ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le mois de juillet 1810, ce recueil paraît régulièrement, par livraisons d'environ quatre feuilles ou trente-deux pages, le premier de chaque mois.

Les notes relatives à la rédaction, les mémoires à insérer, ouvrages à annoncer et demandes d'abonnement, peuvent être indifféremment adressés, franc de port :

Aux Rédacteurs des *Annales*, rue d'Avignon, n.° 130, à Nismes, département du Gard ;

Ou à M. *Courcier*, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n.° 57, à Paris.

Le prix de l'abonnement annuel est de 21 fr. pour toute l'étendue de l'Empire, et de 24 fr. pour l'Étranger, le tout franc de port. On est libre, au surplus, de ne souscrire que pour six mois, en payant la moitié du prix de l'abonnement annuel. Il est presque superflu de prévenir que l'on doit acquitter, en souscrivant, le montant de la souscription. On croit devoir, au surplus, indiquer aux souscripteurs la voie de la poste, comme la plus sûre et la plus prompte.

Les Rédacteurs font l'échange de leur recueil contre les autres ouvrages périodiques consacrés aux sciences, dès que ceux-ci leur sont adressés.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	160.
	II.		196.
	III.		260.
	IV.		320.
	V.		352.
	VI.		384.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE et J. E. THOMAS-LAVERNÈDE.

TOME PREMIER.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE LA VEUVE BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1810 ET 1811.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PROSPECTUS.

C'EST une singularité assez digne de remarque que, tandis qu'il existe une multitude de journaux relatifs à la *Politique*, à la *Jurisprudence*, à l'*Agriculture*, au *Commerce*, aux *Sciences physiques et naturelles*, aux *Lettres* et aux *Arts*; *les Sciences exactes*, cultivées aujourd'hui si universellement et avec tant de succès, ne comptent pas encore un seul recueil périodique qui leur soit spécialement consacré (*), un recueil qui permette aux Géomètres d'établir entre eux un commerce ou, pour mieux dire, une sorte de communauté de vues et d'idées; un recueil qui leur épargne les recherches dans lesquelles ils ne s'engagent que trop souvent en pure perte, faute de savoir que déjà elles ont

(*) On ne saurait, en effet, considérer comme tels, le *Journal de l'école polytechnique*, non plus que la *Correspondance* que rédige M. Hachette : recueils très précieux sans doute, mais qui, outre qu'ils ne paraissent qu'à des époques peu rapprochées, sont consacrés presque uniquement aux travaux d'un seul établissement.

été entreprises ; un recueil qui garantisse à chacun la priorité des résultats nouveaux auxquels il parvient ; un recueil enfin qui assure aux travaux de tous une publicité non moins honorable pour eux qu'utile au progrès de la science.

Frappés des nombreux avantages que pouvait présenter la publication d'un tel ouvrage, les rédacteurs de ces *Annales*, long-temps avant qu'ils songeassent à s'en occuper, en avaient conçu le plan et désiré l'existence. Ils avaient même fait, auprès de quelques personnes plus à portée et mieux en état qu'eux de l'exécuter, des démarches pressantes pour les solliciter à l'entreprendre ; et le non succès de ces démarches a seul pu les enhardir à s'en charger eux-mêmes. Ils osent croire que tous ceux qui aiment et cultivent les sciences exactes applaudiront à leur zèle et s'empresseront de seconder leurs efforts ; et que les savans même qui pourraient le mieux se passer des secours qu'un ouvrage de la nature de celui-ci est susceptible d'offrir, ne dédaigneront pas néanmoins d'accorder leur encouragement honorable à une entreprise dont le succès ne peut que contribuer encore à l'avancement de ces mêmes sciences qui, en échange de tant de méthodes précieuses et de vérités importantes dont il les ont enrichies, leur ont procuré un si haut degré d'illustration.

Les Rédacteurs des *Annales* sentent fort bien tout ce que la distance où ils se trouvent du centre des lumières peut ajouter de difficultés à leur entreprise ; mais, plus jaloux de leur réputation et de l'estime des savans que soigneux de leurs intérêts pécuniaires, ils sont résolus de faire tomber sur eux seuls tous les sacrifices auxquels la position peu commode où ils se trouvent doit inévitablement les exposer ; et de n'épargner aucun soin, aucune dépense, pour que leur recueil ne soit ni moins soigné ni plus coûteux qu'il pourrait l'être, s'il partait du sein même de la capitale.

Ces *Annales* seront principalement consacrées aux *Mathématiques pures*, et sur-tout aux recherches qui auront pour objet d'en perfectionner et d'en simplifier l'enseignement. Le titre de l'ouvrage annonce assez d'ailleurs que, si l'on n'y doit rien rencontrer d'absolument étranger au *Calcul*, à la *Géométrie* et à la *Mécanique rationnelle*, les rédacteurs sont néanmoins dans l'intention de n'en rien exclure de ce qui pourra donner lieu à des applications de ces diverses branches des sciences exactes. Ainsi, sous ce rapport, *l'Art de conjecturer*, *l'Économie politique*, *l'Art militaire*, *la Physique générale*, *l'Optique*, *l'Acoustique*, *l'Astronomie*, *la Géographie*, *la Chronologie*, *la Chimie*, *la Minéralogie*, *la Météorologie*, *l'Architecture civile*, *la Fortification*, *l'Art nautique* et les *Arts mécaniques*, enfin, pourront y trouver accès. On aura soin, au surplus, de consulter, à cet égard, le vœu du plus grand nombre des souscripteurs, et de s'y conformer scrupuleusement.

Avec les matériaux qu'ils ont amassés depuis long temps, les Rédacteurs des *Annales* pourraient aisément fournir seuls, durant plusieurs années, à la composition de leur recueil; mais ils comptent beaucoup moins sur leurs propres ressources que sur les secours que voudront bien leur fournir leurs abonnés et correspondans. Ils se feront même une loi de n'occuper le public de leur travaux personnels, qu'autant que l'intérêt que ces travaux pourront offrir, ou l'insuffisance des autres matières, pourra leur servir d'excuse.

Chaque numéro des *Annales* offrira un ou plusieurs *Théorèmes à démontrer*, un ou plusieurs *Problèmes à résoudre*. Les Rédacteurs, dans le choix de ces théorèmes et problèmes, donneront la préférence aux énoncés qui pourront leur être indiqués par leurs correspondans; et ils consigneront, dans leur recueil, les démonstrations et solutions qui leur seront parvenues; ils espèrent ainsi provoquer chez les jeunes géomètres une utile et louable émulation. Personne n'ignore d'ailleurs combien ces sortes de défis ont ajouté de perfectionnement à l'analise, au commencement du dernier siècle; et il n'est point déraisonnable de penser qu'en les renouvelant, on peut, peut-être, lui préparer encore de nouveaux progrès.

Par les mêmes motifs, les Rédacteurs des *Annales* auront soin d'insérer dans leur recueil les programmes des prix proposés par les diverses sociétés savantes de l'Europe : toutes les fois du moins que les concours ouverts auront pour objet des questions relatives aux sciences exactes, ou aux diverses applications dont elles peuvent être susceptibles.

Enfin, un objet auquel on se propose de donner, dans ces *Annales*, une attention toute particulière, à raison de l'extrême utilité que le public peut en retirer, c'est l'annonce et l'analise des ouvrages nouveaux, tant nationaux qu'étrangers, relatifs aux sciences mathématiques et aux autres sciences qui en dépendent. Ici deux extrêmes sont également à éviter, savoir : une censure maligne et décourageante qui ferait redouter aux auteurs de confier aux Rédacteurs des *Annales* le soin de faire connaître leurs productions ; et une condescendance non moins coupable qui, en donnant le change sur le mérite réel de ces productions, tromperait l'attente du public, et manquerait ainsi totalement le but. Heureusement, la nature même des ouvrages dont on aura à rendre compte dans ce recueil, permet de tenir facilement, entre l'un et l'autre extrêmes, un milieu convenable : ces sortes d'ouvrages valent en effet, généralement parlant, beaucoup plus par le fond des idées que par la manière dont elles sont présentées ; et si l'indication pure et simple des matières dont se compose un ouvrage de goût et d'imagination, et de la liaison qui règne entre elles, n'en peut donner qu'une idée très-imparfaite, une pareille indication suffit, le plus souvent, pour mettre les savans en mesure d'asseoir leur opinion sur un traité de géométrie ou d'analise. Les Rédacteurs des *Annales* s'attacheront donc principalement à présenter, des ouvrages qui leur seront adressés, un compte parfaitement exact, et d'une étendue proportionnée à leur importance, en se rendant très-sobres, d'ailleurs, tant de louanges que de blâme ; et ils espèrent concilier ainsi ce qu'ils doivent aux auteurs, au public et à eux-mêmes. En un mot, les Rédacteurs feront tous leurs efforts pour que ce recueil soit exactement tel qu'ils eussent pu désirer de le trouver, si d'autres qu'eux en avaient entrepris la rédaction.

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

STATIQUE.

Recherche directe des conditions de l'équilibre, entre des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et appliquées à des points invariablement liés entre eux;

Par M. GERGONNE.

LES conditions de l'équilibre entre des puissances appliquées à un système solide libre, se déduisent fort aisément, comme l'on sait, du *principe des vitesses virtuelles*; mais, dans les élémens de Statique, où l'on ne fait pas usage de ce principe, on se trouve obligé de déduire directement ces conditions du *Principe de la composition des forces*. Il existe pour cela un grand nombre de méthodes diverses, et chaque jour en voit éclore de nouvelles encore; mais leur multitude même semble prouver qu'aucune d'elles, jusqu'ici, n'a réuni cette simplicité, cette généralité, cette rigueur et cette élégance qui seules peuvent entraîner tous les suffrages.

Quelques géomètres, pour parvenir au but, ont eu recours à des figures sur lesquelles ils ont exécuté des constructions; mais, outre que cette manière de procéder rend les méthodes compliquées, embarrassantes à suivre et difficiles à retenir, les résultats auxquels elles conduisent ne sauraient pleinement satisfaire l'esprit, parce qu'ils semblent toujours dépendre de l'hypothèse particulière de laquelle on les a déduits.

Presque tous ont supposé que l'on connaissait déjà les conditions de l'équilibre entre des puissances situées dans un même plan : conditions qu'ils ont au reste, pour la plupart, déterminées d'une manière assez laborieuse. Mais, bien que la recherche de ces conditions semble naturellement devoir précéder celle des conditions de l'équilibre entre des puissances dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, comme néanmoins les premières se trouvent implicitement renfermées dans les dernières, il semble plus simple et plus élégant d'arriver directement à celles-ci, sans supposer que les autres soient déjà connues.

On peut remarquer d'ailleurs que, pour déduire les conditions de l'équilibre dans l'espace de celles de l'équilibre sur un plan, on est obligé de s'appuyer du *principe de l'indépendance des forces rectangulaires* : or, ce principe n'est pas exempt de difficultés, comme M. Poinsot l'a fait voir dans sa *Statique* (*) ; et quand bien même il n'en présenterait aucune, il semblerait plutôt devoir être une conséquence des conditions d'équilibre qu'un moyen de parvenir à ces conditions. On en doit dire autant du *principe des momens*, et de cet autre principe, savoir : que *deux puissances non situées dans un même plan, ne sauraient avoir une résultante* ; le premier, en effet, ne doit plus être envisagé désormais que comme un moyen commode d'énoncer en langue vulgaire des résultats fournis par l'analise; et, quant au dernier, loin qu'il puisse être considéré comme un *axiome*,

(*) Voyez pages 110 et 111.

ce n'est peut-être que des équations même de l'équilibre qu'on peut en déduire une démonstration satisfaisante.

Je dois ajouter enfin que, parmi les méthodes employées jusqu'ici pour parvenir aux conditions de l'équilibre, plusieurs ne font que masquer la difficulté qui naît de l'existence possible des puissances égales et parallèles, agissant en sens contraire, sans être directement opposées, et que d'autres se bornent presque uniquement à montrer que les conditions auxquelles elles conduisent assurent l'équilibre, ou sont une suite de son existence, sans faire voir nettement que ces conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes; ce qui est pourtant le point essentiel dans cette recherche.

On trouvera ici une solution du problème qui me paraît n'être sujette à aucun de ces divers inconvéniens. Bien qu'elle soit assez simple, elle ne suppose néanmoins que le principe de la composition des forces qui concourent en un même point, et celui de la composition des forces parallèles, pour le cas seulement où ces forces admettent une résultante effective. Elle ne repose d'ailleurs que sur cet unique axiome de Statique, savoir: que, *pour qu'un système soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant qu'en y introduisant des puissances arbitraires de nature à avoir à elles seules une résultante effective, le système ainsi modifié ait aussi une résultante effective qui soit identique avec celle des puissances arbitrairement introduites.*

Je n'ignore pas, au surplus, que, par la belle et neuve théorie des couples que nous devons à M. Poinsot, on parvient d'une manière non moins élégante que rigoureuse aux conditions de l'équilibre d'un système de forme invariable; mais, quelque satisfaisante que soit cette théorie, elle me semble plus propre à devenir le sujet d'un traité à part, qu'à être introduite dans les livres élémentaires; il paraît peu naturel, en effet, de baser la Statique, et conséquemment l'édifice entier de la mécanique, sur un cas d'exception que présente le problème de la composition de deux forces parallèles.

Soient P', P'', P''', ... des puissances dirigées dans l'espace d'une manière quelconque, et appliquées à des points invariablement liés entre eux. Soient x', y', z' les coordonnées rectangulaires de l'un des points de la direction de P', considéré comme son point d'application ; soient de plus X', Y', Z', ses composantes parallèles aux axes, et soient adoptées des notations analogues pour les autres puissances du système.

Soient augmentées les puissances X', X'', X''',..... des quantités arbitraires A', A'', A''',....; les puissances Y', Y'', Y''',.... des quantités arbitraires B', B'', B''',....; et enfin les puissances Z', Z'', Z''',.... des quantités arbitraires C', C'', C''',..... les puissances introduites dans le système auront, parallèlement aux axes, trois résultantes partielles $A=\Sigma(A')$, $B=\Sigma(B')$, $C=\Sigma(C')$ (*), lesquelles pourront toujours, à raison de l'indétermination des composantes, être supposées différentes de zéro : on pourra même admettre, en outre, que ces résultantes passent toutes trois par un même point quelconque ; alors, en désignant par a, b, c, les coordonnées de ce point, on aura, par le principe connu de la composition des forces parallèles,

$$a=\frac{\Sigma(B'x')}{B}=\frac{\Sigma(C'x')}{C};$$

$$b=\frac{\Sigma(C'y')}{C}=\frac{\Sigma(A'y')}{A},$$

$$c=\frac{\Sigma(A'z')}{A}=\frac{\Sigma(B'z')}{B};$$

ce qui emportera les conditions

$$\text{(I)}\quad \frac{\Sigma(B'x')}{B}=\frac{\Sigma(C'x')}{C},\ \frac{\Sigma(C'y')}{C}=\frac{\Sigma(A'y')}{A},\ \frac{\Sigma(A'z')}{A}=\frac{\Sigma(B'z')}{B};$$

lesquelles seront satisfaites d'elles-mêmes, lorsqu'il n'y aura dans le

(*) Le symbole $\Sigma(A')$ est employé ici, suivant l'usage, comme une abréviation de $A'+A''+A'''+\dots$; il en faut entendre autant des autres, ainsi que de toutes les notations analogues auxquelles nous aurons recours dans ce qui va suivre.

système

système que la seule puissance P', et qui pourront avoir lieu d'une infinité de manières dans tous les autres cas.

Si, au lieu de composer à part les puissances introduites, nous les considérons comme formant un tout avec celles du système primitif, en posant, pour abréger,

$$\Sigma(X')=X\,, \quad \Sigma(Y')=Y\,, \quad \Sigma(Z')=Z\,;$$

nous aurons, parallèlement aux axes, les trois résultantes partielles

$$X+A\,, \quad Y+B\,, \quad Z+C\,;$$

et nous pourrons, à cause des puissances arbitraires, admettre qu'aucune de ces résultantes n'est nulle, et que de plus elles passent toutes trois par un même point quelconque ; désignant alors par d, e, f, les coordonnées de ce point, nous aurons

$$d=\frac{\Sigma(Y'x')+\Sigma(B'x')}{Y+B}=\frac{\Sigma(Z'x')+\Sigma(C'x')}{Z+C}\,,$$

$$e=\frac{\Sigma(Z'y')+\Sigma(C'y')}{Z+C}=\frac{\Sigma(X'y')+\Sigma(A'y')}{X+A}\,,$$

$$f=\frac{\Sigma(X'z')+\Sigma(A'z')}{X+A}=\frac{\Sigma(Y'z')+\Sigma(B'z')}{Y+B}\,;$$

ce qui emportera les trois nouvelles conditions

$$\text{(II)}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\Sigma(Y'x')+\Sigma(B'x')}{Y+B}=\dfrac{\Sigma(Z'x')+\Sigma(C'x')}{Z+C}\,,\\[2ex]
\dfrac{\Sigma(Z'y')+\Sigma(C'y')}{Z+C}=\dfrac{\Sigma(X'y')+\Sigma(A'y')}{X+A}\,,\\[2ex]
\dfrac{\Sigma(X'z')+\Sigma(A'z')}{X+A}=\dfrac{\Sigma(Y'z')+\Sigma(B'z')}{Y+B}\,;
\end{array}\right.$$

lesquelles, comme les équations (I), seront satisfaites d'elles-mêmes, lorsqu'il n'y aura qu'une puissance unique dans le système primitif, et qui, conjointement avec elles, pourront avoir lieu d'une infinité de manières différentes, lorsque les puissances du système primitif seront au nombre de plus de deux. Il ne pourrait donc y avoir de doute sur la possibilité de la coexistence de ces six conditions, que dans le cas seulement où il n'y aurait que deux puissances P' et P'' dans le système primitif; attendu qu'alors, le nombre des conditions établies se trouvant précisément égal au nombre des puissances A', A'', B', B'', C', C'', introduites dans le système, on pourrait craindre, ou que quelques-unes de ces conditions ne fussent contradictoires, ou qu'elles ne donnassent, pour les puissances A', A'', B', B'', C', C'', des valeurs qui, contrairement à l'hypothèse que nous avons établie, rendissent nulles quelques-unes des six quantités A, B, C, $X+A$, $Y+B$, $Z+C$.

Mais il est facile de dissiper ce soupçon : si en effet on développe les équations (I) pour le cas particulier où le système primitif n'est composé que de deux puissances seulement, il arrive qu'après avoir fait les réductions, chacune d'elles se trouve comportée par les deux autres; elles n'équivalent donc alors qu'à deux équations seulement : on n'a donc réellement, dans ce cas, que cinq équations entre les six forces A', A'', B', B'', C', C''; elles demeurent donc encore indéterminées; elles le sont donc dans tous les cas.

