ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Dynamique. De la rotation des corps autour de trois axes non rectangulaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 101-116
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__101_0>

DYNAMIQUE.

De la rotation des corps autour de trois axes non rectangulaires.

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

On connaît la manière de décomposer une rotation, faite autour d'un axe donné, en trois autres rotations faites autour de trois axes perpendiculaires entre eux. Dans ce mémoire, nous nous proposons d'enseigner comment une rotation, autour d'un axe donné, peut être décomposée en trois autres rotations faites autour de trois axes formant, deux à deux, des angles quelconques.

Problème I.

1. *Étant donné les coordonnées rectangulaires des deux extrémités d'un arc de grand cercle appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine, et dont le rayon est l'unité, déterminer le cosinus de cet arc ?*

Soient A et B les deux extrémités de l'arc dont il s'agit ; soient p, q, r, les coordonnées de la première, et p', q', r', celles de la seconde, le cosinus demandé sera égal à l'unité moins la moitié du quarré de la corde de AB (1). Ce dernier quarré est

$$(p-p')^2+(q-q')^2+(r-r')^2 ;$$

(1) En vertu de la formule connue : $\text{Cos.}\, x=1-2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x^2$

(*Note des éditeurs.*)

et, à cause de

$$p^2+q^2+r^2=1 \qquad \text{et} \qquad p'^2+q'^2+r'^2=1,$$

il revient à

$$2(1-pp'-qq'-rr');$$

on aura donc :

$$\text{Cos.AB}=pp'+qq'+rr'.$$

2. Si l'arc AB est un quart de circonférence, on aura :

$$pp'+qq'+rr'=0;$$

en outre, l'expression de Cos. AB renferme tout ce qui peut concerner la relation entre deux systèmes de coordonnées, dont un est rectangulaire.

3. Le sinus de l'arc AB n'admet point de forme rationnelle. Toutefois, le quarré de ce sinus étant égal à cette somme de trois quarrés :

$$(pq'-qp')^2+(qr'-rq')^2+(rp'-pr')^2;$$

on voit que, si l'on considère p', q', r', comme représentant trois forces tant pour leur intensité que pour leurs application et direction, les racines

$$pq'-qp', \qquad qr'-rq', \qquad rp'-pr',$$

exprimeront les différences des momens de rotation de ces trois forces autour des trois axes rectangulaires p, q, r.

Problème II.

4. *Connaissant les trois côtés d'un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité ; et étant donné les coordonnées des sommets de deux des angles de ce triangle, déterminer les coordonnées du sommet du troisième ?*

Désignons par les grandes lettres A, B, C les angles du triangle; par les petites a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés, et soit C l'angle du sommet duquel il s'agit de trouver les coordonnées.

Soient p, q, r, les coordonnées du point A; soient p', q', r', les coordonnées du point B; soient x, y, z les coordonnées du point C; soit enfin désignée par T^2 la fonction connue :

$$1-\text{Cos.}^2 a-\text{Cos.}^2 b-\text{Cos.}^2 c+2\,\text{Cos.}\,a.\,\text{Cos.}\,b.\,\text{Cos.}\,c.$$

Cette fonction joue un très-grand rôle dans le calcul des triangles sphériques. Si l'on fait la somme des trois côtés $a+b+c=2s$, on aura :

$$T^2=4\,\text{Sin.}\,s.\,\text{Sin.}(s-a).\,\text{Sin.}(s-b).\,\text{Sin.}(s-c).$$

Elle apprend immédiatement à trouver les angles, moyennant les formules qui suivent :

$$T=\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,C.$$

$$T=\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,c.\,\text{Sin.}\,A.$$

$$T=\text{Sin.}\,c.\,\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,B.$$

Le radical T peut être donné sous une forme entièrement rationnelle, en introduisant les coordonnées des trois sommets A, B, C. On obtient ainsi pour T les trois expressions parfaitement identiques :

$$T=(qr'-rq')x+(rp'-pr')y+(pq'-qp')z\,;$$

$$T=(q'z-r'y)p+(r'x-p'z)q+(p'y-q'x)r\,;$$

$$T=(ry-qz)p'+(pz-rx)q'+(qx-py)r'.$$

En vertu de ce qui précède, on aura, pour la solution du problème, les trois équations

