire, et si A est son pied, et B le point où elle coupe le cercle donné, en prenant sur elle un point P tel que CP soit troisième proportionnelle à CA et CB ; le point P sera le point cherché.

Autrement, 1.° Si la droite D ne rencontre pas le cercle donné, en désignant toujours par A le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur D ; si, par ce point A, on mène deux tangentes au cercle, et qu'on joigne par une corde les points de contact de ces tangentes avec le cercle ; l'intersection P de cette corde avec la perpendiculaire sera le point cherché.

2.° Si la droite D coupe le cercle, il suffira de mener des tangentes à ce cercle par les deux points où elle le coupera, et l'intersection P de ces tangentes sera le point cherché.

Il est aisé de voir, d'après ces constructions, ce qu'il y aurait à faire si, au contraire, le point P étant donné, il était question de déterminer la droite D à laquelle il répond.

(2) Il est visible, par ce qu'on a dit plus haut, que réciproquement ce dernier problème peut être ramené au premier.

Or, ce dernier problème a été traité, avec beaucoup de soin et de détails, par un grand nombre d'illustres géomètres (1).

Le problème proposé est donc résolu, puisque sa résolution est ramenée à celle d'un autre problème que depuis long-temps on sait résoudre.

Et, d'autant que ce dernier n'admet que deux solutions au plus, il est certain que le premier n'en saurait admettre un plus grand nombre.

---

(1) Voyez sur-tout, pour ce qui concerne l'histoire de ce problème, la *Géométrie de position*, par M. *Carnot*; Paris 1803, page 383; et les *Élémens d'Analise géométrique et d'Analise algébrique*, par M. *S. Lhuilier*; Genève 1809, page 279.