D'après ce qui précède, on voit que la résultante particulière des forces introduites a pour équations

$$C(x-a)=A(z-c) \quad , \quad C(y-b)=B(z-c) \;;$$

et que les équations de la résultante du système modifié sont

$$(Z+C)(x-d)=(X+A)(z-f) \;,$$

$$(Z+C)(y-e)=(Y+B)(z-f) \;.$$

Présentement, pour que le système primitif soit de lui-même en équilibre, il est nécessaire et il suffit que la résultante de ce système modifié soit identique avec celle des puissances arbitrairement introduites : or, cela exige, en premier lieu, que leurs composantes parallèles aux axes soient égales, chacune à chacune ; ce qui donne d'abord

$$\left.\begin{array}{l} X+A=A\ , \\ Y+B=B\ , \\ Z+C=C\ , \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} X=0\ , \\ Y=0\ , \\ Z=0\ , \end{array}\right\} \text{ou enfin} \left\{\begin{array}{l} \Sigma(X')=0\ , \\ \Sigma(Y')=0\ , \\ \Sigma(Z')=0\ . \end{array}\right.$$

Au moyen de ces conditions, les équations (II), les seules qui renferment les puissances du système primitif, se simplifient ; en leur retranchant en outre les équations (I) et chassant des dénominateurs, elles deviennent

$$\text{(III)} \left\{\begin{array}{l} C\Sigma(Y'x')=B\Sigma(Z'x')\ , \\ A\Sigma(Z'y')=C\Sigma(X'y')\ , \\ B\Sigma(X'z')=A\Sigma(Y'z')\ . \end{array}\right.$$

Les équations des deux résultantes deviennent aussi, par suite des mêmes conditions,

$$\left\{\begin{array}{l} C(x-a)=A(z-c)\ ; \\ C(y-b)=B(z-c)\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} C(x-d)=A(z-f)\ , \\ C(y-e)=B(z-f)\ ; \end{array}\right.$$

ces résultantes se trouvent donc déjà parallèles ; il suffit donc, pour qu'elles coïncident, qu'un point de la direction de l'une satisfasse aux équations de l'autre ; on exprimera donc que leur coïncidence a lieu, et conséquemment on complètera les conditions d'équilibre, en écrivant les deux équations

$$\text{(IV)} \left\{\begin{array}{l} C(d-a)=A(f-c)\ , \\ C(e-b)=B(f-c)\ ; \end{array}\right.$$

nous devons donc avoir, outre les trois conditions déjà trouvées, toutes celles que peuvent fournir les cinq équations (III et IV), par l'élimination des arbitraires qu'elles renferment ; or, comme $d-a$, $e-b$, $f-c$ se trouvent déterminées par ce qui précède, et comme d'ailleurs, en posant $\frac{A}{C}=M$ et $\frac{B}{C}=N$, nous n'avons plus que les deux arbitraires M et N, il en résulte que nos cinq équations doivent nous fournir encore trois conditions.

Pour parvenir facilement à ces conditions, soit d'abord chassé A et B des équations (III) au moyen des équations (IV) ; C en disparaîtra aussi, et elles deviendront

$$\frac{\Sigma(Y'x')}{\Sigma(Z'x')}=\frac{e-b}{f-c},\quad \frac{\Sigma(Z'y')}{\Sigma(X'y')}=\frac{f-c}{d-a},\quad \frac{\Sigma(X'z')}{\Sigma(Y'z')}=\frac{d-a}{e-b};$$

mais, dans le cas présent où X, Y, Z sont zéro, on tire aisément des doubles valeurs de a, b, c, d, e, f,

$$\frac{e-b}{f-c}=\frac{\Sigma(X'y')}{\Sigma(X'z')},\quad \frac{f-c}{d-a}=\frac{\Sigma(Y'z')}{\Sigma(Y'x')},\quad \frac{d-a}{e-b}=\frac{\Sigma(Z'x')}{\Sigma(Z'y')};$$

substituant donc, il viendra

$$(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned} &\frac{\Sigma(Y'x')}{\Sigma(Z'x')}=\frac{\Sigma(X'y')}{\Sigma(X'x')}\,, \\ &\frac{\Sigma(Z'y')}{\Sigma(X'y')}=\frac{\Sigma(Y'z')}{\Sigma(Y'x')}\,, \\ &\frac{\Sigma(X'z')}{\Sigma(Y'z')}=\frac{\Sigma(Z'x')}{\Sigma(Z'y')}\,; \end{aligned}\right.$$

chacune de ces équations se trouvant comportée par les deux autres, elles n'équivalent qu'à deux seulement ; mais A, B, C peuvent aussi être éliminées entre les équations (III) ; il suffit pour cela de les multiplier entre elles, et il vient ainsi, en renversant

$$\Sigma(X'y')\Sigma(Y'z')\Sigma(Z'x')=\Sigma(Y'x')\Sigma(Z'y')\Sigma(X'z');$$

multipliant alors chacune des trois équations (V) par cette dernière, on obtiendra, en réduisant, les trois équations distinctes

$$\Sigma(Y'z')=\Sigma(Z'y') \quad , \quad \Sigma(Z'x')=\Sigma(X'z') \quad , \quad \Sigma(X'y')=\Sigma(Y'x') \; ;$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système primitif sont donc renfermées dans ces six équations :

$$\begin{aligned} \Sigma(X')&=0 \; , & \Sigma(Y'z')&=\Sigma(Z'y') \; ; \\ \Sigma(Y')&=0 \; , & \Sigma(Z'x')&=\Sigma(X'z') \; , \\ \Sigma(Z')&=0 \; , & \Sigma(X'y')&=\Sigma(Y'x') \; . \end{aligned}$$

Ces équations renferment, comme l'on sait, celles de l'équilibre entre des puissances situées dans un même plan : on pourrait aussi parvenir directement à ces dernières, en suivant une marche absolument analogue à celle qui nous a conduit aux équations ci-dessus; mais, dans le cas où toutes les puissances du système sont situées dans un même plan, il existe, pour arriver aux conditions de leur équilibre, une autre méthode qui est trop simple pour ne pas l'indiquer ici.

Soient en effet P', P'', P''', ... des puissances comprises dans un même plan; soient x', y' les coordonnées rectangulaires de l'un des points de la direction de P' considéré comme son point d'application; soient de plus X', Y' les composantes de cette force parallèlement aux axes, et soient adoptées des notations analogues à l'égard des autres puissances du système.

Soit alors introduit, dans ce système, une puissance arbitraire, ayant A et B pour ses composantes parallèles aux axes, et a et b pour les coordonnées de l'un des points de sa direction, considéré comme son point d'application.

Il est clair que le système ainsi modifié aura, parallèlement aux axes, deux résultantes partielles

$$\Sigma(X')+A \quad , \quad \Sigma(Y')+B \; ;$$

lesquelles, à raison de l'indétermination de A et B, pourront toujours être supposées différentes de zéro : elles se couperont en un certain point; et, en désignant par d et e les coordonnées de ce point, on aura

$$d=\frac{\Sigma(Y'x')+Ba}{\Sigma(Y')+B}\ , \qquad e=\frac{\Sigma(X'y')+Ab}{\Sigma(X')+A}\ ;$$

valeurs qui, par l'hypothèse, ne seront ni l'une ni l'autre infinies : l'équation de la puissance introduite sera

$$A(y-b)=B(x-a)\ ,$$

et celle de la résultante du système modifié sera

$$[\Sigma(X')+A](y-e)=[\Sigma(Y')+B](x-d).$$

Maintenant, pour que le système primitif soit de lui-même en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la résultante du système modifié soit identique avec la puissance arbitrairement introduite. Or, cela exige, en premier lieu, qu'elles aient l'une et l'autre les mêmes composantes parallèles aux axes, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(X')+A=A\ ,\\ \Sigma(Y')+B=B\ ;\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\Sigma(X')=0\ ,\\ \Sigma(Y')=0\ ;\end{array}\right.$$

au moyen de ces équations, on tire des valeurs de d et e

$$\text{(K)} \qquad B(d-a)=\Sigma(Y'x')\ , \quad A(e-b)=\Sigma(X'y')\ ;$$

et les équations, tant de la puissance introduite que la résultante du système modifié sont alors

$$A(y-b)=B(x-a)\ , \qquad A(y-e)=B(x-d)\ ;$$

ces deux forces sont donc alors parallèles ; il suffit donc, pour leur coïncidence, qu'un des points de la direction de l'une satisfasse à l'équation de l'autre ; on complétera donc les conditions de l'équilibre du système primitif, en écrivant

$$A(e-b)=B(d-a)\ ;$$

ce qui donnera, en substituant les valeurs fournies par les équations (K),

$$\Sigma(Y'x')=\Sigma(X'y') \; ;$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système primitif sont donc renfermées dans les trois équations

$$\Sigma(X')=0 \; , \quad \Sigma(Y')=0 \; , \quad \Sigma(x'Y')=\Sigma(y'X').$$

J'ai dit que les équations de l'équilibre, entre des forces non comprises dans un même plan, pouvaient conduire à la démonstration de cette proposition : *Deux puissances non comprises dans un même plan ne sauraient avoir une résultante.* Voici par quel procédé cette conséquence peut être déduite de ces équations.

On sait que la seule condition nécessaire et suffisante, pour qu'un système puisse admettre une résultante unique, est exprimée par l'équation

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(X')[\Sigma(Y'z')-\Sigma(Z'y')]\\+\Sigma(Y')[\Sigma(Z'x')-\Sigma(X'z')]\\+\Sigma(Z')[\Sigma(X'y')-\Sigma(Y'x')]\end{array}\right\}=0\; ; \qquad (M) \qquad (*)$$

si l'on développe cette équation, pour le cas de deux forces seulement, elle devient, après les réductions,

$$(N) \quad (Z'Y''-Y'Z'')(x'-x'')+(X'Z''-Z'X'')(y'-y'')+(Y'X''-X'Y'')(z'-z'')=0.$$

(*) Je saisirai cette occasion pour faire remarquer que c'est par une pure inadvertance que M. Prony, à la page 112 de sa *Mécanique philosophique*, a exprimé cette condition par trois équations. Le système a en effet une résultante unique, lorsque ces trois équations ont lieu ; mais c'est seulement parce qu'elles vérifient l'équation (M) ; en sorte que la résultante peut être unique, sans qu'aucune de ces trois équations soit vérifiée.

Je crois cet avertissement d'autant plus utile que l'ouvrage de M. Prony est un de ceux que les jeunes géomètres peuvent consulter avec le plus de fruit, et que l'autorité d'un savant aussi recommandable pourrait facilement les induire en erreur.

les équations des deux puissances sont d'ailleurs

$$\left\{\begin{array}{l} Z'(x-x')=X'(z-z')\ , \\ Z'(y-y')=Y'(z-z')\ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} Z''(x-x'')=X''(z-z'')\ , \\ Z''(y-y'')=Y''(z-z'')\ . \end{array}\right.$$

Si l'on veut exprimer que ces deux puissances sont dans un même plan ayant pour équation

$$Ax+By+Cz=1\ ,$$

il faudra écrire

$$A(Z'x'-X'z')+B(Z'y'-Y'z')=Z'\ ,$$

$$A(Z''x''-X''z'')+B(Z''y''-Y''z'')=Z''\ ,$$

$$AX'+BY'+CZ'=0\ ,$$

$$AX''+BY''+CZ''=0\ ;$$

et, si l'on veut de plus que ce plan soit quelconque, il faudra, entre ces quatre équations, éliminer les trois arbitraires A, B, C; or, on retombe ainsi sur l'équation (N), et par conséquent sur l'équation (M) ; la condition nécessaire et suffisante, pour que deux forces puissent avoir une résultante unique, est donc la même que celle qui exprime que ces deux forces sont comprises dans un même plan : si donc les deux forces ne sont pas dans un même plan, ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne sera remplie, et par conséquent les deux forces ne pourront avoir une résultante.

QUESTIONS

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

Un cercle étant donné, et trois points étant donnés de position par rapport à ce cercle, et dans un même plan avec lui ; circonscrire un triangle au cercle donné, de maniere que le sommet de chacun de ses angles soit en ligne droite avec deux des points donnés ? (*)

II.

Les propriétés caractéristiques du cercle sont, 1.° que toutes celles de ses cordes qui passent par un certain point déterminé de son plan, sont égales ; 2.° qu'elles ont toutes leur milieu en ce point.

Mais il existe une infinité de courbes qui, sans jouir de la dernière de ces propriétés, jouissent néanmoins de la première.

On propose de déterminer l'équation la plus générale des courbes de cette nature ?

(*) Ce problème revient à celui où l'on exigerait que les sommets des angles du triangle cherché fussent sur des droites données ; on peut aussi le généraliser en demandant de circonscrire au cercle donné un polygone de m côtés, qui ait les sommets de ses angles sur m droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle ?

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Recherche systématique des formules les plus propres à calculer les logarithmes ;

Par M. THOMAS LAVERNÈDE.

1. ON sait que, u et t représentant deux nombres quelconques, et u étant plus grand que t, on a

$$\text{Log.}\frac{u}{t}=2M\left\{\frac{u-t}{u+t}+\frac{1}{3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^7+\text{etc.}\right\}\ldots \quad \text{(A)}$$

formule toujours convergente, et dans laquelle M représente le module. (*)

2. Si, dans cette formule, on met à la place de u et t des polynômes en x du degré m qui, ne différant entre eux que par leur dernier terme, soient décomposables en facteurs rationnels du premier degré, ayant tous x pour premier terme ; c'est-à-dire, si l'on fait

$$u=x^m+Px^{m-1}+\ldots+Rx+S=(x+a)(x+b)\ldots(x+l)\ ,$$

et

$$t=x^m+Px^{m-1}+\ldots+Rx+\Sigma=(x+\alpha)(x+\beta)\ldots(x+\lambda)\ ,$$

on aura

$$u-t=S-\Sigma\ ,$$

(*) Voyez le complément d'algèbre de M. Lacroix.

$$u+t=2x^m+2Px^{m-1}+\ldots+2Rx+S+\Sigma\ ,$$

$$\frac{u-t}{u+t}=\frac{\frac{1}{2}(S-\Sigma)}{x^m+Px^{m-1}+\ldots+Rx+\frac{1}{2}(S+\Sigma)}=T\ ,$$

et la formule (A) deviendra

$$\text{Log.}\frac{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots(x+\lambda)}$$

$$=2M[T+\tfrac{1}{3}T^3+\tfrac{1}{5}T^5+\tfrac{1}{7}T^7+\text{etc.}]\ ,$$

ou

$$\text{Log.}(x+a)+\text{Log.}(x+b)+\text{Log.}(x+c)\ldots+\text{Log.}(x+l)\ldots$$
$$-\text{Log.}(x+\alpha)-\text{Log.}(x+\beta)-\text{Log.}(x+\gamma)\ldots-\text{Log.}(x+\lambda)$$
$$=2M[T+\tfrac{1}{3}T^3+\tfrac{1}{5}T^5+\tfrac{1}{7}T^7+\text{etc.}]\ ;\qquad\text{(B)}$$

or, il est clair que, lorsque les valeurs particulières des lettres x, a, b, c, etc., α, β, γ, etc., seront données, on pourra, par cette dernière formule, calculer le logarithme de l'un quelconque des nombres $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc., si l'on connaît les logarithmes des autres. Il importe donc 1.° de faire voir comment une équation telle que (B) peut servir à trouver les logarithmes de tous les nombres; 2.° de déterminer les conditions qui donnent à la série du second membre le plus de convergence, et par conséquent à la valeur cherchée l'approximation la plus rapide.

3. 1.° Il est évident que, quelle que soit la valeur de x, les polynômes u et t ne changent point; donc x est variable. Il n'en est pas ainsi des lettres a, b, c, etc., α, β, γ, etc. Les coefficiens P, Q.... R étant les mêmes dans les deux polynômes, les valeurs de ces lettres a, b, c, etc.; α, β, γ, etc., doivent être telles que les fonctions des unes représentées par ces coefficiens dans le premier polynôme, soient respectivement égales aux fonctions semblables des autres représentées par ces mêmes coefficiens dans le second. Il suit de là

que, quoique les lettres a, b, c, etc.; α, β, γ, etc., soient toutes susceptibles d'admettre plusieurs valeurs, puisqu'elles ne sont liées que par un nombre de conditions moindre que celui de ses lettres, il y a cependant, entre leurs valeurs simultanées ou corrélatives, une dépendance mutuelle qui fait qu'on ne peut changer les unes, sans que les autres ou au moins quelques-unes des autres ne changent également. Ces valeurs corrélatives des lettres a, b, c, etc.; α, β, γ, etc., forment donc ce qu'on peut appeler un système de valeurs; et, bien que le nombre de ces systèmes soit infini, si, par une raison quelconque, on est déterminé à en adopter un, ce choix une fois fait, les quantités a, b, c, etc; α, β, γ, etc., pourront être considérées comme constantes. Dans cette hypothèse, les nombres $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc.; $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc., ne renfermant qu'une seule variable x, croîtront ou décroîtront en même temps qu'elle : ils pourront donc parcourir tous les degrés de grandeur et représenter successivement tous les nombres possibles. Donc une équation de la forme (B) pourra servir à trouver les logarithmes de tous les nombres. On peut, contre cette assertion, faire l'objection suivante, savoir : que les quantités $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc.; $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc., étant au nombre de $2m$, il faut, pour pouvoir commencer à calculer des logarithmes par des formules du genre de celle dont nous parlons, connaître $2m-1$ logarithmes. Nous reviendrons dans la suite sur cette difficulté, et nous ferons voir comment, par le secours des formules elles-mêmes, on peut se procurer ces $2m-1$ premières données.

2.° La série $T+\frac{1}{3}T^3+\frac{1}{5}T^5+\frac{1}{7}T^7+$ etc., est d'autant plus convergente que la quantité T ou la fraction

$$\frac{\frac{1}{2}(S-\Sigma)}{x^m+Px^{m-1}+\ldots+Rx+\frac{1}{2}(S+\Sigma)},$$

est plus petite. Or, le numérateur de cette fraction, qui doit être constant, dépend de la différence $S-\Sigma$ des derniers termes des polynômes u et t. Mais ces derniers termes étant respectivement les produits des quantités a, b, c, etc., et α, β, γ, etc., dépendent eux-mêmes des valeurs qu'on donne à ces lettres ; donc, pour rendre la série $T + \frac{1}{3}T^3 + \frac{1}{5}T^5 + \frac{1}{7}T^7 +$ etc., aussi convergente qu'il est possible, il faut choisir pour les lettres a, b, c, etc., α, β, γ, etc. le système de valeurs qui rend la différence $S - \Sigma$ aussi petite qu'elle peut l'être, sans nuire à la forme des polynômes u et t.

Quant au dénominateur qui est variable, on voit qu'il sera d'autant plus grand que le degré des polynômes u et t sera plus élevé, et en même temps que le nombre x, et par conséquent aussi les nombres $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. ; $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc., seront plus grands. Donc, la convergence de la série dépend encore du degré de la formule et de la grandeur du nombre dont on veut avoir le logarithme.

Il est aisé de voir que les polynômes u et t ne sont autre chose que les premiers membres de deux équations qui ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme, et qui ont en outre leurs racines commensurables. C'est donc de la recherche de semblables équations, que nous devons d'abord nous occuper ; nous parlerons ensuite des formules qui s'en déduisent, et de la manière de les employer.

PREMIÈRE PARTIE.

Des équations qui, ayant leurs racines commensurables, ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme.