$$px+qy+rz=\text{Cos.}\,b.$$

$$p'x+q'y+r'z=\text{Cos.}\,a.$$

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

La détermination des trois inconnues ne suppose ensuite que les principes connus de l'algèbre. Il ne faut pas oublier que

$$p^2+q^2+r^2=1\ ,$$

$$p'^2+q'^2+r'^2=1\ ,$$

$$pp'+qq'+rr'=\text{Cos.}\ c.$$

De ces trois équations, on déduira celles qui suivent :

$$(pq'-qp')^2+(pr'-rp')^2=p^2-2pp'\text{Cos.}c+p'^2\ ;$$

$$(qr'-rq')^2+(qp'-pq')^2=q^2-2qq'\text{Cos.}c+q'^2\ ;$$

$$(rp'-pr')^2+(rq'-qr')^2=r^2-2rr'\text{Cos.}c+r'^2\ ;$$

et ces réductions sont nécessaires pour donner aux trois inconnues toute la simplicité que la nature du problème permet.

Si, ensuite, pour abréger, l'on fait :

$$\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\text{Cos.}c=\text{M}\ ,$$

$$\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\text{Cos.}a=\text{N}\ ;$$

on trouvera, après les réductions :

$$x\text{Sin.}^2c=p\text{N}+p'\text{M}+(qr'-rq')\,\text{T}\ ;$$

$$y\text{Sin.}^2c=q\text{N}+q'\text{M}+(rp'-pr')\,\text{T}\ ;$$

$$z\text{Sin.}^2c=r\text{N}+r'\text{M}+(pq'-qp')\,\text{T}\ ;$$

et le problème sera résolu; il admet deux solutions, à cause de l'ambiguité du radical T.

5. *Corollaire I.* Les deux solutions se confondent en une seule, lorsque le point C se trouve sur l'arc AB, ou sur son prolongement. Le radical T doit donc disparaître alors; ainsi, si l'on demande l'équation générale de condition, pour qu'un troisième point C de la surface sphérique, dont les coordonnées sont x, y, z, se trouve sur l'arc de grand cercle dont la position est déterminée par les deux points A et B, dont les coordonnées respectives sont p, q,

r, p', q', r'; cette équation de condition sera : $T=0$, ou

$$(qr'-rq')x+(rp'-pr')y+(pq'-qp')z=0.$$

6. *Corollaire II.* On peut, d'après cela, se proposer de déterminer un point C sur l'arc AB, ou un point C′ sur son prolongement opposé à B, distant du point A d'une quantité b, mesurée sur le grand cercle dont AB fait partie. S'il s'agit du point C, on aura $b=a+c$, d'où $a=b-c$; ainsi :

$$M=\text{Sin}.b.\,\text{Sin}.c\,; \qquad N=-\text{Sin}.c.\,\text{Sin}.(b-c)\,;$$

d'où il résulte :

$$x\text{Sin}.c=p'\,\text{Sin}.b-p\,\text{Sin}.(b-c).$$

$$y\text{Sin}.c=q'\,\text{Sin}.b-q\,\text{Sin}.(b-c).$$

$$z\text{Sin}.c=r'\,\text{Sin}.b-r\,\text{Sin}.(b-c).$$

Si, au contraire, il est question du point C′, on aura $b=a-c$; d'où $a=b+c$; ainsi :

$$M=-\text{Sin}.b\,\text{Sin}.c\,; \qquad N=\text{Sin}.c.\,\text{Sin}.(b+c)\,;$$

d'où il résulte :

$$x\text{Sin}.c=p\,\text{Sin}.(b+c)-p'\,\text{Sin}.b.$$

$$y\text{Sin}.c=q\,\text{Sin}.(b+c)-q'\,\text{Sin}.b.$$

$$z\text{Sin}.c=r\,\text{Sin}.(b+c)-r'\,\text{Sin}.b.$$

7. *Corollaire III.* Et si, dans cette même hypothèse, l'arc AC ou AC′ devait être égal à un quart de circonférence, on aurait, pour déterminer la position des deux points C et C′, éloignés de A d'un arc $b=\frac{1}{2}\varpi$, les équations qui suivent :

$$\text{Pour C}\left\{\begin{array}{l} x\text{Sin}.c=p'-p\,\text{Cos}.c. \\ y\text{Sin}.c=q'-q\,\text{Cos}.c. \\ z\text{Sin}.c=r'-r\,\text{Cos}.c. \end{array}\right.$$

$$\text{Pour } C' \left\{ \begin{array}{l} x\text{Sin}.c = p\,\text{Cos}.c - p'. \\ y\text{Sin}.c = q\,\text{Cos}.c - q'. \\ z\text{Sin}.c = r\,\text{Cos}.c - r'. \end{array} \right.$$