4. Deux équations, qui n'ont de différence que dans leur dernier terme, peuvent être telles que ce dernier terme soit zéro dans l'une, et une quantité effective dans l'autre, ou telles que le dernier terme soit dans l'une et dans l'autre une quantité effective. Dans le premier cas, X^m représentant une fonction de x qui devient nulle en même temps que x, si l'une des équation est $X^m + h = 0$, l'autre sera

$X^m=0$; cette dernière est celle que j'appellerai *la résultante*, relativement à la première à laquelle je donnerai le nom d'*équation principale.*

5. Toutes les équations du second degré qui ont des racines commensurables ont pour résultantes des équations dont les racines sont également commensurables. En effet toutes ces équations sont comprises dans la formule générale $x^2+(a+b)x+ab=0$ qui, en supprimant son dernier terme, devient $x^2+(a+b)x=0$ ou $x[x+a+b]=0$.

6. Dans le troisième degré les racines des résultantes sont souvent incommensurables, quoique celles des équations principales soient rationnelles ; mais on peut facilement trouver, parmi ces dernières, celles qui jouissent de la propriété qui nous occupe. Prenons pour cela l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0\ ,$$

dont la résultante

$$x^3+px^2+qx=0\ ,$$

étant divisée par x, devient

$$x^2+px+q=0\ ,$$

et donne

$$x=\frac{-p+\sqrt{p^2-\ q}}{2} \text{ et } x=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\ ;$$

nommons de plus $-d$ et $-e$ ces deux racines, et supposons que $-a$, $-b$ et $-c$ sont celles de l'équation principale, nous aurons

$$p=a+b+c \quad \text{et} \quad q=ab+ac+bc.$$

Cela posé, pour que les valeurs de d et de e soient rationnelles, il faut qu'on ait

$$p^2-4q=\textit{un quarré}\ ;$$

or, cette égalité, en mettant pour p et q leur valeur, peut s'écrire comme il suit

$$(a+b-c)^2-4ab = un\ carré.$$

On satisfait à cette condition en faisant

$$(a+b-c)^2-4ab=(a+b-c+2\lambda)^2=(a+b-c)^2+4(a+b-c)\lambda+4\lambda^2,$$

ce qui donne

$$c=\frac{(a+\lambda)(b+\lambda)}{\lambda};$$

de plus, les valeurs de d et de e deviennent, par cette supposition,

$$d=\frac{(a+b)\lambda+ab}{\lambda} \quad \text{et} \quad e=a+b+\lambda;$$

l'équation principale se change en

$$\left.\begin{array}{c} x^3+\left[\dfrac{ab+2(a+b)\lambda+\lambda^2}{\lambda}\right]x^2+ \\ \dfrac{[(a+b)\lambda+ab][a+b+\lambda]}{\lambda}x+\dfrac{ab(a+\lambda)(b+\lambda)}{\lambda} \end{array}\right\}=0,$$

ou

$$[x+a][x+b]\left[x+\frac{(a+\lambda)(b+\lambda)}{\lambda}\right]=0;$$

et sa résultante est $\quad$ (C)

$$x\left[x+\frac{(a+b)\lambda+ab}{\lambda}\right][x+a+b+\lambda]=0.$$

7. Le résultat auquel nous venons de parvenir renferme, pour le troisième degré, une infinité d'équations qui ont, ainsi que leur résultante, des racines commensurables; mais, lorsqu'en passant de cette forme générale aux équations numériques, on veut avoir des nombres entiers pour racines de ces dernières, on est obligé de choisir les valeurs particulières à donner aux indéterminées a, b et λ, de manière à ce que les dénominateurs disparaissent. On évite cet inconvénient

en observant qu'en général les résultats des questions indéterminées n'exprimant point des valeurs absolues, mais simplement des rapports, on peut les multiplier ou diviser par telle quantité que l'on veut, sans qu'ils cessent de répondre à la question qui y a donné lieu. D'après cette remarque, dont nous ferons souvent usage dans la suite, il est visible que, pour avoir les expressions des racines sous la forme d'entiers, il suffit, dans tous les cas, de multiplier les valeurs trouvées pour ces racines, par le plus petit dividende commun aux dénominateurs de ces mêmes valeurs. Par ce moyen, les équations (C) deviennent

$$\left.\begin{array}{r} x^3+[ab+2(a+b)\lambda+\lambda^2]x^2+ \\ [(a+b)\lambda+ab][a+b+\lambda]x+ab\lambda^2(a+\lambda)(b+\lambda) \end{array}\right\}=0\,,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} [x+a\lambda][x+b\lambda][x+(a+\lambda)(b+\lambda)]=0\,, \\ \text{et} \\ x[x+(a+b)\lambda+ab][x+(a+b+\lambda)\lambda]=0\,. \end{array}\right\}\text{(D)}$$

8. On peut avoir, à la place des équations (D), d'autres équations d'une forme un peu différente, soit en considérant l'égalité

$$p^2-4q=\textit{carré}\,,$$

sous un autre aspect, soit en substituant dans les équations (D), au lieu de l'indéterminée λ, une nouvelle indéterminée augmentée ou diminuée d'une fonction de a et b; mais ces différentes transformations ne pouvant nous être d'aucune utilité, nous n'entrerons point dans les détails qu'elles exigent. Nous nous bornerons seulement ici à faire voir qu'on peut encore soumettre les équations (D) à remplir quelque nouvelle condition, outre celles auxquelles elles satisfont déjà.

9. Supposons d'abord qu'on veuille que les deux racines de la résultante soient égales, on fera $d=e$ ou

$$(a+b)\lambda+ab=(a+b+\lambda)\lambda\,;$$

ce qui donnera

$$b=\frac{\lambda^2}{a}\,;$$

substituant

substituant à b cette valeur dans les équations (D), et multipliant ensuite toutes les racines par $\frac{a}{\lambda}$, on aura pour l'équation principale

$$x^3+2(\lambda^2+a\lambda+a^2)x^2+(\lambda^2+a\lambda+a^2)^2x+a^2\lambda^2(a+\lambda)^2=0 ,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}(x+a^2)(x+\lambda^2)[x+(a+\lambda)^2]=0 , \\ \text{et pour la résultante} \\ x[x+\lambda^2+a\lambda+a^2]^2=0 .\end{array}\right\} (E)$$

10. Si l'on veut que le second terme manque dans l'équation principale, on fera $d+e=0$,

ou

$$(a+b)\lambda+ab+(a+b+\lambda)\lambda=0 ;$$

ce qui donnera

$$b=-\frac{\lambda(\lambda+2a)}{2\lambda+a} ;$$

faisant ensuite la substitution, et multipliant toutes les racines par $\pm\frac{2\lambda+a}{\lambda}$, les équations (D) deviendront

$$x^3-(\lambda^2+a\lambda+a^2)^2x\mp a\lambda(\lambda^2-a^2)(2\lambda+a)(\lambda+2a)=0 ,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}[x\pm a(2\lambda+a)][x\mp\lambda(\lambda+2a)][x\pm(\lambda^2-a^2)]=0 , \\ \text{et} \\ x[x+\lambda^2+a\lambda+a^2][x-(\lambda^2+a\lambda+a^2)]=0 .\end{array}\right\} (F)$$

11. Enfin, si c'est le troisième terme qu'on veut faire disparaître, on pourra faire $d=0$ ou $e=0$, c'est-à-dire,

$$(a+b)\lambda+ab=0 \quad \text{ou} \quad (a+b+\lambda)\lambda=0.$$

La seconde hypothèse donne $\lambda=-(a+b)$ et conduit immédiatement à ces deux équations

$$x^3-(a^2+ab+b^2)x^2+a^2b^2(a+b)^2=0\ ,$$

ou

$$\left.\begin{array}{r} [x-a(a+b)][x-b(a+b)][x+ab]=0\ , \\ \text{et} \qquad\qquad x^2[x-(a^2+ab+b^2)]=0\ ; \end{array}\right\}\ (G)$$

par la première hypothèse, qui donne $\lambda=-\frac{ab}{a+b}$, on parvient au même résultat en multipliant, après la substitution, les racines des deux équations par $\frac{(a+b)^2}{ab}$.

12. On voit, par ce qui précède, avec quelle facilité on peut façonner, pour ainsi dire, une équation du troisième degré, de manière à ce qu'elle ait, ainsi que sa résultante, des racines commensurables. Il n'en est pas de même des équations des degrés supérieurs. Dans le quatrième, par exemple, lorsque l'équation n'est pas privée de son pénultième terme, sa résultante, qui devient alors du troisième degré, devant avoir des racines commensurables, tombe essentiellement dans le cas irréductible. De plus, outre les difficultés que paraît devoir amener cette circonstance, l'équation principale elle-même donnerait probablement lieu à des expressions qu'on ne saurait rendre rationnelles. Ce n'est, je crois, que dans des cas particuliers qu'on peut trouver, pour les équations des degrés supérieurs au troisième, des formules de composition qui satisfassent aux conditions prescrites, et quelquefois même ces formules deviennent très-compliquées. Parmi les résultats auxquels m'ont conduit les diverses tentatives que j'ai faites, je ne donnerai, dans ce qui va suivre, que les plus simples ou ceux qui pourront fournir une application avantageuse.

13. Le premier membre d'une équation du quatrième degré pouvant toujours être considéré comme le produit de deux facteurs du second, prenons pour équation principale

$$(x^2+mx+n)(x^2+px+q)=0\ ,$$

ou

$$x^4+(m+p)x^3+(n+mp+q)x^2+(np+mq)x+nq=0\ ;$$

et, pour faire disparaître le quatrième terme, supposons

$$np+mq=0 \quad \text{ou} \quad q=-\frac{np}{m}\ ;$$

la résultante sera alors divisible par x^2, et ses deux racines effectives seront

$$x=-\frac{m+p}{2}\pm\sqrt{\frac{(m-p)^2}{4}-\frac{n(m-p)}{m}}\,.$$

Si, pour rendre rationnelles ces expressions, on fait

$$\frac{(m-p)^2}{4}-\frac{n(m-p)}{m}=\left[\frac{m-p}{2}-\frac{n\delta}{m}\right]^2=\frac{(m-p)^2}{4}-\frac{2n\delta(m-p)}{m}+\frac{n^2\delta^2}{m^2}\,,$$

il viendra

$$n=\frac{m(m-p)(\delta-1)}{\delta^2}\,,$$

$$q=-\frac{p(m-p)(\delta-1)}{\delta^2}\,;$$

et

$$x=-\frac{m+p}{2}\pm\left(\frac{m-p}{2}-\frac{n\delta}{m}\right),$$

d'où

$$x=-p-\frac{n\delta}{m}=-\frac{p+m(\delta-1)}{\delta}\,,$$

et

$$x=-m+\frac{n\delta}{m}=-\frac{m+p(\delta-1)}{\delta}\,;$$

on aura, par conséquent, pour la résultante

$$x^2\left[x+\frac{p+m(\delta-1)}{\delta}\right]\left[x+\frac{m+p(\delta-1)}{\delta}\right]=0\,,$$

et pour l'équation principale

$$\left[x^2+mx+\frac{m(m-p)(\delta-1)}{\delta^2}\right]\left[x^2+px-\frac{p(m-p)(\delta-1)}{\delta^2}\right]=0\,;$$

ou, en multipliant toutes les racines par δ

$$\left.\begin{array}{r} x^2[x+p+m(\delta-1)][x+m+p(\delta-1)]=0\ , \\ [x^2+m\delta x+(m-p)(\delta-1)][x^2+p\delta x-p(m-p)(\delta-1)]=0\ . \end{array}\right\}(H)$$

14. Avant de parler d'une manière générale de la décomposition du premier membre de l'équation principale en facteurs linéaires, nous ferons observer ici deux cas dans lesquels cette décomposition s'effectue avec beaucoup de facilité.

1.° Lorsque $\delta=0$, les équations (H) deviennent

$$x^2[x^2-(m-p)^2]=0\ ,$$

et
$$[x^2-m(m-p)][x^2+p(m-p)]=0\ ;$$

ou, en divisant les racines par $\sqrt{m-p}$,

$$x^2[x^2-(m-p)]=0\ ,$$

et
$$[x^2-m][x^2+p]=0\ ;$$

dans cet état, pour que les racines de l'équation principale soient commensurables, il suffit de faire $m=b^2$ et $p=-c^2$; mais alors la rationalité des racines de la résultante exige que b^2+c^2 soit un carré. On satisfait à cette condition en faisant

$$b^2+c^2=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2\ ,$$

ce qui donne

$$c=\frac{b^2-a^2}{2a} \quad \text{et} \quad b^2+c^2=\frac{(a^2+b^2)}{4a^2}\ ;$$

valeurs qui changent l'équation résultante et la principale, après qu'on a multiplié leurs racines par $2a$, en

$$\left.\begin{array}{lr} & x^2[x^2-(a^2+b^2)^2]=0\ , \\ \text{et} & [x^2-4a^2b^2][x^2-(a^2-b^2)^2]=0\ , \\ \text{ou} & x^4-(a^2+b^2)^2x^2+4a^2b^2(a^2-b^2)^2=0\ . \end{array}\right\}(I)$$

On voit par là que, dans ce cas, les racines de l'équation principale ne sont autre chose que les valeurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, prises en plus et en moins, et que les deux racines effectives de la résultante sont la valeur de l'hypoténuse du même triangle, prise également en plus et en moins.

2.° Lorsque $\delta=2$, les équations (H) deviennent

$$x^2[x+m+p]^2=0\ ,$$

et

$$[x^2+2mx+m(m-p)][x^2+2px+p(p-m)]=0\ ;$$

ou

$$[x+m-\sqrt{mp}][x+m+\sqrt{mp}][x+p-\sqrt{mp}][x+p+\sqrt{mp}]=0\ ,$$

équations qui, en faisant $m=a^2$ et $p=b^2$, se changent en

$$\left.\begin{array}{l} x^2[x+a^2+b^2]^2=0\ , \\ \text{et} \\ [x+a(a-b)][x+a(a+b)][x-b(a-b)][x+b(a+b)]=0\ , \\ \text{ou} \\ x^4+2(a^2+b^2)x^3+(a^2+b^2)^2x^2-a^2b^2(a^2-b^2)^2=0. \end{array}\right\}\ (K)$$

15. Revenons maintenant à la question générale. L'équation principale (H) fournit les deux suivantes

$$x^2+m\delta x+m(m-p)(\delta-1)=0\ ,$$

et

$$x^2+p\delta x+p(p-m)(\delta-1)=0\ ;$$

la première de celle-ci donne

$$x=\frac{-m\delta\pm\sqrt{m^2(\delta-2)^2+4mp(\delta-1)}}{2}\ ,$$

et, en faisant

$$m^2(\delta-2)^2+4mp(\delta-1)=[m(\delta-2)+2p\lambda]^2=m^2(\delta-2)^2+4mp\lambda(\delta-2)+4p^2\lambda^2\ ,$$

on a

$$p=\frac{m(\lambda-1)-\lambda(\delta-2)}{\lambda^2},$$

et

$$x=\frac{-m\delta\pm[m\delta-2m+2p\lambda]}{2};$$

d'où

$$x=-m+p\lambda=-\frac{m(\delta-1)(\lambda-1)}{\lambda},$$

et

$$x=-m(\delta-1)-p\lambda=-\frac{m(\lambda+\delta-1)}{\lambda};$$

la seconde donne pareillement

$$x=\frac{-p\delta\pm\sqrt{p^2(\delta-2)^2+4mp(\delta-1)}}{2};$$

et, en faisant

$$p^2(\delta-2)^2+4mp(\delta-1)=[p(\delta-2)+2m\mu]^2=p^2(\delta-2)^2+4mp\mu(\delta-2)+4m^2\mu^2,$$

on a

$$p=\frac{m\mu^2}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)},$$

et

$$x=\frac{-p\delta\pm[p\delta-2p+2m\mu]}{2};$$

d'où

$$x=-p+m\mu=-\frac{m\mu(\delta-1)(\mu-1)}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)},$$

et

$$x=-p(\delta-1)-m\mu=-\frac{m\mu[m+\delta-1]}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)};$$

par là l'équation principale (H), après qu'on a divisé toutes ses racines par m, ou, ce qui revient au même, après qu'on a fait $m=1$, devient

$$\left[x+\frac{(\delta-1)(\lambda-1)}{\lambda}\right]\left[x+\frac{\lambda+\delta-1}{\lambda}\right]\times$$

$$\left[x+\frac{\mu(\delta-1)(\mu-1)}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)}\right]\left[x+\frac{\mu(\mu+\delta-1)}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)}\right]=0 \ldots\ldots(\mathrm{L})$$

et les deux valeurs de p fournissent de plus l'équation de condition

$$\frac{(\delta-1)-\lambda(\delta-2)}{\lambda^2}=\frac{\mu^2}{(\delta-1)-\mu(\delta-2)} \text{ ou } \frac{\varphi-\lambda(\varphi-1)}{\lambda^2}=\frac{\mu^2}{\varphi-\mu(\varphi-1)} \ldots(\mathrm{M})$$

en faisant $\delta-1=\varphi$. C'est à la résolution de cette dernière équation qu'est présentement réduite toute la difficulté.

16. En tirant de l'équation (M) la valeur de μ, il viendra

$$\mu=\frac{1}{2\lambda^2}\Big\{\lambda(\varphi-1)^2-\varphi(\varphi-1)\pm$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2\varphi^4-2(\lambda-1)(2\lambda-1)\varphi^3-(4\lambda^3-10\lambda^2+6\lambda-1)\varphi^2+2\lambda^2-2\lambda+1)\varphi+\lambda^2}\Big\};$$

et, cette expression devant être rationnelle, 1.° si on suppose la quantité soumise au radical égale $[-(\lambda-1)\varphi^2+k\varphi+\lambda]^2$ on aura

$$(\lambda-1)^2\varphi^4-2(\lambda-1)(2\lambda-1)\varphi^3-(4\lambda^3-10\lambda^2+6\lambda-1)\varphi^2+2\lambda(2\lambda^2-2\lambda+1)\varphi+\lambda^2$$
$$=(\lambda-1)^2\varphi^4-2(\lambda-1)k\varphi^3-2\lambda(\lambda-1)\varphi^2+2k\lambda\varphi+\lambda^2$$
$$+k^2\varphi^2;$$

égalant ensuite les coefficiens de φ, on trouvera $k=2\lambda^2-2\lambda+1$, et l'équation ci-dessus donnera $\varphi=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$. Enfin, cette valeur étant mise dans celle de μ, on aura $\mu=\lambda$ ou $\mu=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$; chacune de ces dernières valeurs donnera, au lieu de l'équation (L), celle-ci

$$[x^2-(\lambda+1)^2]\left[x^2-\frac{4\lambda^2}{(\lambda-1)^2}\right]=0,$$

qui, en multipliant toutes ses racines par $\lambda-1$, devient

$$[x^2-(\lambda^2-1)^2][x^2-4\lambda^2]=0\ ,$$

et a pour résultante

$$x^2[x^2-(\lambda^2+1)^2]=0\ ;$$

ces deux équations ne sont autre chose que les équations I du n.° 14, et les reproduisent en faisant $\lambda=\frac{a}{b}$ et multipliant ensuite toutes les racines par b.

2.° Si l'on fait la quantité qui est sous le radical égale à $(h\varphi^2+k\varphi+\lambda)^2$ on aura

$$(\lambda-1)^2\varphi^4-2(\lambda-1)(2\lambda-1)\varphi^3-(4\lambda^3-10\lambda^2+6\lambda-1)\varphi^2+2\lambda(2\lambda^2-2\lambda+1)\varphi+\lambda^2$$
$$=h^2\varphi^4+\quad 2hk\varphi^3+\quad (2h\lambda+k^2)\varphi^2+\quad 2k\lambda\varphi+\lambda^2\ ;$$

égalant ensuite d'une part les coefficiens de φ, et d'autre part ceux de φ^2, il viendra $k=2\lambda^2-2\lambda+1$ et $h=-(2\lambda^2-1)(\lambda-1)$. L'équation ci-dessus donnera $\varphi=\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$ et les valeurs de μ deviendront $\mu=-\frac{1}{\lambda}$ et $\mu=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$. L'une ou l'autre de ces valeurs étant substituée dans l'équation (L) du n.° précédent, on aura l'équation principale

$$\left[x+\frac{2}{\lambda+1}\right]^2\left[x+\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right]\left[x-\frac{\lambda^2+1}{\lambda(\lambda+1)^2}\right]=0\ ,$$

qui, en multipliant toutes ces racines par $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)^2$, devient

$$[x+2\lambda(\lambda^2-1)]^2[x+\lambda(\lambda+1)(\lambda^2+1)][x-(\lambda-1)(\lambda^2+1)]=0\ ,$$

et a pour résultante

$$x^2[x+(\lambda+1)(3\lambda^2-2\lambda+1)][x+\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)]=0.$$

17.

17. Si, au lieu de tirer de l'équation M la valeur de μ, on prend celle de φ, on aura :

$$\varphi=\frac{2\lambda\mu-\lambda-\mu\pm\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu-(4\lambda^3-4\lambda^2-1)\mu^2+4\lambda^2(\lambda-1)\mu^3}}{2(\lambda-1)(\mu-1)}$$

et, en égalant la quantité soumise au radical à $(\lambda-k\mu+h\mu^2)^2$ ou

$$\lambda^2-2k\lambda\mu+(2h\lambda+k^2)\mu^2-2hk\mu^3+\mu^4$$

les coefficiens de μ et de μ^2, supposés égaux de part et d'autre, donneront $k=1$ et $h=-2\lambda(\lambda-1)$. On trouvera ensuite fort aisément $\mu=\frac{1}{\lambda}$ et $\varphi=\frac{(\lambda-1)^2\mp(\lambda-1)^2}{2(\lambda-1)^2}$ ou $\varphi=o$ et $\varphi=1$. Enfin, en substituant respectivement $\frac{1}{\lambda}$ et 1 à la place de μ et φ dans l'équation L; on parviendra à l'équation principale :

$$\left[x+\frac{\lambda-1}{\lambda}\right]\left[x+\frac{\lambda+1}{\lambda}\right]\left[x-\frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right]\left[x+\frac{\lambda+1}{\lambda^2}\right]=o$$

qui, en multipliant toutes ses racines par λ^2, devient :

$$[x+\lambda(\lambda-1)][x+\lambda(\lambda+1)][x-(\lambda-1)][x+(\lambda+1)]=o$$

et a pour résultante :

$$x^2[x+\lambda^2+1]^2=o$$

Ces deux équations ne sont autre chose que les équations K du n.° 14, et les reproduisent en faisant $\lambda=\frac{a}{b}$ et multipliant ensuite toutes les racines par b^2.

18. On pourrait maintenant, à l'aide des valeurs obtenues dans les deux derniers n.^{os} pour les indéterminées φ et μ, avoir d'autres valeurs qui satisferaient également à la question. Pour en donner un exemple, supposons qu'ayant trouvé dans le n.° précédent que la

valeur $\mu = \frac{1}{\lambda}$ rend la quantité qui est sous le radical égale à un carré; on substitue dans cette quantité $\frac{1}{\lambda} + r$ à la place de μ; elle deviendra, par cette substitution,

$$\frac{1}{\lambda^2}\{(\lambda-1)^4-2\lambda(\lambda-1)^2(4\lambda-1)r-\lambda^2(4\lambda^3-16\lambda^2+12\lambda+1)r^2+4\lambda^4(\lambda-1)r^3\}$$

et, en égalant son second facteur au carré $[(\lambda-1)^2-kr]^2$ ou

$$(\lambda-1)^4-2kr(\lambda-1)^2+k^2r^2$$

on trouvera $k=\lambda(4\lambda-1)$, $r=\frac{\lambda^2+1}{\lambda(\lambda-1)}$, $\mu=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ et ....
$\varphi=\frac{\lambda^2+2\lambda-1\pm(3\lambda^2+2\lambda+1)}{4(\lambda-1)}$ ou $\varphi=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$ et $\varphi=-\frac{\lambda^2+1}{2(\lambda-1)}$. La seconde valeur de φ conduira à l'équation principale:

$$\left.\begin{array}{c}\left[x-\frac{\lambda^2+1}{2}\right]\left[x+\frac{\lambda^2-2\lambda-1}{2(\lambda-1)}\right]\times\\ \left[x-\frac{(\lambda+1)(\lambda^2+1)}{2\lambda(\lambda-1)}\right]\left[x-\frac{(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-1)}{4\lambda}\right]\end{array}\right\}=0$$

qui, en multipliant toutes ses racines par $4\lambda(\lambda-1)$, devient:

$$\left.\begin{array}{c}[x-2\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+1)][x+2\lambda(\lambda^2-2\lambda-1)]\times\\ [x-2(\lambda+1)(\lambda^2+1)][x-(\lambda^2-1)(\lambda^2-2\lambda-1)]\end{array}\right\}=0$$

équation dont la résultante a aussi des racines commensurables. Par la première valeur de φ on reviendra aux équations déjà trouvées (n.° 16, 1.°)

19. Lorsqu'on a, pour un degré quelconque, une équation principale et sa résultante dont les racines sont des nombres rationnels, on peut, par leur moyen, trouver deux autres équations qui, ayant également des racines commensurables, ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme, soit que ce dernier terme doive être dans

l'une et dans l'autre une quantité effective, soit qu'on veuille qu'une de ces nouvelles équations devienne résultante de l'autre. Ces transformations présentant d'ailleurs quelques conséquences utiles, nous allons les examiner d'une manière générale.

20. Prenons l'équation principale :

$$\left.\begin{array}{ll} & x^m + px^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + rx + s = o \\ \text{ou} & (x+a)(x+b) \ldots\ldots\ldots (x+h)(x+k) = o \\ \text{ayant pour résultante :} & \\ & x^m + px^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + rx = o \\ \text{ou} & (x+\alpha)(x+\beta) \ldots\ldots\ldots (x+\eta) = o \end{array}\right\} \text{N}$$

et mettons dans l'une et dans l'autre $x+d$ à la place de x.

1.° Si d n'est égal à aucune des racines $-a$, $-b$, etc., $-\alpha$, $-\beta$, etc., les deux transformées auront tous leurs termes respectivement égaux, à l'exception du dernier qui sera $d^m + pd^{m-1} + \ldots\ldots + rd + s$ dans la première, et $d^m + pd^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + rd$ dans la seconde, et par conséquent une quantité effective dans l'une et dans l'autre..

21. 2.° Si d est égal à une des racines de l'une quelconque des équations N, la transformée de l'équation à laquelle appartient cette racine, aura une racine égale à zéro ; son premier membre sera divisible par x, et elle sera la résultante de l'autre tranformée, qui aura essentiellement ses dernier et avant-dernier termes.

22. 3.° Si l'une quelconque des équations N a deux racines égales, en prenant d égal à ces racines, la transformée de l'équation à laquelle elles appartiennent, aura deux racines égales à zéro, son premier membre sera divisible par x^2, et elle sera la résultante de l'autre transformée qui n'aura point de pénultième terme.

23. 4.° Si l'une quelconque des équations N pouvait avoir trois racines égales, en prenant d égal à ces racines, la transformée de l'équation à laquelle elles appartiendraient, aurait trois racines égales à zéro ; son premier membre serait divisible par x^3, et elle serait la résultante

de l'autre transformée qui manquerait de ses pénultième et antépénultième termes. Mais une équation quelconque, dont les racines sont réelles, ne peut être privée de deux termes consécutifs. *Donc, en général, il est impossible que deux équations qui ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme, et qui ont des racines réelles, et à plus forte raison des racines commensurables, puissent, l'une ou l'autre, avoir trois ou un plus grand nombre de racines égales.*

On voit, par ce théorème que, n étant un nombre entier positif plus grand que 2, le premier membre de l'une quelconque de nos équations ne peut avoir un facteur de la forme $(x+a)^n$, mais rien ne s'oppose à ce qu'il en ait plusieurs de la forme $(x+a)^2$, c'est-à-dire, à ce que l'équation ait plusieurs couples de racines égales.

24. On peut encore demontrer très-aisément que deux équations du genre de celle que nous considérons, ne peuvent avoir une racine commune; car, en nommant a cette racine, les premiers membres de ces équations seraient exactement divisibles par $x-a$; mais, par l'hypothèse, les dividendes ne différant entre eux que par leur dernier terme, les quotiens ne pourraient non plus avoir de différence que dans le terme non affecté de x; donc les équations primitives, abaissées d'un degré par la division, donneraient encore deux équations qui ne différeraient entre elles que par leur dernier terme. Maintenant, ces dernières, étant multipliées par $x-a$, devraient reproduire les équations primitives : or c'est ce qui est impossible. En effet, 1.° les produits partiels des premiers membres par x, différeraient entre eux par leur terme affecté de la première puissance de x; 2.° les produits partiels de ces mêmes premiers membres par $-a$ différeraient entre eux par leur terme non affecté de x; par conséquent les produits totaux différeraient entre eux par leurs deux derniers termes, et ne reproduiraient pas les équations primitives. Donc deux équations qui n'ont entre elles de différence que dans leur dernier terme, ne peuvent avoir une racine commune.

25. Nous avons vu, n.° 20, que, lorsque d n'est égal à aucune des racines des équations N, les transformées ne diffèrent entre elles

que par leur dernier terme qui est $d^m+pd^{m-1}+\ldots\ldots+rd+s$ dans l'une, et $d^m+pd^{m-1}+\ldots+rd$ dans l'autre. Si l'on veut que ces derniers termes soient des grandeurs égales, mais de signe contraire, il faudra faire :

$$d^m+pd^{m-1}+\ldots\ldots+rd+s=-d^m-pd^{m-1}-\ldots\ldots rd$$

ou

$$d^m+pd^{m-1}+\ldots\ldots+rd+\frac{s}{2}=o$$

On peut de cette équation conclure la règle suivante :

Pour transformer une équation principale et sa résultante en deux autres équations qui ne diffèrent entre elles que par le signe de leur dernier terme, il faut, dans l'équation principale, diminuer le dernier terme seulement de moitié, ce qui fournira une nouvelle équation qui aura ou n'aura pas de racines commensurables. Si cette équation a une racine commensurable, cette racine sera la valeur de d *ou de la quantité dont il faut augmenter les racines, tant de l'équation principale que de sa résultante, pour avoir les deux transformées cherchées ; si elle n'en a point, on en conclura que les transformées demandées sont impossibles.*

Soit, par exemple, l'équation :

$$x^3+6x^2+9x+4=o \qquad \text{ou} \qquad (x+1)^2(x+4)=o$$

qu'on obtient en faisant $a=b=\lambda=1$ dans une des équations principales D et E des n.^{os} 7 et 9. En divisant son dernier terme par 2, on a l'équation auxiliaire :

$$x^3+6x^2+9x+2=o.$$

Cette dernière, ayant -2 pour racine, fait voir qu'il faut, tant dans la proposée que dans sa résultante,

$$x^3+6x^2+9x=o \qquad \text{ou} \qquad x(x+3)^2=o$$

substituer $x-2$ à la place de x, pour avoir deux transformées qui ne diffèrent entre elles que par le signe de leur dernier terme. Ces deux transformées sont :

$$x^3-3x+2=o \qquad \text{ou} \qquad (x-1)^2(x+2)=o$$

et

$$x^3-3x-2=o \qquad \text{ou} \qquad (x+1)^2(x-2)=o.$$

26. Avant d'aller plus loin, nous ferons observer ici que (X^m représentant une fonction de x du degré m, qui devient zéro en même temps que cette variable), lorsque la résultante commune de deux équations $X^m+S=o$, et $X^m-S=o$, qui ne diffèrent entre elles que par le signe de leur dernier terme, a comme elles des racines commensurables, on obtient, en les multipliant l'une par l'autre, l'équation $X^{2m}-S^2=o$ du degré $2m$ qui a pareillement, ainsi que sa résultante, des nombres rationnels pour racines. Cette propriété tient à une plus générale que voici. Lorsque deux équations $X^m+S=o$ et $X^m+T=o$, qui ont des racines commensurables et ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme, sont telles qu'en les ajoutant membre à membre, et divisant ensuite par 2, l'équation-demi-somme $X^m+\frac{S+T}{2}=o$ a aussi des racines commensurables ; si, d'un côté, on élève au carré cette dernière, et que d'un autre, on multiplie membre à membre les deux premières, les équations qui en proviendront, savoir : $X^{2m}+(S+T)X^m+\frac{(S+T)^2}{4}=o$ et $X^{2m}+(S+T)X^m+ST=o$, jouiront encore de la propriété de ne différer entre elles que par leur dernier terme, et d'avoir, comme les équations primitives, des racines commensurables. En effet, dans le premier cas, la résultante commune n'est autre chose que l'équation-demi-somme dont nous venons de parler.

27. Prenons pour second exemple de la règle du n.° 25, l'équation littérale :

$$x^2+(b+c)x+bc=o \qquad \text{ou} \qquad (x+b)(x+c)=o$$

dont la résultante est :

$$x(x+b+c)=o$$

l'équation auxiliaire

$$x^2+(b+c)\,x+\frac{bc}{2}=o$$

donne :

$$x=\frac{-(b+c)\pm\sqrt{b^2+c^2}}{2}$$

et en faisant :

$$b^2+c^2=(a+c)^2=a^2+2ab+c^2$$

on trouve :

$$c=-\frac{a^2-b^2}{2\,a} \quad \text{et} \quad b^2+c^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2}$$

d'où on déduit :

$$x=\frac{a^2-2ab-b^2\pm(a^2+b^2)}{4a}$$

Les valeurs de d, dans le cas présent, seront donc :

$$d=\frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad d=-\frac{b(a+b)}{2a}$$

En prenant la première valeur, et substituant, dans la proposée ainsi que dans sa résultante, $x+\frac{a-b}{2}$ à la place de x, on aura deux transformées qui, en multipliant toutes leurs racines par $2a$, deviendront :

$$x^2+(a^2+b^2)x-ab(a^2-b^2)=o \quad \text{ou} \quad [x+a(a+b)][x-b(a-b)]=o$$

$$x^2+(a^2+b^2)x+ab(a^2-b^2)=o \quad \text{ou} \quad [x+a(a-b)][x+b(a+b)]=o$$

Ces deux équations, ne différant entre elles que par le signe de leur dernier terme, et ayant une résultante commune dont les racines sont commensurables, on pourra, d'après la remarque du n.° précédent, les multiplier l'une par l'autre, et on retrouvera les équations K du n.° 14.

La seconde valeur de d conduirait aux mêmes équations, en changeant les signes de toutes les racines.

28. Soient maintenant les équations du troisième degré :

$$[x+p-a-c][x+a][x+c]=o$$

et

$$[x+p-b-d][x+b][x+d]=o$$

ou

$$x^3+px^2+(ap+cp-a^2-ac-c^2)x+acp-a^2c-ac^2=o$$

et

$$x^3+px^2+(bp+dp-b^2-bd-d^2)x+bdp-b^2d-bd^2=o$$

Pour que le troisième terme de la première soit égal au troisième terme de la seconde, il faut qu'on ait :

$$ap+cp-a^2-ac-c^2=bp+dp-b^2-bd-d^2$$

ce qui donne :

$$p=\frac{a^2+ac+c^2-b^2-bd-d^2}{a+c-b-d}$$

Cette valeur étant substituée dans les équations primitives, on a :

$$\left.\begin{array}{c} x^3+\dfrac{a^2+ac+c^2-b^2-bd-d^2}{a+c-b-d}x^2+ \\ \dfrac{(a^2+ac+c^2)(b+d)-(b^2+bd+d^2)(a+c)}{a+c-b-d}x+\dfrac{ac[(b+d)(a+c-b-d)-ac+bd]}{a+c-b-d} \end{array}\right\}=o$$

et

$$\left.\begin{array}{c} x^3+\dfrac{a^2+ac+c^2-b^2-bd-d^2}{a+c-b-d}x^2+ \\ \dfrac{(a^2+ac+c^2)(b+d)-(b^2+bd+d^2)(a+c)}{a+c-b-d}x+\dfrac{bd[(a+c)(a+c-b-d)-ac+bd]}{a+c-b-d} \end{array}\right\}=o$$

ou

ou

$$\left.\begin{array}{l} \left[x+b+d+\dfrac{bd-ac}{a+c-b-d}\right]\left[x+a\right]\left[x+c\right]=o \\ \text{et} \\ \left[x+a+c+\dfrac{bd-ac}{a+c-b-d}\right]\left[x+b\right]\left[x+d\right]=o \end{array}\right\} \text{O}$$

Si l'on veut encore que ces équations ne diffèrent que par le signe de leur dernier terme, il faudra faire :

$ac(b+d)(a+c-b-d)-a^2c^2=-bd(a+c)(a+c-b-d)-b^2d^2$

équation qui, étant résolue par rapport à c, donnera (en faisant pour abréger $a+b=h$ et $a-b=k$) :

$$c=\frac{1}{2(hd-ka)}\{hd^2-hkd-kab\pm$$

$$\sqrt{h^2d^4-2hk^2d^3+k(h^2k-6hab-4kab)d^2+2k^2ab(h+2a)d+k^2a^2b^2}\}$$

Ces valeurs devant être rationnelles, il faudra que la quantité qui est sous le radical devienne un carré. Supposant donc que la racine de ce carré soit $\pm hd^2+\lambda d+kab$, on aura :

$$h^2d^4-2hk^2d^3+k(h^2k-6hab-4kab)d^2+2k^2ab(h+2a)d+k^2a^2b^2=$$

$$=h^2d^4\pm 2h\lambda d^3+\qquad(\pm 2hkab+\lambda^2)d^2+\qquad 2k\lambda abd+k^2a^2b^2$$

Egalant ensuite les coefficiens de d, 1.° il viendra $\lambda=k(h+2a)$, 2.° l'équation sera réduite à

$$-2hk^2d+k(h^2k-6hab-4kab)=\pm 2hk(h+2a)d\pm 2hkab+k^2(h+2a)^2$$

et donnera :

$$d=\frac{-3hab\mp hab-2kab-2hka-2ka^2}{h(k\pm h\pm 2a)}$$

Cette double valeur de d conduisant à deux résultats également remarquables, nous l'emploîrons successivement, 1.° avec les signes supérieurs, 2.° avec les signes inférieurs.