8. *Corollaire IV.* L'arc $AB=c$ étant toujours supposé donné de grandeur et de position ; si, en supposant que le troisième point C du triangle est le pôle du côté opposé AB, on demande les coordonnées x, y, z, de ce pôle ; on aura, dans ce cas, $b=a=\frac{1}{2}\varpi$; ainsi $M=N=0$ et $T=\text{Sin}.c$; d'où il résulte :

$$x\text{Sin}.c = qr' - rq' ;$$

$$y\text{Sin}.c = rp' - pr' ;$$

$$z\text{Sin}.c = pq' - qp'.$$

9. *Corollaire V.* Et si, dans ce dernier cas, l'arc $AB=c$ était lui-même un quart de circonférence, on aurait, pour les coordonnées du pôle de cet arc, les valeurs qui suivent :

$$x = qr' - rq' ;$$

$$y = rp' - pr' ;$$

$$z = pq' - qp'.$$

Problème III.

10. *Un arc de grand cercle, appartenant à une sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées rectangulaires, et dont le rayon est l'unité, fait autour de l'une de ses extrémités, et sans quitter la sphère, un mouvement angulaire assez petit pour que le cosinus de l'angle sphérique décrit puisse sensiblement se confondre avec l'unité, et son sinus avec cet angle lui-même. On connaît les coordonnées des deux extrémités de l'arc, dans sa situation primitive, ainsi que la grandeur du mouvement angulaire qui a eu lieu, et*

l'on demande, pour la seconde situation du même arc, les coordonnées de celle de ses extrémités qui, dans le mouvement, a changé de situation ?

Soit c la longueur de l'arc dont il s'agit ; soit A l'extrémité de cet arc autour de laquelle le mouvement a eu lieu, et soit désigné par la même lettre l'angle sphérique décrit ; soit de plus B l'autre extrémité du même arc dans sa situation primitive, et C le point où elle parvient par suite du changement qui arrive dans sa position ; soit enfin a l'arc de grand cercle qui joint les points B et C.

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, pour rendre applicables au cas actuel les formules générales déjà trouvées, il faudra d'abord y faire $b=c$, ce qui donnera :

$$\mathrm{M}=\mathrm{Cos.}\,a-\mathrm{Cos.}^2\,c.$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{Cos.}\,c\,(1-\mathrm{Cos.}\,a).$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{Sin.}\,b.\ \mathrm{Sin.}\,c.\ \mathrm{Sin.}\,\mathrm{A}=\mathrm{Sin.}^2\,c.\ \mathrm{Sin.}\,\mathrm{A}.$$

Il faudra ensuite, à la place du côté a, introduire l'angle opposé A ; c'est à quoi l'on parviendra au moyen de la formule : $1-\mathrm{Cos.}\,a=\mathrm{Sin.}^2\,c\,(1-\mathrm{Cos.}\ \mathrm{A})$ (1) ; mais, comme on s'est permis de supposer $\mathrm{Sin.}\,\mathrm{A}=\mathrm{A}$ et $\mathrm{Cos.}\,\mathrm{A}=1$, il en résultera $1-\mathrm{Cos.}\,a=0$, d'où on conclura :

$$\mathrm{M}=\mathrm{Sin.}^2\,c\,;\quad \mathrm{N}=0\,;\quad \mathrm{T}=\mathrm{A}.\ \mathrm{Sin.}^2\,c\,;$$

ce qui donnera finalement :

$$x=p'+(qr'-rq')\,\mathrm{A}\,;$$

$$y=q'+(rp'-pr')\,\mathrm{A}\,;$$

$$z=r'+(pq'-qp')\,\mathrm{A}.$$

---

(1) Cette formule n'est autre chose que ce que devient l'équation fondamentale : $\mathrm{Sin.}\,b.\ \mathrm{Sin.}\,c.\ \mathrm{Cos.}\,\mathrm{A}=\mathrm{Cos.}\,a-\mathrm{Cos.}\,b.\ \mathrm{Cos.}\,c$, dans le cas particulier où $b=c$.