29. En prenant les signes supérieurs, on a :

$$d=\frac{-4hab-2ka(a+b+h)}{h(k+h+2a)}=\frac{-4hab-4hak}{4ha}=-b-k=-a.$$

Cette valeur étant mise pour d dans l'expression des valeurs de c, qui, par l'hypothèse, devient :

$$c=\frac{hd^2-hkd-kab\pm(hd^2-hkd+2kad+kab)}{2(hd-ka)}$$

on trouve :

$$c=\frac{ha+hk-kb\pm(ha-hk-2ka+kb)}{-4a}$$

d'où

$$c=\frac{2ha-2ka}{-4a}=-b$$

et

$$c=\frac{2hk+2ak-2kb}{-4a}=-(a-b)$$

Substituant ensuite l'une ou l'autre de ces valeurs de c, ainsi que la valeur de d dans les équations O du numéro précédent, ces équations deviennent :

$$\left.\begin{array}{ll} & x^3-(a^2-ab+b^2)x+ab(a-b)=o \\ \text{et} & \\ & x^3-(a^2-ab+b^2)x-ab(a-b)=o \\ \text{ou} & \\ & [x-(a-b)][x+a][x-b]=o \\ \text{et} & \\ & [x+(a-b)][x-a][x+b]=o \end{array}\right\}\text{P}$$

Dans cet état, leur résultante commune a pour ses deux racines effectives :

$$x=\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

valeurs qu'on rend rationnelles, en faisant :

$$a^2-ab+b^2=(b-\lambda)^2=b^2-2b\lambda+\lambda^2$$

ce qui donne :

$$b=-\frac{a^2-\lambda^2}{2\lambda-a}$$

A l'aide de cette dernière expression, on parvient aisément aux équations :

$$x^3-(a^2-a\lambda+\lambda^2)^2x-a\lambda(a^2-\lambda^2)(2a-\lambda)(2\lambda-a)=o$$

et

$$x^3-(a^2-a\lambda+\lambda^2)^2x+a\lambda(a^2-\lambda^2)(2a-\lambda)(2\lambda-a)=o$$

ou

$$[x-\lambda(2a-\lambda)][x+a(2\lambda-a)][x+(a^2-\lambda^2)]=o$$

et

$$[x+\lambda(2a-\lambda)][x-a(2\lambda-a)][x-(a^2-\lambda^2)]=o$$

dont la résultante est :

$$x[x+(a^2-a\lambda+\lambda^2)][x-(a^2-a\lambda+\lambda^2)]=o$$

Enfin, ces équations, étant multipliées l'une par l'autre, d'après la remarque du n.° 26, donnent l'équation du sixième degré :

$$\left.\begin{array}{l} x^6-2(a^2-a\lambda+\lambda^2)^2x^4+(a^2-a\lambda+\lambda^2)^4x^2-a^2\lambda^2(a^2-\lambda^2)^2(2a-\lambda)^2(2\lambda-a)^2=o \\ \text{ou} \\ [x^2-\lambda^2(2a-\lambda)^2][x^2-a^2(2\lambda-a)^2][x^2-(a^2-\lambda^2)^2]=o \end{array}\right\} Q$$

qui a pour résultante :

$$x^2[x+(a^2-a\lambda+\lambda^2)]^2[x-(a^2-a\lambda+\lambda^2)]^2=o$$

30. Nous ferons observer ici, 1.° que les équations du troisième degré, qui nous ont donné l'équation Q, sont les mêmes que les équations F du n.° 10 ; car il suffit, pour établir une parfaite identité entre elles, de changer $+\lambda$ en $-\lambda$, ce qui est permis, λ étant une quantité indéterminée ; 2.° qu'on peut encore obtenir l'équation Q par le moyen des équations E du n.° 9, en changeant d'abord les signes

de toutes les racines pour les rendre positives, faisant ensuite la quantité $a^2+a\lambda+\lambda^2$ égale à un carré, et mettant enfin x^2 à la place de x.

31. Prenons à présent les signes inférieurs dans la valeur de d (n.° 28), nous aurons :

$$d=\frac{-2hab-2kab-2hka-2ka^2}{h(k-h-2a)}=\frac{a(k+a)}{h}$$

quantité qui, étant mise à la place de d dans l'expression :

$$c=\frac{hd^2-hkd-kab\pm(-hd^2+hkd+2kad+kab)}{2(hd-ka)}$$

donnera :

$$c=\frac{k(k+a)}{h}=\frac{(a-b)(2a-b)}{a+b}$$

et

$$c=-\frac{b(k-b)}{h}=-\frac{b(a-2b)}{a+b}$$

L'une ou l'autre de ces valeurs de c, ainsi que la valeur de d, qui n'est autre chose que $\frac{a(2a-b)}{a+b}$, étant substituées à ces lettres dans les équations O du n.° 28, on aura (après avoir multiplié toutes les racines par $a+b$) les deux équations suivantes :

$$x^3+3(a^2-ab+b^2)x^2+2(a^2-ab+b^2)^2x-ab(a^2-b^2)(2a-b)(a-2b)=o$$

et

$$x^3+3(a^2-ab+b^2)x^2+2(a^2-ab+b^2)^2x+ab(a^2-b^2)(2a-b)(a-2b)=o$$

ou

$$[x-b(a-2b)][x+(a-b)(2a-b)][x+a(a+b)]=o$$

et

$$[x+a(2a-b)][x+(a-b)(a-2b)][x+b(a+b)]=o$$

dont la résultante commune est :

$$x[x+(a^2-ab+b^2)][x+2(a^2-ab+b^2)]=o$$

et qui, multipliées l'une par l'autre, donnent l'équation du sixième degré :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} x^6+6(a^2-ab+b^2)x^5+13(a^2-ab+b^2)^2x^4+12(a^2-ab+b^2)^3x^3+ \\ 4(a^2-ab+b^2)^4x^2-a^2b^2(a^2-b^2)^2(2a-b)^2(a-2b)^2 \end{array}\right\} = o \\ \text{ou} \\ \left.\begin{array}{c} [x-b(a-2b)][x+a(2a-b)][x+(a-b)(a-2b)] \times \\ [x+(a-b)(2a-b)][x+b(a+b)][x+a(a+b)] \end{array}\right\} = o \end{array}\right\} \mathrm{R}$$

qui a pour résultante :

$$x^2[x+(a^2-ab+b^2)]^2[x+2(a^2-ab+b^2)]^2=o$$

32. Le nombre a^2-ab+b^2 ou $a^2-a\lambda+\lambda^2$, qui entre dans la composition des équations Q et R, est remarquable en ce qu'il est la somme d'un carré et du triple d'un autre carré. En effet, les lettres a et b peuvent toujours représenter, l'une la somme, et l'autre la différence de deux nombres. On peut donc faire $a=\alpha+\beta$ et b ou $\lambda=\alpha-\beta$. Ces valeurs substituées dans a^2-ab+b^2 et $a^2-a\lambda+\lambda^2$, changent ces expressions en $\alpha^2+3\beta^2$, quantité qui conserve sa forme, tant qu'on n'a pas $\alpha=o$ ou $\beta=o$, c'est-à-dire, $b=-a$ ou $b=a$.

33. Si, à la place de $a^2-a\lambda+\lambda^2$, et de a^2-ab+b^2, on met $\alpha^2+3\beta^2$ dans les équations Q et R, on aura ;

pour les premières,

$$x^6-2(\alpha^2+3\beta^2)^2x^4+(\alpha^2+3\beta^2)^4x^2-16\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha^2-9\beta^2)^2=o$$

ou

$$[x^2-(\alpha+\beta)^2(\alpha-3\beta)^2][x^2-16\alpha^2\beta^2][x^2-(\alpha-\beta)^2(\alpha+3\beta)^2]=o$$

et

$$x^2[x^2-(\alpha^2+3\beta^2)^2]^2=o$$

et pour les secondes,

$$\left.\begin{array}{c} x^6+6(\alpha^2+3\beta^2)x^5+13(\alpha^2+3\beta^2)^2x^4+12(\alpha^2+3\beta^2)^3x^3+ \\ 4(\alpha^2+3\beta^2)^4x^2-16\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha^2-9\beta^2)^2 \end{array}\right\}=o$$

ou

$$\left.\begin{array}{c} [x+(\alpha-\beta)(\alpha-3\beta)][x+(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)][x+2\beta(\alpha+3\beta)] \times \\ [x+2\alpha(\alpha+\beta)][x-2\beta(\alpha-3\beta)][x+2\alpha(\alpha-\beta)] \end{array}\right\}=o$$

et

$$x^2[x+\alpha^2+3\beta^2]^2[x+2(\alpha^2+3\beta^2)]^2=o$$

En examinant avec attention ces équations, on aperçoit aisément que les secondes sont des transformées des premières, transformées qu'on obtient en mettant dans celles-ci $x+\alpha^2+3\beta^2$ à la place de x.

34. On peut aisément se procurer, pour le quatrième degré, deux équations complètes qui ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme. Pour cela, prenons les équations :

$$[x^2+mx+a(m-a)][x^2+nx+b(n-b)]=o$$

et

$$[x^2+mx+c(m-c)][x^2+nx+d(n-d)]=o$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} x^4+(m+n)x^3+(mn+ma+nb-a^2-b^2)x^2+ \\ (mna+mnb-na^2-mb^2)x+ab(m-a)(n-b) \end{array}\right\}=o$$

et

$$\left.\begin{array}{l} x^4+(m+n)x^3+(mn+mc+nd-c^2-d^2)x^2+ \\ (mnc+mnd-nc^2-md^2)x+cd(m-c)(n-d) \end{array}\right\}=o$$

qui ont leurs racines commensurables, et dont les seconds termes ont le même coefficient. Les conditions à remplir nous fourniront les équations suivantes :

$$ma+nb-a^2-b^2=mc+nd-c^2-d^2$$

et

$$mna+mnb-na^2-mb^2=mnc+mnd-nc^2-md^2$$

qui, en faisant :

$$a+c=\beta,\ a-c=\gamma,\ b+d=\delta,\ b-d=\varepsilon$$

deviennent :

$$\gamma m+\varepsilon n-\beta\gamma-\delta\varepsilon=o$$

et

$$\gamma mn+\varepsilon mn-\beta\gamma n-\delta\varepsilon m=o$$

La première donne :

$$m = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \varepsilon n}{\gamma}$$

et, en substituant cette valeur dans la seconde, on trouve l'équation :

$$(\gamma + \varepsilon)n^2 - (\beta\gamma + \gamma\delta + 2\delta\varepsilon)n + \delta(\beta\gamma + \delta\varepsilon) = o$$

de laquelle on tire :

$$n = \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + 2\delta\varepsilon \pm (\beta\gamma - \gamma\delta)}{2(\gamma + \varepsilon)}$$

on aura donc :

$$n = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \quad \text{et} \quad m = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}$$

ou

$$n = \delta \quad \text{et} \quad m = \beta$$

Le second système ne peut convenir à l'objet que nous nous proposons ; quant au premier, dans lequel m et n ont la même valeur, il conduit, en multipliant toutes les racines par $2(\gamma + \varepsilon)$, aux deux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}[x + (\beta + \gamma)(\gamma + \varepsilon)][x + 2\delta\varepsilon + \beta\gamma - \beta\varepsilon - \gamma^2 - \gamma\varepsilon] \times \\ [x + (\delta + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)][x + 2\beta\gamma + \delta\varepsilon - \gamma\delta - \gamma\varepsilon - \varepsilon^2]\end{array}\right\} = o \\ \text{et} \\ \left.\begin{array}{l}[x + (\beta - \gamma)(\gamma + \varepsilon)][x + 2\delta\varepsilon + \beta\gamma - \beta\varepsilon + \gamma^2 + \gamma\varepsilon] \times \\ [x + (\delta - \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)][x + 2\beta\gamma + \delta\varepsilon - \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \varepsilon^2]\end{array}\right\} = o\end{array}\right\} S$$

Ces équations renferment, dans leur généralité, les équations I et K du n.° 14. On en déduit les premières, en faisant d'abord ..... $\varepsilon = -\frac{\beta\lambda}{\delta}$; multipliant ensuite toutes les racines par $\frac{\delta}{\delta - \beta}$ et faisant enfin $\gamma = \beta$. Pour avoir les secondes, il suffit de faire $\varepsilon = \delta$ et $\gamma = \beta$.

35. Si, d'après ce que nous avons dit (n.° 26), on voulait passer à des équations du huitième degré, à l'aide des précédentes, il fau-

drait, 1.° que celles-ci ne différassent entre elles que par le signe de leur dernier terme, ce qui exigerait qu'on satisfît à l'équation :

$$(\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)(2\delta\varepsilon+\beta\gamma-\beta\varepsilon-\gamma^2-\gamma\varepsilon)(2\beta\gamma+\delta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\varepsilon^2)=$$
$$-(\beta-\gamma)(\delta-\varepsilon)(2\delta\varepsilon+\beta\gamma-\beta\varepsilon+\gamma^2+\gamma\varepsilon)(2\beta\gamma+\delta\varepsilon-\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\varepsilon^2).$$

2.° que leur résultante commune eût, comme elles, des racines commensurables. Ces conditions paraissent bien difficiles à remplir.

36. Pour avoir maintenant deux équations du cinquième degré, qui ne diffèrent entre elles que par le signe de leur dernier terme, il suffit de se rappeler qu'en changeant les signes des termes de rang pair d'une équation quelconque, on ne fait autre chose que changer les signes des racines : d'où il suit que, si une équation de degré impair est privée de tous ses termes de rang pair, à l'exception du dernier, en changeant le signe de ce dernier terme, on changera les signes de toutes les racines qui, par conséquent, resteront commensurables dans le second cas, si elles étaient commensurables dans le premier. On voit de plus, par le n.° 24, qu'une pareille équation ne peut avoir à la fois $+a$ et $-a$ pour racines. D'après ces remarques (qui peuvent d'ailleurs servir à trouver avec facilité les équations P du n.° 29), soit l'équation du cinquième degré :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-a-b-c-d)=o$$

qui n'a point de second terme. Il suffira, pour qu'elle n'ait de ses termes de rang pair que le dernier, de faire en sorte qu'elle soit également privée de son quatrième terme. Or, après le développement, le coefficient de x^2 ou du quatrième terme, est :

$$abc+abd+acd+bcd-(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Égalant donc cette quantité à zéro, et ordonnant par rapport à a, on aura l'équation :

$$(b+c+d)a^2+(b+c+d)^2a+(b^2c+b^2d+bc^2+2bcd+bd^2+c^2d+cd^2)=o$$

qui donne :

$$a=\frac{-(b+c+d)^2\pm\sqrt{(b+c+d)^4-4(b+c+d)(b^2c+b^2d+bc^2+2bcd+bd^2+c^2d+cd^2)}}{2(b+c+d)}$$

Il

Il faut, par conséquent, que la quantité :

$$(b+c+d)^4-4(b+c+d)(b^2c+b^2d+bc^2+2bcd+bd^2+c^2d+cd^2)$$

ou

$$b^4-2(c+d)^2b^2-4cd(c+d)b+(c^2-d^2)^2$$

qui est sous le radical, soit égale à un carré. On la rend telle, en supposant d'abord :

$$b=c+d$$

ce qui la réduit à :

$$-8cd(c+d)^2$$

et faisant ensuite :

$$c=2\alpha^2 \quad \text{et} \quad d=-\beta^2$$

car alors elle devient :

$$16\alpha^2\beta^2(2\alpha^2-\beta^2)^2$$

On trouve, d'après cela :

$$a=\frac{-4(2\alpha^2-\beta^2)^2\pm4\alpha\beta(2\alpha^2-\beta^2)}{4(2\alpha^2-\beta^2)}=-2\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2$$

et

$$-a-b-c-d=-2\alpha^2\mp\alpha\beta+\beta^2$$

enfin l'équation primitive se change en

$$\left.\begin{array}{l}
[x-(2\alpha+\beta)(\alpha-\beta)][x-(2\alpha-\beta)(\alpha+\beta)][x+2\alpha^2-\beta^2][x+2\alpha^2][x-\beta^2]=o\\
\text{ou}\\
\left.\begin{array}{l} x^5-(8\alpha^4-5\alpha^2\beta^2+2\beta^4)x^3+(16\alpha^8-28\alpha^6\beta^2+22\alpha^4\beta^4-7\alpha^2\beta^6+\beta^8)x-\\ \qquad 2\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)(4\alpha^2-\beta^2)(2\alpha^2-\beta^2)\end{array}\right\}=o\\
\text{et on a pour seconde équation :}\\
[x+(2\alpha+\beta)(\alpha-\beta)][x+(2\alpha-\beta)(\alpha+\beta)][x-2\alpha^2+\beta^2][x-2\alpha^2][x+\beta^2]=o\\
\text{ou}\\
\left.\begin{array}{l} x^5-(8\alpha^4-5\alpha^2\beta^2+2\beta^4)x^3+(16\alpha^8-28\alpha^6\beta^2+22\alpha^4\beta^4-7\alpha^2\beta^6+\beta^8)x+\\ \qquad 2\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)(4\alpha^2-\beta^2)(2\alpha^2-\beta^2)\end{array}\right\}=o
\end{array}\right\}\mathrm{T}$$

La résultante commune de ces deux équations n'a point de racines commensurables, et il serait difficile de l'y amener, si toutefois la chose est possible.

37. Après avoir exposé, dans ce qui précède, les divers résultats auxquels je suis parvenu, je crois devoir faire observer qu'on pourrait arriver à quelques-uns par des moyens plus simples; mais j'ai préféré d'employer des méthodes générales, et de varier autant qu'il m'a été possible les solutions que j'ai données.

La question principale, c'est-à-dire, celle de trouver deux équations du degré m, qui ne diffèrent que par leur dernier terme, et aient des nombres rationnels pour racines, peut être envisagée sous différens points de vue.

1.° Il est évident, par le théorème de Newton sur les sommes des puissances des racines d'une équation, qu'elle peut s'énoncer ainsi: Trouver $2m$ nombres, tels que les sommes des 1.res, 2.mes, 3.mes ... $m-1$.mes puissances des m premiers, soient respectivement égales aux sommes des 1.res, 2.mes, 3.mes .... $m-1$.mes puissances des m derniers.

2.° On voit, d'après la composition générale des équations, que, si on a $2n$ équations du degré m, qui ne diffèrent entre elles que par leur dernier terme, et soient telles que les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... $n-1$ à $n-1$ des derniers termes des n premières, soient respectivement égales aux sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... $n-1$ à $n-1$ des derniers termes des n dernières, en multipliant entre elles les n premières d'une part, et les n dernières d'autre part, on aura deux équations du degré mn, qui ne différeront entre elles que par leur dernier terme. La remarque du n.° 26 rentre, comme cas particulier, dans ce que je viens de dire.

3.° Lorsqu'on a deux équations complètes en x du degré m, conditionnées comme nous le demandons, on peut, après avoir rendu toutes les racines positives, chercher à les transformer en carrés: alors, en mettant dans ces équations x^2 à la place de x, on a deux équations du degré $2m$, décomposables en facteurs de la forme x^2-a^2, et qui satisfont aux conditions prescrites. J'ai, dans le n.° 30, indiqué ce moyen comme pouvant servir pour parvenir aux équations P du sixième degré, par le moyen d'équations du troisième.