(*Note des éditeurs.*)

Problème IV.

11. *On a fait tourner successivement un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité, autour des sommets de ses trois angles ; le mouvement angulaire autour de chacun est supposé assez petit pour que le sinus de l'angle décrit soit censé se confondre avec cet angle même, et son cosinus avec l'unité. On connaît la grandeur de chacun des mouvemens angulaires ; on connaît de plus les coordonnées primitives des sommets des trois angles du triangle sphérique ; on connaît enfin les coordonnées primitives d'un certain point de la surface de la sphère liée invariablement avec ce triangle ; et on propose de déterminer quelles seront les coordonnées de ce même point, lorsque les trois mouvemens auront été effectués ?*

Désignons par A, B, C, tant les sommets des trois angles du triangle, que les mouvemens angulaires qui doivent avoir lieu autour de chacun d'eux ; supposons que la première rotation ait lieu autour de A, la seconde autour de B et la troisième autour de C ; soit T le point considéré sur la sphère, et supposons que la première rotation le transporte en U, la seconde en V, et la troisième en W ; c'est de ce dernier point qu'il s'agit d'avoir les coordonnées, en fonction de celles de A, B, C, T, et des angles A, B, C.

Pour y parvenir, soient :

m, n, o, ... les coordonnées de A ;
p, q, r, ... les coordonnées de B ;
s, t, u, ... les coordonnées de C ;
α, β, γ, ... les coordonnées de T ;
x, y, z, ... les coordonnées de U ;
x', y', z', ... les coordonnées de V ;
x'', y'', z'', ... les coordonnées de W ;

la

la simple application des formules du problème précédent nous fera voir que,

Pour la première rotation autour de A,

$$x=\alpha+(n\gamma-o\beta)\,\mathrm{A}\,;$$
$$y=\beta+(o\alpha-m\gamma)\,\mathrm{A}\,;$$
$$z=\gamma+(m\beta-n\alpha)\,\mathrm{A}\,;$$

Pour la rotation autour de B,

$$x'=x+(qz-ry)\,\mathrm{B}\,;$$
$$y'=y+(rx-pz)\,\mathrm{B}\,;$$
$$z'=z+(py-qx)\,\mathrm{B}\,;$$

Pour la rotation autour de C,

$$x''=x'+(tz'-uy')\,\mathrm{C}\,;$$
$$y''=y'+(ux'-sz')\,\mathrm{C}\,;$$
$$z''=z'+(sy'-tx')\,\mathrm{C}\ (1)\,:$$

ce qui donne, moyennant deux simples substitutions successives, et en supprimant les quarrés de A, B, C, les formules finales qui suivent :

$$x''=\alpha+(n\gamma-o\beta)\,\mathrm{A}+(q\gamma-r\beta)\,\mathrm{B}+(t\gamma-u\beta)\,\mathrm{C}\,;$$
$$y''=\beta+(o\alpha-m\gamma)\,\mathrm{A}+(r\alpha-p\gamma)\,\mathrm{B}+(u\alpha-s\gamma)\,\mathrm{C}\,;$$
$$z''=\gamma+(m\beta-n\alpha)\,\mathrm{A}+(p\beta-q\alpha)\,\mathrm{B}+(s\beta-t\alpha)\,\mathrm{C}\,;$$

et le problème sera résolu.

---

(1) A la rigueur, il n'y a que la première rotation qui s'exécute réellement de la manière qu'on le suppose ici : attendu que le point B éprouve un déplacement, et le point C deux, avant que la rotation ait lieu autour de l'un et de l'autre ; mais la petitesse supposée des mouvemens angulaires permet de ne point faire entrer ces déplacemens en considération ; et, en négligeant d'y avoir égard, les calculs se simplifient considérablement, sans que les conclusions auxquelles l'auteur se propose de parvenir soient affectées de la moindre erreur, ainsi qu'il serait aisé de s'en convaincre, en comparant son procédé à un autre plus rigoureux.