4.° Enfin, pour avoir deux équations de degré impair, qui jouissent de la propriété demandée, il est aisé de se convaincre que, si on peut se procurer deux équations du degré m, qui, ne différant entre elles que par leur avant-dernier terme, soient telles que leurs résultantes aient, comme elles, des racines commensurables, en multipliant la première par la résultante de la seconde divisée par x, et la seconde par la résultante de la première pareillement divisée par x, on aura deux équations du degré $2m-1$, qui n'auront de différence que dans leur dernier terme. On peut aisément, par cette voie, obtenir des équations du troisième degré, à l'aide de celles du second.

Ces diverses considérations pourront être utiles à ceux qui voudront pousser plus avant les recherches qui font l'objet de ce mémoire. Je dois convenir ici que les tentatives que j'ai faites pour céla ne m'ont pas réussi ; mais je suis loin de croire qu'on ne puisse trouver, pour les degrés supérieurs au sixième, des équations qui satisfassent aux conditions prescrites ; je suis persuadé, au contraire, que, si des personnes versées dans l'analise indéterminée s'occupaient de cette théorie, elles pourraient y faire des découvertes intéressantes.

(La seconde partie à un prochain numéro.)

ÉLÉMENS DU CALCUL.

De l'identité entre les produits qui résultent des mêmes facteurs différemment multipliés entre eux.

Par M. Gergonne.

On sait que, *dans une multiplication numérique, on peut, sans changer la valeur du produit, prendre le multiplicande pour multiplicateur, et réciproquement*; et qu'en général, *lorsqu'on veut déterminer le produit de plusieurs facteurs, on peut, à volonté, intervertir, d'une manière quelconque, l'ordre des multiplications qui doivent conduire au résultat qu'on se propose d'obtenir.*

Une expérience qui ne s'était jamais démentie, et peut-être aussi la difficulté qu'on éprouvait à démontrer cette proposition d'une manière satisfaisante, l'a fait admettre pendant long-temps au nombre des propositions évidentes d'elles-mêmes. Ce n'est seulement que dans ces derniers temps qu'en y refléchissant mieux, on a commencé à apercevoir que, loin de pouvoir être classée parmi les axiomes, elle offre au contraire, dans son universalité, un fait non moins singulier qu'il est important, et qui serait même pour nous un sujet de surprise si, en cette rencontre comme en beaucoup d'autres, l'habitude de voir ne devenait un obstacle à notre étonnement.

Il n'est personne, à la vérité, parmi ceux à qui les nombres sont tant soit peu familiers, qui n'aperçoive d'une première vue que 2 pris 3 fois, et 3 pris 2 fois, font également 6; que 3 pris 4 fois, et 4 pris 3 fois, font également 12, et ainsi du reste; mais il n'est point du tout évident que, par exemple, il revienne au même d'ajouter 235 fois à lui-même le nombre 173, ou d'ajouter 172 fois à lui-même le nombre 236; et ces deux opérations, soit qu'on y procède par addition ou qu'on y fasse usage de la multiplication, diffèrent trop dans leur marche pour qu'on puisse prévoir à l'avance, si déja l'on n'en était averti, qu'elles doivent conduire au même résultat. A plus forte raison la chose cesse-t-elle d'être claire d'elle-même, si l'on admet de plus grands facteurs et en plus grand nombre, et elle le devient encore moins, si l'on prend des facteurs fractionnaires ou irrationnels. Cette propriété est même tellement inhérente à la qualité abstraite des nombres, qu'elle cesse d'être vraie du moment qu'on les en dépouille. Ainsi, par exemple, tandis que la multiplication d'une ligne par un nombre abstrait est une opération parfaitement intelligible et facilement exécutable avec la règle et le compas, celle d'un nombre abstrait par une ligne n'est, au contraire, qu'un être de raison.

On a donc très-bien fait de chercher à démontrer, dans les livres élémentaires, que *le produit de plusieurs facteurs se compose de la même manière de chacun de ces facteurs, et en est conséquemment une fonction symétrique;* mais, des démonstrations qu'on a données jusqu'ici de ce principe, la plupart manquent de rigueur, de généralité ou de simplicité, et les autres sont de véritables paralogismes. C'est ce qui me détermine à présenter ici celle que, depuis plusieurs années, j'ai adoptée dans mes cours, et qui me paraît ne rien laisser à désirer.

Il est une vérité d'un ordre plus élevé, qui a beaucoup d'analogie avec celle-là, et qui peut être démontrée par le même tour de raisonnement; je veux parler de l'identité entre les résultats auxquels on parvient, dans la différentiation des fonctions de plusieurs variables, en intervertissant d'une manière quelconque l'ordre des différentiations successives: identité qui, pendant long-temps, a aussi été admise sans être prouvée ; j'en dirai quelque chose, après que j'aurai développé la démonstration que j'ai principalement en vue.

Cette démonstration suppose qu'on se soit déjà assuré de la vérité de la proposition pour les produits de deux et ceux de trois facteurs entiers. Le moyen le plus naturel et le plus simple d'y parvenir est peut-être de recourir à des considérations géométriques, comme l'a fait M. *Legendre*, dans son *Essai sur la théorie des nombres* (1), et comme je le faisais déjà, dans mes cours, avant que ce savant ouvrage me fût connu. Afin de présenter ici une théorie complète, je vais d'abord traiter ces deux cas particuliers, aussi brièvement qu'il me sera possible.

Deux facteurs ne peuvent être multipliés l'un par l'autre que de deux manières différentes, parce qu'il n'y a que deux manières de choisir entre eux le multiplicateur, et que, le choix fait, le multiplicande se trouve de lui-même déterminé. Quant à trois facteurs, on peut en former le produit de six manières différentes, parce qu'il y a trois manières de choisir entre eux le dernier facteur, et que, dans chaque cas, il y a deux manières de former le produit des deux premiers. Si donc on prouve que deux facteurs peuvent donner *deux produits*, et trois facteurs, *six produits* qui soient égaux, il sera prouvé que *tous les produits*, soit de deux, soit de trois facteurs, sont égaux de quelque manière qu'on les forme.

Or, soit premièrement un rectangle dont on ait divisé les deux côtés d'un même angle en plusieurs parties ; que l'on conçoive, par les points de division de chacun de ces côtés, des parallèles à l'autre, ces droites diviseront le rectangle total en rectangles partiels dont le nombre sera le produit du nombre de ceux qui reposeront sur la base par le nombre des divisions de la hauteur ; et, comme il en reposera autant sur cette base qu'elle aura de divisions, on pourra dire, plus simplement, que le nombre des rectangles partiels est le produit du nombre des divisions de la base par le nombre de

(1) *Voyez pages 2 et suivantes.*

celles de la hauteur; et, comme on peut prendre indifféremment pour hauteur chacun des côtés divisés, il en résulte que le nombre de ces rectangles pourra être exprimé par deux produits des mêmes facteurs, et que conséquemment deux semblables produits sont égaux.

Soit, en second lieu, un parallélipipède rectangle dont on ait divisé les trois arêtes d'un même angle en plusieurs parties; que l'on conçoive, par les points de division de chacune, des plans parallèles à la face qui contient les deux autres, ces plans diviseront le parallélipipède total en parallélipipèdes partiels dont le nombre sera le produit du nombre de ceux qui reposeront sur la base ou, ce qui revient au même, du nombre des rectangles compris dans cette base, par le nombre des divisions de la hauteur; mais, cette hauteur peut être indifféremment chacune des arêtes divisées, et, dans chaque cas, le nombre des rectangles compris dans la base peut, d'après ce qui précède, être évalué de deux manières différentes; d'où l'on voit que le nombre des parallélipipèdes partiels, compris dans le parallélipipède total, pourra être exprimé par six produits des trois mêmes facteurs, et que conséquemment six semblables produits sont égaux.

Ayant ainsi prouvé que les produits de deux et de trois facteurs sont toujours égaux, de quelque manière qu'on procède à leur formation, je vais démontrer maintenant que, si l'on était assuré qu'il en fût ainsi pour les produits de $n-2$ et pour ceux de $n-1$ facteurs, on serait en droit d'en conclure que la proposition est vraie aussi pour les divers produits que l'on peut former avec n facteurs donnés.

Soient en effet comparés entre eux deux quelconques de ces produits; ou ils auront le même dernier facteur, ou bien le dernier facteur sera différent dans chacun. Dans le premier cas, l'avant-dernier produit sera le même de part et d'autre, puisqu'il proviendra de la multiplication des $n-1$ mêmes facteurs; on aura donc, de part et d'autre, à la dernière multiplication, même multiplicande et même multiplicateur, et conséquemment même résultat.

Si, au contraire, le dernier facteur n'est pas le même dans les deux produits; on pourra, sans rien changer à leur valeur, amener à l'avant-dernière place, dans chacun, le facteur qui se trouve le dernier dans l'autre; car on ne fera ainsi qu'intervertir l'ordre des multiplications entre les $n-1$ mêmes facteurs; alors, de part et d'autre, les deux derniers facteurs seront les mêmes, et se présenteront seulement dans un ordre inverse; et comme, de part et d'autre aussi, les facteurs qui précéderont les deux derniers seront les mêmes, et en nombre $n-2$, ils donneront le même produit: considérant donc ce produit comme un même premier facteur, il restera à former deux produits des trois mêmes facteurs; produits qui, d'après ce qui précède, seront nécessairement égaux.

Il est donc prouvé maintenant que la proposition serait vraie pour n facteurs, si l'on était certain qu'elle le fût pour $n-2$ et $n-1$ facteurs; mais, puisqu'elle est vraie pour 2 et 3 facteurs, elle doit l'être pour 4; l'étant pour 3 et 4, elle le sera pour 5, et ainsi de suite: elle est donc générale.

Voilà pour ce qui concerne les nombres entiers, considérés abstraction faite de leur signe; et, comme il est aisé de prouver, *à priori*, que le signe du produit de plusieurs facteurs dépend uniquement du nombre des facteurs négatifs, et non point du rang suivant lequel ils se présentent, on en peut conclure que, même en ayant égard à leur signe, le produit de plusieurs facteurs entiers est encore une fonction symétrique de ces facteurs; enfin, les règles de la multiplication des facteurs, soit fractionnaires, soit radicaux, prouvent que le même principe leur est également applicable.

De là il est facile de conclure, 1.° que, *si plusieurs nombres doivent être combinés entre eux uniquement par voie de multiplication et de division, on peut intervertir, comme on le voudra, l'ordre des opérations qui doivent conduire au résultat, pourvu qu'on opère constamment de la même manière avec les mêmes nombres*; 2.° que, *si l'on doit élever successivement un même nombre à diverses puissances, et en extraire diverses racines, on peut aussi, sans altérer le résultat final, intervertir, comme on le voudra, l'ordre des opérations.*

Voici

Voici encore une autre proposition dépendant des mêmes principes, et qui, bien qu'on la suppose tacitement dans une multitude de calculs, ne se trouve néanmoins démontree ni même énoncée nulle part : c'est que, *si l'on a à former le produit de plusieurs facteurs, on peut, pour parvenir au but, distribuer d'abord ces facteurs en plusieurs groupes, prendre ensuite séparément le produit des facteurs de chaque groupe, et multiplier enfin entre eux les produits ainsi déterminés.*

Supposons, en effet, qu'il soit question de prouver que

$$abc\ldots ka'b'c'\ldots k' = (abc\ldots k)\times(a'b'c'\ldots k')$$

on y parviendra par cette suite d'équations, conséquences nécessaires les unes des autres, et du principe fondamental que nous avons établi :

$$\begin{aligned}
abc\ldots ka'b'c'\ldots k' &= (abc\ldots k)a'b'c'\ldots k' \\
(abc\ldots k)a'b'c'\ldots k' &= a'b'c'\ldots k'(abc\ldots k) \\
a'b'c'\ldots k'(abc\ldots k) &= (a'b'c'\ldots k')(abc\ldots k) \\
(a'b'c'\ldots k')(abc\ldots k) &= (abc\ldots k)\times(a'b'c'\ldots k')
\end{aligned}$$

lesquelles, étant multipliées entre elles, donneront, par la suppression des facteurs identiquement les mêmes dans les deux membres, l'équation qu'il s'agissait d'établir. En procédant de proche en proche, on parviendra à prouver généralement que

$$abc\ldots ka'b'c'\ldots k'a''b''c''\ldots k''\ldots = (abc\ldots k)\times(a'b'c'\ldots k')\times(a''b''c''\ldots k'')\times\ldots$$

Je reviens actuellement aux coefficiens différentiels des fonctions de plusieurs variables. Soit z une fonction de tant de variables t, u, v, ... qu'on voudra ; on prouvera facilement, par la comparaison des divers développemens dont la fonction variée relative à deux et à trois variables est susceptible, que

$$\frac{d^2z}{dt\,du} = \frac{d^2z}{du\,dt}$$

et que

$$\frac{d^3z}{dtdudv}=\frac{d^3z}{dudtdv}=\frac{d^3z}{dtdvdu}=\frac{d^3z}{dvdtdu}=\frac{d^3z}{dudvdt}=\frac{d^3z}{dvdudt}$$

et, une fois la vérité de ces propositions reconnue, un raisonnement absolument pareil à celui qui a été appliqué plus haut aux produits des facteurs entiers et positifs, dont le nombre excède trois, prouvera que généralement *la forme d'un coefficient différentiel d'une fonction, quel que soit l'ordre de ce coefficient, et quelles que soient les variables auxquelles il est relatif, est tout à fait indépendante de la manière dont on fait succéder les unes aux autres les différentiations nécessaires pour l'obtenir.*

STATIQUE.

Sur une nouvelle forme de l'équation de la chaînette uniformément pesante.

Par M. GERGONNE.

ON sait qu'en désignant par x les coordonnées horisontales, et par y les coordonnées verticales, et prenant x pour la variable indépendante, l'équation différentielle de la chaînette uniformément pesante est :

$$b\mathrm{d}^2y+\mathrm{d}x\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=o$$

dans laquelle b est une constante arbitraire.

On intègre ordinairement cette équation, en rendant ses deux membres, par des transformations, des différentielles exactes; on obtient ainsi pour l'équation primitive de la courbe :

$$x = b \{ \text{Log.} [(a-y) - \sqrt{(a-y)^2 - b^2}] + c \} \text{ (1).}$$

Cette équation, bien qu'assez simple, est d'une forme assez peu symétrique, tandis que, par une autre voie que je vais indiquer, on peut en obtenir une qui me paraît beaucoup plus élégante, et qui, pour cette raison, serait peut-être plus propre à mettre en évidence la nature et les propriétés de la courbe funiculaire.

En changeant, dans l'équation différentielle ci-dessus, b en $-\frac{1}{a}$, ce qui est permis, et formant les coefficiens différentiels, il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

faisant ensuite $\frac{dy}{dx} = p$, on a :

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2} \qquad \text{d'où} \qquad a dx = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

ce qui donne en intégrant :

$$ax = b - \text{Log.} (\sqrt{1+p^2} - p)$$

d'où

$$\sqrt{1+p^2} = p + e^{b-ax}$$

Quarrant et tirant la valeur de p, il vient :

$$p \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ e^{-(b-ax)} - e^{(b-ax)} \right\}$$

ce qui donne, en intégrant de nouveau :

$$2ay + c = e^{(b-ax)} + e^{-(b-ax)}$$

---

(1) Voyez le *Traité élémentaire de Méchanique* de M. Francœur.

Telle est la forme sous laquelle se présente alors l'équation primitive de la courbe ; elle renferme, comme l'on voit, trois constantes arbitraires qui ne peuvent être déterminées que par un même nombre de conditions distinctes. On peut, au surplus, à cette équation substituer la suivante dont la forme est assez remarquable :

$$e^{-(b-ax)}=\cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\text{etc.}}}}}$$

En faisant dans l'équation, considérée sous sa première forme, $e^{(b-ax)}=z$, on en déduit ces deux-ci :

$$\text{Log. } z=b-ax \qquad z^2-(2ay+c)z+1=0$$

ce qui offre le moyen de construire la courbe par points, à l'aide d'une logarithmique et d'une hyperbole équilatérale, lorsque les constantes a, b, c, sont connues.

Les conditions qui se présentent à la fois le plus naturellement et le plus utilement pour la détermination de ces trois constantes, sont la longueur de la chaînette et la situation de ses deux extrémités ; soit donc pris l'une de ces extrémités pour origine ; soit x' et y' les coordonnées de l'autre, et soit k la longueur de la courbe entre ces deux points, en différentiant l'équation de la courbe, il vient, comme nous l'avons déjà vu :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{e^{-(b-ax)}-e^{(b-ax)}\right\}$$

d'où

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left\{e^{-(b-ax)}+e^{(b-ax)}\right\}^2$$

donc

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}dx\left\{e^{-(b-ax)} + e^{(ba-x)}\right\}$$

en intégrant entre $x=o$ et $x=x'$, s devra se changer en k, et il viendra :

$$\text{(I)} \qquad 2ak = e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) - e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right)$$

de plus, les coordonnées des deux extrémités de la courbe devant satisfaire à son équation, on aura :

$$\text{(II)} \quad c = e^{b} + e^{-b} \qquad \text{(III)} \quad 2ay' + c = e^{(b-ax')} + e^{-(ba-x')}$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer les trois constantes a, b, c.

En prenant la différence entre les deux dernières, il vient :

$$\text{(IV)} \qquad 2ay' = e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) + e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right)$$

prenant alors la demi-somme et la demi-différence des équations (I) et (IV), il viendra :

$$\text{(V)} \quad e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) = a(y'+k) \qquad \text{(VI)} \quad e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right) = a(y'-k)$$

multipliant enfin ces deux dernières équations membre à membre, on aura :

$$e^{ax'} + e^{-ax'} = 2 - a^2(y'^2 - k^2)$$

Or on a, comme l'on sait (1):

$$e^{ax'} = 1 + \frac{ax'}{1} + \frac{a^2x'^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots \qquad e^{-ax'} = 1 - \frac{ax'}{1} + \frac{a^2x'^2}{1\cdot 2} - \ldots\ldots$$

---

(1) Voyez le *Complément d'Algèbre* de M. Lacroix.

on aura donc, en substituant, réduisant et transposant :

$$k^2-(x'^2+y'^2)=\frac{x'^4}{3\cdot4}a^2+\frac{x'^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6}a^4+\frac{x'^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}a^6+\ldots\ldots$$

par la méthode inverse des séries, on pourra tirer de cette équation la valeur de a; l'équation (V) donnera ensuite :

$$b=\text{Log.}\left(e^{ax'}-1\right)-\text{Log.}\,a(y'+k)$$

et on aura enfin c par l'équation (II).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.

Si des droites, au nombre de plus de trois, sont tracées sur un même plan, elles se couperont en divers points, et, en prenant deux à deux, de toutes les manières possibles, ceux de ces points qui n'appartiendront pas à une même droite; on pourra y faire passer de nouvelles droites qui se couperont et couperont les premières en de nouveaux points : opérant sur ces droites, considérées conjointement avec les premiers, comme on avait fait sur celles-ci, on formera une troisième série de droites et de points, et cette troisième série pourra, par un semblable procédé, donner naissance à une quatrième, puis à une cinquième, et ainsi de suite; de manière qu'en général le nombre, tant des points que des droites du système, pourra être augmenté indéfiniment.