(*Note des éditeurs.*)

12. Pour ramener cette solution générale au cas ordinaire, où le triangle ABC étant tri-rectangle, les sommets de ses angles sont sur les axes des coordonnées, il faudra considérer que, dans ce dernier cas, on a :

$$m=1\,;\quad n=0\,;\quad o=0\,;$$
$$p=0\,;\quad q=1\,;\quad r=0\,;$$
$$s=0\,;\quad t=0\,;\quad u=1:$$

ce qui donne :

$$x''=\alpha+\gamma B-\beta C\,;$$
$$y''=\beta+\alpha C-\gamma A\,;$$
$$z''=\gamma+\beta A-\alpha B:$$

ce sont les formules connues du mouvement de rotation composé (1).

Problème V.

13. *Un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité, a éprouvé successivement trois rotations autour des sommets de ses angles. Les mouvemens angulaires sont supposés assez petits, pour que les sinus des angles décrits puissent sensiblement être pris pour ces angles eux-mêmes, et leurs cosinus pour l'unité. On connaît la grandeur des mouvemens angulaires qui ont eu lieu, et les coordonnées primitives des sommets des trois angles du triangle, et on demande de déterminer ce que deviennent ces mêmes coordonnées, par l'effet des trois rotations ?*

Désignons par A, B, C, tant les sommets des trois angles du triangle, dans sa situation primitive, que les mouvemens angulaires

(1) Voyez la *Méchanique analitique*, numéros 5 et suivans.
(*Note des éditeurs.*)

qui ont lieu autour de chacun d'eux ; supposons que la première rotation ait lieu autour de A, la seconde autour de B, et la troisième autour de C; soient enfin A′, B′, C′, les positions que prennent les points A, B, C, par l'effet des trois rotations, il s'agit de déterminer les coordonnées des trois points A′, B′, C′, en fonction de celles des trois points A, B, C, et des quantités angulaires A, B, C.

Or, le problème précédent renferme entièrement la solution de celui-ci. Il suffit en effet de supposer, dans celui-là, que le point T se trouve successivement en A, B, C, et le point W, en A′, B′, C′.

Ainsi, pour trouver les coordonnées x, y, z, du point A′, il faudra remplacer, dans les formules précédentes, les lettres α, β, γ, par m, n, o; ce qui donnera :

$$x = m + (oq - nr)B + (ot - nu)C;$$

$$y = n + (mr - op)B + (mu - os)C;$$

$$z = o + (np - mq)B + (ns - mt)C.$$

Pour trouver les coordonnées x, y, z, du point B′, il faudra remplacer, dans les mêmes formules, les lettres α, β, γ, par p, q, r; ce qui donnera :

$$x = p + (nr - oq)A + (tr - uq)C;$$

$$y = q + (op - mr)A + (up - sr)C;$$

$$z = r + (mq - np)A + (sq - tp)C.$$

Pour trouver, enfin, les coordonnées x, y, z, du point C′, il faudra remplacer, dans ces mêmes formules, les lettres α, β, γ, par s, t, u; ce qui donnera :

$$x = s + (nu - ot)A + (qu - rt)B;$$

$$y = t + (os - mu)A + (ns - pu)B;$$

$$z = u + (mt - ns)A + (pt - qs)B:$$

et le problème sera résolu.

14. En vertu de ces trois rotations, le point A aura décrit l'arc AA'; le point B, l'arc BB'; et le point C, l'arc CC'. Par les suppositions du problème, ces trois arcs pourront être confondus avec leurs sinus; et on trouve les quarrés de ces derniers par la simple application de la formule donnée (3). En employant les réductions déjà enseignées, on aura finalement :

$$(AA')^2 = B^2\text{Sin.}^2 c + 2BC(\text{Cos.}a - \text{Cos.}b.\text{Cos.}c) + C^2\text{Sin.}^2 b\ ;$$

$$(BB')^2 = C^2\text{Sin.}^2 a + 2CA(\text{Cos.}b - \text{Cos.}c.\text{Cos.}a) + A^2\text{Sin.}^2 c\ ;$$

$$(CC')^2 = A^2\text{Sin.}^2 b + 2AB(\text{Cos.}c - \text{Cos.}a.\text{Cos.}b) + B^2\text{Sin.}^2 a.$$

Problème VI.

15. *Les mêmes choses étant supposées que dans le problème précédent, on demande de déterminer, dans l'intérieur du triangle, la position du point qui, à la fin des trois rotations, se retrouvera dans sa situation primitive ?*

Désignant, comme dans le problème IV, par α, β, γ, les coordonnées de ce point, au commencement des trois rotations, et par x'', y'', z'', les coordonnées du même point; à la fin de ces rotations, on aura :

$$x'' = \alpha\ , \qquad y'' = \beta\ , \qquad z'' = \gamma\ ;$$

égalant donc à *zéro* les trois différences

$$x'' - \alpha\ , \qquad y'' - \beta\ , \qquad z'' - \gamma\ ;$$

on obtiendra les trois équations qui suivent :

$$o = (n\gamma - o\beta)A + (q\gamma - r\beta)B + (t\gamma - u\beta)C\ ;$$

$$o = (o\alpha - m\gamma)A + (r\alpha - p\gamma)B + (u\alpha - s\gamma)C\ ;$$

$$o = (m\beta - n\alpha)A + (p\beta - q\alpha)B + (s\beta - t\alpha)C.$$

Par la nature du problème, chacune de ces trois équations doit être une conséquence nécessaire des deux autres; ce dont on peut en effet s'assurer facilement. Par leur moyen, on ne pourrait donc déterminer que le rapport entre les trois inconnues α, β, γ; mais, en y ajoutant la quatrième équation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\ ;$$

le problème devient entièrement déterminé. Si, pour abréger, on fait :

$$W^2=A^2+B^2+C^2+2BC\ \text{Cos}.a+2CA\ \text{Cos}.b+2AB\ \text{Cos}.c\ ,$$

on aura finalement :

$$\alpha W=mA+pB+sC\ ;$$

$$\beta W=nA+qB+tC\ ;$$

$$\gamma W=o\,A+rB+uC\ :$$

et le problème sera résolu.

16. Si nous désignons par la lettre W le point, dans l'intérieur du triangle ABC, dont on vient de déterminer la position, par rapport aux trois axes primitifs, supposés perpendiculaires entre eux; on trouvera la position de ce même point, par rapport aux sommets des trois angles du triangle ABC, moyennant les formules connues (1), savoir :

$$\text{Cos}.AW=m\alpha+n\beta+o\gamma\ ;$$

$$\text{Cos}.BW=p\alpha+q\beta+r\gamma\ ;$$

$$\text{Cos}.CW=s\alpha+t\beta+u\gamma\ :$$

ce qui devient, après la substitution et les réductions :

$$W\,\text{Cos}.AW=A+B\ \text{Cos}.c+C\ \text{Cos}.b$$

$$W\,\text{Cos}.BW=B+C\ \text{Cos}.a+A\ \text{Cos}.c$$

$$W\,\text{Cos}.CW=C+A\ \text{Cos}.b+B\ \text{Cos}.a.$$

17. Si, en employant les formules et réductions déjà enseignées, on calcule les cosinus des arcs $A'W$, $B'W$, $C'W$, on trouvera qu'ils ne diffèrent de ceux des arcs AW, BW, CW, que dans

les secondes puissances et produits des quantités angulaires A, B, C, et qu'ainsi les uns peuvent être censés égaux aux autres. On aura donc :

$$AW=A'W\ ; \qquad BW=B'W\ ; \qquad CW=C'W.$$

18. Otant les quarrés des cosinus de l'unité, on obtiendra les quarrés des sinus. Si l'on emploie les réductions déjà enseignées, on trouvera :

$$W^2\text{Sin.}^2AW=B^2\text{Sin.}^2c+2BC\,(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)+C^2\text{Sin.}^2b\ ;$$

$$W^2\text{Sin.}^2BW=C^2\text{Sin.}^2a+2CA\,(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)+A^2\text{Sin.}^2c\ ;$$

$$W^2\text{Sin.}^2CW=A^2\text{Sin.}^2b+2AB\,(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)+B^2\text{Sin.}^2a.$$