Ces choses ainsi entendues, soit tracé sur un même plan deux systèmes (S) et (Σ) composés l'un et l'autre de m droites, m étant au moins égal à trois; soit ensuite déduit des m droites de chaque système, de la manière qui vient d'être expliquée, tant de séries de droites et de points qu'on voudra ; soit alors désigné par d, d', d'', ... toutes les droites du premier système, et par δ, δ', δ'', ... leurs correspondantes dans le second ; soit en outre désigné par p, p', p'', ... les points du premier système et par ϖ, ϖ', ϖ'', ... leurs correspondans dans le second ; soit enfin désigné par D, D$'$, D$''$, ... de nouvelles droites indéfinies qui passent par les points correspondans des deux systèmes (1).

Cela posé, on propose de démontrer 1.° que, le système (S) étant construit arbitrairement, il est toujours possible de construire le système (Σ) de telle manière que, dans la série des droites D, D$'$, D$''$, ... il s'en trouve $2m-3$ qui soient parallèles ou qui concourent en un même point ; 2.° que, s'il en est ainsi, toutes les autres droites de la série D, D$'$, D$''$, ..., lesquelles pourront se trouver en nombre infini, seront d'elles-mêmes parallèles aux premières, ou concourront au même point qu'elles ; 3.° enfin que, dans la même hypothèse, les points de concours des droites correspondantes des deux systèmes, telles que d et δ, d' et δ', d'' et δ'', ..., lesquels points pourront être aussi en nombre infini, seront tous situés sur une même droite.

---

(1) Pour se former une idée nette de ces notations et de ce qu'on entend ici par points correspondans et droites correspondantes dans les deux systèmes, on peut supposer qu'on a d'abord désigné arbitrairement par les m premières lettres d, d', d'', ... les m droites primitives du système (S), et par les m premières lettres δ, δ', δ'', ... les m droites primitives du système (Σ) ; regardant alors comme droites correspondantes, dans les deux systèmes, celles qui se trouveront désignées par d et δ affectés des mêmes accens, on considérera comme points correspondans ceux qui seront déterminés par l'intersection des droites correspondantes, et on les désignera par p et ϖ affectés d'un pareil nombre d'accens : on considérera également comme de nouvelles droites correspondantes, celles qui seront assujetties à passer par des points correspondans, et on continuera à les designer par les lettres d et δ affectées des mêmes accens ; joignant enfin, par des droites indéfinies, les points correspondans des deux systèmes, on désignera par D celle qui joindra p et ϖ, par D$'$ celle qui joindra p' et ϖ', et ainsi de suite.

Porismes.

I.

Un cercle étant donné et un point étant donné arbitrairement sur son plan et dans son intérieur, il y a toujours une longueur, et une seule longueur, laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle ayant pour centre le point donné, il arrivera qu'un même triangle pourra être à la fois inscrit au premier des deux cercles, et circonscrit au second.

II.

Un cercle étant donné et un point étant donné arbitrairement sur son plan, il y a toujours une longueur, et une seule longueur, laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle ayant pour centre le point donné, il arrivera qu'un même triangle pourra être à la fois circonscrit au premier des deux cercles, et inscrit au second.

ACOUSTIQUE.

Considérations sur les bases physico-mathématiques de l'art musical.

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes.

L'expérience a fait voir que les recherches des savans dans l'étude de la nature sont rarement infructueuses, et que celles dont l'objet semble le plus éloigné d'atteindre à quelque utilité réelle, jettent tôt ou tard une lumière nouvelle dans la pratique des arts. Combien de phénomènes long-temps isolés, dépourvus en apparence de tout intérêt, et ne paraissant offrir que le fruit stérile de quelques observations oiseuses, ont fini par se rattacher à des doctrines importantes, et par conduire à des conséquences inattendues qui ont exercé une influence directe et féconde sur les moyens de satisfaire aux besoins de l'homme ou d'augmenter ses jouissances !

Telle sera vraisemblablement la destinée des découvertes que les modernes ont faites dans l'Acoustique, relativement aux bases physico-mathématiques de l'art musical. Voici quelques légers aperçus sur cet objet.

Des savans très-versés dans la connaissance des auteurs qui ont traité de la musique des anciens, ont pensé qu'il a existé un système musical commun aux Égyptiens, aux Chinois et aux Grecs ; que ce système était uniquement fondé sur la progression triple et sur l'identité des octaves, c'est-à-dire, sur le *sacré quaternaire* 1, 2, 3, 4, qui donne 1 et 2, rapport de l'octave ; 1 et 3, rapport de la douzième ; 2 et 3, rapport de la quinte ; 3 et 4, rapport de la quarte ; 1 et 4, rapport de la double octave ; d'où il s'ensuivait que le diagramme déduit de ce principe ne contenait que des tons égaux dans le rapport $\frac{8}{9}$, une tierce majeure dans le rapport $\frac{64}{81}$, et une tierce mineure dans celui de $\frac{27}{32}$; ce qui excluait nécessairement les tierces et les sixtes du nombre des consonnances. Les mêmes auteurs ont pensé que tel était le système de Pythagore, et que les modifications introduites par Didyme et Ptolémée ne furent que des erreurs qui furent ensuite répétées par Zarlin, et propagées à tort comme des principes liés au système musical des anciens Grecs.

Quoi qu'il en soit, Ptolémée substitua le rapport $\frac{4}{5}$, pour la tierce majeure, au rapport $\frac{64}{81}$, et rendit ainsi cet intervalle conforme au résultat des expériences modernes d'Acoustique, dont on a refusé la connaissance aux Grecs. D'autres savans non moins éclairés assurent qu'en cela Ptolémée ne fit que rétablir les véritables principes du système primitif des Grecs.

Les modernes ont découvert que le son d'une corde vibrante n'est pas un son simple, mais que d'autres sons coexistent avec lui : cette coexistence de sons a donné le fondement de l'*accord parfait*, qui était déjà usité dans les orgues : or il paraît que cet instrument a été introduit en Europe dès le septième siècle.

Rameau, étudiant son art en philosophe, cherchait dans la nature quelque principe plus satisfaisant que tout ce qu'il avait vu jusqu'alors. Il fut frappé de la résonnance des sons harmoniques qu'il remarqua dans la corde vibrante, phénomène dejà connu, comme on le voit dans les écrits des Mersenne et Wallis. Rameau ne soupçonna que deux sons aigus réunis au son fondamental, la douzième et la dix-septième majeure, *sol* (3), *mi* (5) (*a*). Il paraît qu'en 1749 les commissaires de l'académie des sciences, chargés d'examiner le prin-

(*a*) *Démonstration du principe de l'Harmonie, etc.* : Paris 1750, pag. 15 et suiv.

cipe de Rameau, et au nombre desquels était d'Alembert, n'en soupçonnaient pas davantage (*a*). Mais on sait que le son fondamental d'une corde vibrante entraîne la coexistence d'une série de sons aigus représentés, quant au nombre des vibrations simultanées, par la suite indefinie des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc., tels qu'on les obtient en divisant le monocorde selon cette même suite de parties.

Rameau avait cru trouver dans le fait de la résonnance harmonieuse de la corde vibrante, le fondement de toute la musique, et le germe de toutes ses règles : on sait comment il en a dérivé son fameux système de la *Basse fondamentale*.

Tartini fit revivre en Italie une expérience déjà connue en Allemagne et en France, celle de la reproduction du son générateur par la résonnance simultanée de deux quelconques de ses produits : expérience qui présentait une sorte de démonstration inverse du premier principe de la résonnance, et de laquelle Tartini a déduit un système ingénieux.

D'autres systèmes analogues, différens ou même opposés entre eux, ont paru successivement, et l'on a cherché, par une infinité de voies, quels devaient être les élémens primitifs de la musique.

L'abbé Feytou nous paraît être celui qui a répandu le plus de jour sur cette matière, par une suite d'expériences judicieuses et par les raisonnemens qu'il a employés à en développer et à en appliquer les conséquences. Il a pris pour fondement de sa théorie le fait de la coexistence des sons aigus 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, etc., dans le son fondamental pris pour unité. On a contesté plus d'une fois la légitimité de cette base, non quant à la certitude du fait, mais quant à son importance et à ses applications.

M. Chladni, savant physicien, à qui l'on doit des découvertes aussi neuves qu'intéressantes dans la physique du son, et qui vient de

---

(*a*) *Rapport fait à l'Académie royale des sciences*, le 10 décembre 1749.

donner à l'Acoustique une face toute nouvelle (*a*), pense que la coexistence des sons dans une corde vibrante ne peut point être considérée comme la base de l'harmonie. Nous allons exposer en peu de mots les raisons sur lesquelles est appuyé son sentiment, et nous hasarderons là-dessus quelques observations.

L'élasticité dans les corps est une qualité indispensable pour la production, comme pour la propagation du son. Or, l'élasticité a pour cause ou la *tension* des corps flexibles et non rigides, ou la *compression*, ou le *ressort* naturel des corps doués d'une rigidité interne. Les corps sonores, affectés de l'une de ces trois sortes d'élasticité, peuvent être considérés sous plusieurs dimensions. Les corps non rigides d'une seule ou de deux dimensions, sont les *cordes* et les *membranes* tendues ; les corps naturellement élastiques sont des *verges* ou des *plaques* de matière rigide et à ressort. La différence dans les causes de l'élasticité en apporte une très-grande dans les lois des vibrations sonores : de là une multitude de phénomènes curieux dont chaque ordre est déterminé par la nature du corps sonore mis en action.

La loi des sons coexistans dans celui d'une corde vibrante non rigide est, comme nous l'avons dit, quant au nombre des vibrations, celle des nombres,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \text{etc.},$$

et, quant aux longueurs des parties vibrantes, celle des rapports,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \text{etc.}$$

Les vibrations d'une membrane tendue semblent présenter quelque analogie avec celles du cas linéaire ; mais, dans l'état actuel de l'A-

(*a*) Voyez son *Traité d'Acoustique* ; Paris, chez Courcier, 1809 ; et le *Rapport* fait à l'Institut par la classe des Sciences mathématiques et physiques, et par celle des Beaux-Arts, dans les séances des 13 février et 18 mars 1809.

coustique, on n'a pas encore assez d'expériences pour établir une théorie certaine.

Si l'on fait résonner avec un archet une verge élastique *fixée par une extrémité* seulement, et mettant à part le son le plus grave, les vîtesses des autres sons, à compter ainsi du deuxième, suivent la loi des nombres,

$$(3)^2,\ (5)^2,\ (7)^2,\ (9)^2,\ \text{etc.}$$

Si la verge est seulement *appuyée à l'une des extrémités*, l'autre restant libre, les vîtesses des sons suivent alors la loi des nombres,

$$(5)^2,\ (9)^2,\ (13)^2,\ (17)^2,\ (21)^2,\ \text{etc.}$$

Si *les deux extrémités* sont *libres*, la loi est celle des nombres,

$$(3)^2,\ (5)^2,\ (7)^2,\ (9)^2,\ \text{etc.}$$

Si *les deux extrémités* sont *appuyées*, la loi est celle des nombres,

$$(1)^2,\ (2)^2,\ (3)^2,\ (4)^2,\ (5)^2,\ \text{etc.}$$

Si *les deux extrémités* sont *fixées*, la loi est de nouveau celle des nombres,

$$(3)^2,\ (5)^2,\ (7)^2,\ (9)^2,\ \text{etc.}$$

Enfin, si l'*une des extrémités* est *fixée*, et l'*autre appuyée*, la loi est celle des nombres,

$$(5)^2,\ (9)^2,\ (13)^2,\ (17)^2,\ (21)^2,\ \text{etc.}$$

Les vibrations des *verges courbes*, celles des *fourches*, des *anneaux*, donnent aussi des lois très-différentes entre elles, selon les cas.

Si nous passons ensuite aux *plaques planes* ou *courbes*, nous trouverons une variété presque infinie de phénomènes assujettis à des lois particulières.

Il résulte de ce court exposé que le phénomène de la corde vibrante n'est qu'un cas particulier parmi les lois nombreuses que présentent les vibrations des corps sonores ; d'où M. Chladni conclut qu'on ne saurait prendre pour base de toute l'harmonie, une loi tirée d'un seul phénomène naturel, tandis qu'une multitude d'autres phénomènes analogues présentent d'autres lois très-différentes et tout aussi naturelles que la première. Il pense donc que le seul fondement que l'on puisse donner à l'harmonie, est *la plus ou moins grande simplicité des rapports numériques* (*a*).

Mais, en admettant, si l'on veut, ce principe, ne serait-il pas permis de dire que, parmi les divers ordres de phénomènes que présentent les corps sonores, celui-là peut être pris pour base de l'harmonie, qui donne les rapports numériques les plus simples ? Or, si la corde vibrante donne en effet les rapports les plus simples, et si la coexistence des sons qu'elle contient ne nous plaît qu'à cause de la grande simplicité des rapports numériques de ces sons, ne sommes-nous pas conduits, en vertu même du principe de M. Chladni, à une conséquence exactement opposée à son assertion ainsi conçue, que *le monocorde ne peut pas servir pour établir les principes de l'harmonie* (*b*) ? M. Chladni ne révoque point en doute que les rapports qui doivent être pris pour bases de l'harmonie, ne soient ceux des nombres,

1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.,

loi des sons coexistans dans le monocorde ; ainsi il serait rigoureusement vrai que c'est dans le monocorde qu'il faudrait chercher les principes de la seule harmonie avouée par l'oreille.

Et en effet, les corps flexibles paraissent être les seuls dont les sons s'accommodent également à tous les organes, et plaisent le plus généralement. L'élasticité produite entièrement par la tension serait ainsi la source par excellence des sons vraiment musicaux. On sait que les corps doués de la plus grande mesure de rigidité naturelle,

---

(*a*) *Traité d'Acoustique*, pag. 11 et 251.
(*b*) *Ibid.* pag, 11.

tels que les cloches, le verre, etc., rendent des sons ou peu harmonieux, ou susceptibles d'agacer trop fortement les nerfs : tout le monde ne supporte pas les sons de l'harmonica, et ceux des cloches se prêtent très-peu à la mélodie, et moins encore aux accords. Les cordes de métal que l'on adapte à quelques instrumens, ayant une certaine mesure d'élasticité naturelle, participent de la nature des corps sonores à ressort; aussi ces cordes rendent-elles toujours un son plus dur que les cordes de soie ou à boyau : cependant on plie leurs sons au système musical reçu, en leur donnant par la tension le complément d'elasticité nécessaire à la production du son, ce qui les fait rentrer en grande partie dans la classe des corps flexibles, quoique jamais elles ne puissent obtenir dans leur timbre ce moelleux, ce velouté si agréable qui caractérise les sons d'une bonne corde flexible.

Quant au son des tuyaux d'orgue et des instrumens à vent, en général, il est produit par des vibrations longitudinales de l'air contenu dans leur canal, et ces vibrations suivent la loi des vibrations *longitudinales* des verges, ce qui revient à celle des cordes flexibles, et ce qui donne au son de ces instrumens le caractère fondamental des sons musicaux proprement dits. Et remarquons que, s'il se mêle à ce son quelque résultat des vibrations qu'exécutent les parois de l'instrument, on voit aussi que le son en est d'autant plus doux que la substance de l'instrument est moins rigide par elle-même. On n'a qu'à comparer les sons de la flûte, du haut-bois, du cor, de la trompette, ceux des tuyaux d'orgue construits en bois, en plomb, en étain, en étoffe (*a*) ou en fer-blanc, et l'on verra que par-tout on retrouve le même principe sur la cause vraisemblable du caractère musical que nous attribuons aux sons reconnus comme tels.

Il semble donc qu'on peut poser en fait que tout instrument, composé de corps sonores à ressort naturel suffisant pour produire le son, sera peu propre à rendre la musique telle qu'elle est constituée,

(*a*) Mélange d'étain et de plomb.

et si quelques instrumens de cette nature, chefs-d'œuvre de l'industrie, paraissent faire exception, nous croyons pouvoir assurer qu'ils ne plairont pas universellement (*a*). N'est-il pas naturel d'attribuer cette grande différence d'effets entre les corps flexibles et ceux à ressort, à la nature intime et propre de leurs sons respectifs, c'est-à-dire, à l'effet total et simultané des sons aigus coexistans dans les uns et dans les autres ? L'expérience prouve que la résonnance simultanée des sons 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., constitue la plénitude du son qui paraît le plus pur et donne le plus beau des accords ; l'expérience prouve de même que la résonnance simultanée des sons établis sur toute autre série, ne produit plus le même effet et ne peut contenter l'oreille.

M. Chladni convient qu'il n'y a pas moyen, dans aucune espèce de corps sonores, d'empêcher la coexistence des sons aigus, tant que subsiste le son fondamental : on peut seulement isoler les premiers en touchant les nœuds des cordes ou des verges vibrantes, ou les lignes nodales des plaques et des cloches, et il avoue que cette coëxistence est peu harmonieuse dans tous les cas où la série des sons n'est pas celle de la suite naturelle des nombres, laquelle est la seule qui satisfasse pleinement l'oreille. Ainsi cette coexistence qui, loin d'être un inconvénient dans le son des corps flexibles, dont elle constitue au contraire la beauté, cette coexistence est un inconvénient inhérent au son de tous les autres corps sonores, et semble ainsi les exclure du domaine de l'art musical.

Ici, comme en beaucoup d'autres choses, l'instinct a donc dévancé la science ; par-tout le sentiment a fait choisir les corps flexibles de préférence aux autres. Les corps élastiques n'ont jamais été in-

(*a*) Les membres de la classe des Beaux-Arts de l'Institut, et ceux de la première classe à qui ils étaient réunis pour examiner le *Clavi-Cylindre* de M. Chladni, ces commissaires à qui on ne peut contester la qualité de connaisseurs en ce genre, n'ont pu s'empêcher, tout en rendant justice aux diverses sortes de mérite de cet instrument, d'y reconnaître sur-tout un caractère de *mélancolie* et de *tristesse*.

troduits

troduits dans la musique qu'avec beaucoup de réserve, et ils l'ont rarement été sans inconvénient.

Ces considérations nous semblent jeter un grand jour sur les vraies bases de l'harmonie, et nous paraissent bien propres à justifier l'emploi du monocorde pour déterminer les premiers élémens de l'art, comme à confirmer, en conséquence, la légitimité des principes que la musique moderne a adoptés, à l'exclusion de toute théorie abstraite, uniquement établie sur des rapports inanimés que l'ame ne consulte jamais en matière de sentiment.

Pourquoi le plein jeu de l'orgue paraît-il offrir une série de sons individuels, se prêtant aux mêmes emplois que si chacun d'eux était un son unique et simple, quoiqu'il soit composé en lui-même de cinq sons simultanés ? C'est que chaque groupe de sons, affecté à chaque degré de l'échelle, est une imitation du procédé de la nature dans la production de l'espèce de son le plus harmonieux. Si l'on s'avisait de former artificiellement des sons complexes, en y employant les données fournies par la résonnance des corps naturellement élastiques, tels que les sons,

$$(3)^2,\ (5)^2,\ (7)^2,\ (9)^2,\ (11)^2,\ \text{etc.}$$

ou bien,

$$(5)^2,\ (9)^2,\ (13)^2,\ (17)^2,\ (21)^2,\ \text{etc.}$$

et que l'on établit une échelle diatonique et chromatique avec des sons ainsi composés, on n'obtiendrait vraisemblablement qu'une affreuse cacophonie. Cette expérience assez curieuse, et qui mériterait d'être tentée, mettrait dans tout son jour la différence intime et très-importante qui règne entre les corps sonores flexibles, et ceux à ressort, envisagés comme producteurs des sons à employer dans la musique.