19. Les seconds membres de ces équations sont (14) les quarrés même des petits arcs AA′, BB′, CC′, décrits par les sommets des angles du triangle, en vertu des trois rotations successives. Tirant donc la racine quarrée de part et d'autre, il viendra :

$$W\text{Sin.}AW=AA'\ ; \quad W\text{Sin.}BW=BB'\ ; \quad W\text{Sin.}CW=CC'.$$

20. Mais, en vertu des formules connues de la trigonométrie sphérique, on a ;

$$AA'=AWA'\text{Sin.}AW\ ; \quad BB'=BWB'\text{Sin.}BW\ ; \quad CC'=CWC'\text{Sin.}CW\ (*).$$

Multipliant ces équations par les précédentes, il viendra, en supprimant les facteurs communs, et renversant,

$$AWA'=W\ ; \qquad BWB'=W\ ; \qquad CWC'=W\ ;$$

de manière que ces trois angles sont égaux entre eux et à la quantité radicale W.

(*) En vertu de la proportionnalité des sinus des angles au sinus des côtés opposés, on a : $\text{Sin.}AA'W.\text{Sin.}AA'=\text{Sin.}AWA'\text{Sin.}AW$; mais, à raison de la petitesse de l'angle AWA′, on peut supposer $\text{Sin.}AA'W=1$, $\text{Sin.}AA'=AA'$ et $\text{Sin.}AWA'=AWA'$; ce qui rend cette équation identique avec la première des trois ci-dessus: il en serait de même pour les deux autres.

(*Note des éditeurs.*)

21. Il résulte donc de cette analise, que le triangle sphérique ABC, en éprouvant les trois rotations successives, la première égale à A, la seconde égale à B, la troisième égale à C, autour des trois axes qui sont désignés par ces mêmes lettres, se sera effectivement tourné autour d'un point W, situé dans l'intérieur du triangle, dont la position sera déterminée (16) par les trois formules :

$$\text{Cos.AW} = \frac{A + B\ \text{Cos.}c + C\ \text{Cos.}b}{W};$$

$$\text{Cos.BW} = \frac{B + C\ \text{Cos.}a + A\ \text{Cos.}c}{W};$$

$$\text{Cos.CW} = \frac{C + A\ \text{Cos.}b + B\ \text{Cos.}a}{W};$$

et qu'il aura décrit, autour de ce point, un angle égal à W, c'est-à-dire, à

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + 2BC\ \text{Cos.}a + 2CA\ \text{Cos.}b + 2AB\ \text{Cos.}c}$$

22. Réciproquement, s'il fallait décomposer la rotation donnée W, en trois autres rotations A, B, C, faites autour de trois axes dont la position serait donnée par rapport au point W, il faudrait regarder A, B, C, comme les quantités inconnues d'un problème, dont les quantités connues seraient : la rotation donnée W ; les arcs $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, qui seraient les côtés du triangle sphérique formé par les trois axes ; et les arcs AW, BW, CW, qui déterminent la position du point W, par rapport à ces mêmes axes. Dans la résolution de ces trois équations, on rencontrera encore la fonction,

$$T^2 = 1 - \text{Cos.}^2 a - \text{Cos.}^2 b - \text{Cos.}^2 c + 2\text{Cos.}a.\ \text{Cos.}b.\ \text{Cos.}c.$$

Si ensuite on fait, pour abréger :

$$\text{Cos.AW} = p, \qquad \text{Cos.BW} = q, \qquad \text{Cos CW} = r;$$

on trouvera :

$$A=\frac{W}{T^2}\{p\,\text{Sin.}^2a-q(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a.\,\text{Cos.}b)-r(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\,\text{Cos.}a)\}$$

$$B=\frac{W}{T^2}\{q\,\text{Sin.}^2b-r(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\,\text{Cos.}c)-p(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a.\,\text{Cos.}b)\}$$

$$C=\frac{W}{T^2}\{r\,\text{Sin.}^2c-p(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\,\text{Cos.}a)-q(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\,\text{Cos.}c)\}$$

le problème sera donc résolu ; et l'on voit qu'il sera possible dans tous les cas.

Strasbourg , le 12 *d'août* 1810.