Ceci pourrait conduire à la solution de cette question, savoir, si les intonnations réglées sur la loi de la progression triple, seraient plus naturelles que les nôtres, comme le pense l'abbé Roussier. Pour résoudre cette question, on a recherché quelles étaient les intonnations des anciens, et parce qu'on a cru voir que leur diagramme dérivait de la progression triple, on en a conclu que le chant fondé sur ce principe est en effet le plus naturel à l'homme. Le vice de ce raisonnement est manifeste, et une telle question ne peut être tranchée par de simples autorités historiques, qui d'ailleurs sont sujettes à contestation. J'aimerais mieux que l'on consultât le chant des sauvages qui n'auraient eu aucune relation avec les peuples policés, et dont on pourrait attribuer les intonnations plutôt à l'instinct de la nature qu'au pouvoir de l'habitude; et encore les résultats d'une telle observation ne pourraient-ils être regardés comme péremptoires.

Supposons qu'il s'agisse d'entonner successivement les deux sons *ut*, *mi ;* ce dernier, étant considéré comme un produit de la progression triple, aura pour expression numérique 81, comme quatrième douzième à la suite de l'*ut* fondamental pris pour unité; et rapproché ensuite de six octaves, il forme avec l'*ut* l'intervalle 64, 81. Or, la résonnance de l'*ut* entraîne celle d'un *mi* (80); et l'on peut dire, sans aucune prévention systématique, que l'oreille est déjà disposée à la sensation de ce *mi*, dont l'*ut* lui a donné, en quelque sorte, le sentiment; tandis qu'il n'est nullement raisonnable de penser que le sentiment de la douzième soit assez fort pour lier la sensation du *mi* (81) à celle de l'*ut*, y ayant ici quatre générations consécutives dont il est impossible à l'oreille de se rendre compte. Dans le premier cas, il y a sensation immédiate du *mi* dans celle de l'*ut ;* et, dans le second, il n'y a qu'un rapport éloigné que l'esprit seul peut apercevoir, et dont le résultat est combattu par le sentiment actuel qui naît de la résonnance, et qui exclut celui d'un produit sans analogie avec elle.

D'où l'on peut conclure qu'un diagramme entièrement déduit de la progression triple ne présente qu'une suite de sons indépendans, ne tenant à aucun système commun, et n'ayant entre eux aucune liaison directe fondée sur la sensation; que ces sons, étant rendus librement par les cordes harmonieuses d'un instrument, manifesteraient à l'oreille, dans certaines transitions, l'incohérence, l'opposition même qui résulteraient de leur nature respective et intrinsèque, telle serait, entr'autres, la résonnance successive des cordes *ut* (64) et *mi* (81); qu'en conséquence, il est peu vraisemblable que la progression triple ait été en effet le principe fondamental, primitif et unique de toute la musique des anciens, et particulièrement de celle des Grecs, qui avaient une si grande délicatesse d'organes.

Il paraîtrait bien résulter de quelques autorités imposantes, que le système de Pythagore était uniquement fondé sur la progression triple. Mais les Pythagoriciens ont été accusés de n'avoir consulté que quelques préjugés métaphysiques sur les propriétés des nombres, et on leur a contesté d'avoir professé les vrais principes de la musique primitive. D'autres autorités leur attribuent une doctrine analogue à celle de Dydime et de Ptolémée, et croient avoir découvert dans la résonnance de la corde vibrante, ou, ce qui revient au même, dans les divisions naturelles et indéfinies du monocorde, les vrais principes de Pythagore (*a*).

Résumons maintenant les points principaux qui sembleraient résulter des observations que nous venons de faire........

1.° Les sons les plus beaux au jugement de tout le monde, les sons les plus généralement goûtés, sont ceux que produisent les corps flexibles tendus, et les instrumens à vent, c'est-à-dire, les sons formés de la coexistence des ordres de vibrations, représentés par la série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. La coexistence des sons assujettis à cette loi ne se trouvant que dans les deux classes de corps sonores dont il s'agit, ces corps seraient donc les seuls

(*a*) En rendant justice aux connaissances étendues et à la profonde érudition qui règnent dans le savant mémoire de l'Abbé Roussier, sur la musique des anciens, je ne puis m'empêcher d'y voir une longue preuve de l'influence que l'esprit de système peut exercer sur les meilleurs esprits. Rien de plus remarquable que les efforts de ce savant, dominé par le système si souvent faux *des causes les plus simples* et de *l'unité de principe*, pour ramener toutes les bases de l'art musical au rapport $\frac{1}{3}$, duquel il ne pense pas qu'il soit possible de s'écarter sans violer toutes les règles d'une saine logique. Selon lui, toutes les expériences d'Acoustique sont fausses ou superflues; il n'en reconnaît aucune, et l'unité du rapport $\frac{1}{3}$ doit être la seule règle du musicien philosophe.

propres à fournir les matériaux primitifs de l'art musical (*a*).

2.° Le fondement de tous les accords adoptés par l'oreille est dans la série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.; et cette série serait ainsi la base naturelle de l'harmonie.

3.° Les corps sonores rigides ne pourraient être employés dans la musique que par une sorte de tolérance, et dans le cas seulement où ce que leur résonnance individuelle renferme de contraire à celle des corps flexibles, serait dominé et neutralisé par l'influence majeure du système de ces derniers; et alors on pourrait dire que l'oreille préoccupée du système de résonnance auquel elle se complaît exclusivement, et qui l'affecte habituellement, se ferait illusion sur des exceptions faibles qui rentreraient dans le système dominant. Les corps rigides ne joueraient plus alors qu'un rôle analogue à celui des autres; et l'on n'y distinguerait autre chose qu'une différence de timbre, qui, par son caractère particulier, apporterait une expression nouvelle dans l'ensemble, et concourait à l'expression totale par cette variété de nuances.

4.° Si l'on construit des instrumens de musique avec des corps naturellement élastiques, on pourrait dire que l'oreille se prête volontiers à l'illusion qui lui fait prendre les sons qui en résultent, pour des sons individuels susceptibles d'être combinés tant en mélodie qu'en harmonie; mais il n'est pas moins vrai que ces instrumens portent avec eux un caractère remarquable : ils ont un genre d'expression mélancolique ou énergique qui agit avec force sur les nerfs, et devient même insupportable à beaucoup de personnes.

(*a*) Cette proposition acquiert un grand degré de vraisemblance; 1.° si l'on admet, avec M. *Villoteau*, que c'est dans les sons naturels de la voix humaine qu'il faut chercher les élémens naturels et primitifs de la musique; 2.° s'il est vrai, comme on serait porté à le croire, que les sons artificiels, les plus généralement agréables, soient ceux qui ont le plus d'analogie avec la voix humaine; 3.° si l'on fait attention que l'organe vocal est un instrument mixte qui participe à la fois de la nature des tuyaux sonores et de celle des corps flexibles rendus élastiques par la tension; aussi voyons-nous que les sons de la voix humaine ne peuvent être imités avec succès que par des instrumens de l'une ou l'autre de ces deux espèces.

5.° L'échelle des modernes,

UT,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*..........		*la*		*si*,		*ut*
8	9	10	$10\frac{2}{3}$ ou $10\frac{4}{5}$	12	13	$13\frac{1}{3}$ ou $13\frac{1}{2}$	14	15		16

a la plus grande partie de ses élémens d'accord avec ceux de la résonnance du son générateur qui les contient tous, à l'exception de deux, *fa* et *la*; et ceux-ci rentrent dans le même principe par la manière dont ils sont employés. D'ailleurs le tempérament en vertu duquel on substitue le *fa* ci-dessus au son (11), et le *la* à l'un des sons (13) ou (14), est justifié par une foule de raisons qu'il serait trop long d'exposer ici. Nous nous bornerons à dire qu'il suffit, en général, de connaître dans les arts les bases primitives données par la nature, et que, s'il n'était permis d'y rien ajouter, les arts ne seraient plus des arts.

La nature fournit directement le modèle de tous les accords consonnans usités; elle donne encore celui des dissonnances, sauf une légère différence avouée par l'oreille; et enfin elle indique le principe général des salvations, comme l'a démontré l'abbé Feytou : que pouvait-elle faire de plus pour dicter toutes les lois d'une harmonie régulière ?

Ainsi les nouvelles découvertes de l'Acoustique nous auraient ramenés à cette conséquence remarquable, que les vrais et uniques fondemens de l'art musical sont donnés immédiatement par le son d'une corde vibrante, et que tous les élémens de cet art sont compris dans la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Ainsi se justifieraient les vues pleines de sagacité que l'abbé Feytou avait portées sur cet objet, à quelques restrictions près qu'une saine raison semble exiger, attendu qu'il ne faut jamais outrer aucun principe.

Ces aperçus, que nous abandonnons à des personnes plus éclairées sur ces matières, sont tirés d'un petit ouvrage que nous terminons en ce moment, touchant le système de M. Villoteau, sur *la possibilité et l'utilité d'une théorie exacte des principes naturels de la musique.*

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Recherche systématique des formules les plus propres à calculer les Logarithmes.

Par M. Thomas Lavernède.

SECONDE PARTIE.

Application des équations obtenues dans la première partie.

38. Nous avons cherché, dans la première partie de ce mémoire, à obtenir des équations qui, ne différant entre elles que par leur dernier terme, eussent des racines commensurables. Ces racines sont, dans toutes celles auxquelles nous sommes parvenus, exprimées d'une manière générale en fonctions d'une ou de plusieurs indéterminées, et, lorsqu'on substitue à ces indéterminées des nombres rationnels, on arrive à des équations numériques qui jouissent des mêmes propriétés que les équations littérales. On trouve cependant quelquefois, par la substitution, des équations numériques qui ne satisfont pas aux conditions prescrites. Lorsque cela a lieu, les deux équations ont, l'une et l'autre, une ou plusieurs racines égales à zéro. Cette circonstance, qui dépend des nombres substitués, est, comme nous l'avons démontré (n.° 24), incompatible avec la nature de nos équations; mais on peut aisément l'éviter par la considération des différens facteurs qui entrent dans les racines. Ainsi nous pourrons toujours, à l'aide des équations générales, obtenir des équations numériques jouissant des propriétés qui ont fait l'objet de nos recherches.

Il est évident, ainsi que nous l'avons déjà fait observer, que les premiers membres de ces équations sont des polynomes qu'on peut substituer à u et t dans l'équation :

$$\text{Log.}\frac{u}{t} = 2\text{M}\left[\frac{u-t}{u+t} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^5 + \text{etc.}\right]\ldots\ldots \text{A}$$

pour avoir des formules logarithmiques de la forme B (n.° 2). Mais alors, d'après les remarques du n.° 3, il est nécessaire, pour que ces formules soient aussi convergentes qu'elles peuvent l'être, de faire ensorte que la différence entre les derniers termes soit aussi petite que possible, sans nuire à la forme de ces polynomes. Cela exige un choix dans les valeurs à donner aux indéterminées qui entrent dans les expressions des racines de nos équations. On trouvera ces valeurs indiquées dans les numéros suivans qui renferment les formules logarithmiques les plus avantageuses qu'il soit possible de déduire des résultats auxquels nous sommes parvenus dans la première partie.

39. 1.re *formule.* Si on prend l'équation du second degré :

$$x^2 - 1 = o \qquad \text{ou} \qquad (x+1)(x-1) = o$$

dont la résultante est $x^2 = o$, en faisant $u = x^2$, et $t = x^2 - 1$, il viendra :

$$u - t = 1\,, \qquad u + t = 2x^2 - 1\,, \qquad \frac{u-t}{u+t} = \frac{1}{2x^2-1}$$

et l'équation A donnera la formule connue :

$$2\,\text{Log.}\,x - \text{Log.}\,(x+1) - \text{Log.}\,(x-1)$$

$$= 2\text{M}\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \text{etc.}\right]$$

40. 2.me *formule.* Si on suppose $a = 2$ et $b = 1$ dans les équations P (n.° 29), on aura :

$$x^3-3x-2=o$$

et

$$x^3-3x+2=o$$

ou

$$(x-1)^2(x+2)=o$$

et

$$(x+1)^2(x-2)=o$$

faisant ensuite :

$$u=x^3-3x+2$$

et

$$t=x^3-3x-2$$

il viendra :

$$u-t=4\,,\qquad u+t=2x^3-6x\,,\qquad \frac{u-t}{u+t}=\frac{2}{x^3-3x}=\mathrm{T}$$

et l'équation A donnera :

$$2\mathrm{Log.}(x+1)+\mathrm{Log.}(x-2)-2\mathrm{Log.}(x-1)-\mathrm{Log.}(x+2)$$
$$=2\,\mathrm{M}\left[\mathrm{T}+\frac{1}{3}\mathrm{T}^3+\frac{1}{5}\mathrm{T}^5+\text{etc.}\right]$$

Cette formule se trouve dans la préface des tables trigonométriques décimales de M. de Borda.

Les équations

$$x^3+6x^2+9x+4=o$$

et

$$x^3+6x^2+9x=o$$

ou

$$(x+1)^2(x+4)=o$$

et

$$x(x+3)^2=o$$

qu'on obtient en faisant $a=b=\lambda=1$ dans les équations D (n.° 9), ou dans les équations E (n.° 10), ne sont autre chose que des transformées de celles qui donnent la formule précédente (*voy.* n.° 25),

et

et elles en fournissent une équivalente. M. Muller, dans son *Traité des fluentes*, n.° 225 (1), propose, pour calculer les logarithmes, la fraction $\frac{d^3+6d^2+9d+4}{d^3+6d^2+9d}$. Dans l'exemple qu'il donne, il fait $d=14$, et a la fraction $\frac{4050}{4046}=\frac{15^2.18}{14.17^2}=\frac{2025}{2023}$. Il calcule le logarithme de cette fraction, et conclut ensuite :

$$\text{Log. } 17=\frac{1}{2}\left(\text{Log. } 18+2\text{Log. } 15-\text{Log. } 14-\text{Log. } \frac{2025}{2023}\right)$$

41. 3.^{me} *formule*. Si on suppose $a=2$ et $b=1$ dans les équations I (n.° 14), on aura les suivantes :

$$x^4-25x^2+144=o$$

et

$$x^4-25x^2 \ldots\ldots=o$$

ou

$$(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)=o$$

et

$$x^2(x-5)(x+5)=o$$

faisant ensuite :

$$u=x^4-25x^2+144$$

et

$$t=x^4-25x^2$$

il viendra :

$$u-t=144$$

$$u+t=2x^4-50x^2+144$$

$$\frac{u-t}{u+t}=\frac{72}{x^4-25x^2+72}=\text{T}$$

(1) *Traité analitique des Sections coniques, Fluxions et Fluentes, etc.*, par M. Muller, professeur de mathémathiques à l'école royale de Volwich; traduit de l'anglais, par l'auteur. Paris 1760.

et l'équation A donnera :

$$\text{Log.}(x-4)+\text{Log.}(x+4)+\text{Log.}(x-3)+\text{Log.}(x+3)-$$

$$2\text{Log.}x-\text{Log.}(x-5)-\text{Log.}(x+5)=2\text{M}\left[\text{T}+\frac{1}{3}\text{T}^3+\frac{1}{5}\text{T}^5+\text{etc.}\right]$$

Cette formule a été trouvée par M. Haros, employé aux bureaux du cadastre (1).

42. 4.me *formule*. Si on suppose $a=2$ et $b=1$ dans les équations K (n.° 14), on aura les suivantes :

$$x^4+10x^3+25x^2-36=o$$

et

$$x^4+10x^3+25x^2=o$$

ou

$$(x+6)(x+3)(x+2)(x-1)=o$$

et

$$x^2(x+5)^2=o$$

faisant ensuite :

$$u=x^4+10x^3+25x^2$$

et

$$t=x^4+10x^3+25x^2-36$$

il viendra :

$$u-t=36$$

$$u+t=2x^4+20x^3+50x^2-36$$

$$\frac{u-t}{u+t}=\frac{18}{x^4+10x^3+25x^2-18}=\text{T}$$

et l'équation A donnera :

$$\text{Log.}(x+6)+\text{Log.}(x+3)+\text{Log.}(x+2)+\text{Log.}(x-1)-$$

$$2\,\text{Log.}(x+5)-2\text{Log.}\,x=2\text{M}\left[\text{T}+\frac{1}{3}\text{T}^3+\frac{1}{5}\text{T}^5+\text{etc.}\right]$$

(1) Voyez le *Complément d'Algèbre* de M. Lacroix.

Cette formule est plus convergente que la précédente, et ne fait dépendre le logarithme cherché que de cinq autres logarithmes.

43. Il est facile de déduire les équations numériques qui donnent les deux dernières formules des équations S (n.° 34). On peut avoir les premières, en faisant $\beta=2$, $\gamma=2$, $\delta=4$, et $\epsilon=-1$; et les secondes, en faisant $\beta=2$, $\gamma=2$, $\delta=-1$, $\epsilon=-1$, et divisant ensuite toutes les racines par 2.

En supposant, dans les équations S, $\beta=-9$, $\gamma=-1$, $\delta=-4$, $\epsilon=2$, et divisant ensuite toutes les racines par 6, on trouve les équations :

$$x^4+2x^3-31x^2-32x+240=o$$

et

$$x^4+2x^3-31x^2-32x+60=o$$

ou

$$(x-3)(x+5)(x-4)(x+4)=o$$

et

$$(x-1)(x+6)(x-5)(x+2)=o$$

qui donnent une formule logarithmique moins avantageuse que les deux précédentes, mais qui peut encore être utile.

44. 5.^{me} *formule*. Si on suppose $\alpha=3$ et $\beta=2$ dans les équations T (n.° 36), on aura, après avoir divisé toutes les racines par 2, les équations numériques suivantes :

$$x^5-125x^3+3004x-5040=o$$

et

$$x^5-125x^3+3004x+5040=o$$

ou

$$(x-4)(x-10)(x+7)(x+9)(x-2)=o$$

et

$$(x+4)(x+10)(x-7)(x-9)(x+2)=o$$

faisant ensuite :

$$u = x^5 - 125x^3 + 3004x + 5040$$

et

$$t = x^5 - 125x^3 + 3004x - 5040$$

il viendra :

$$u - t = 10080$$

$$u + t = 2x^5 - 250x^3 + 6008x$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x} = \mathrm{T}$$

et l'équation A donnera :

$$\text{Log.}(x+10) + \text{Log.}(x+4) + \text{Log.}(x+2) + \text{Log.}(x-7) + \text{Log.}(x-9)$$

$$-\text{Log.}(x-10) - \text{Log.}(x-4) - \text{Log.}(x-2) - \text{Log.}(x+7) - \text{Log.}(x+9)$$

$$= 2\mathrm{M}\left[\mathrm{T} + \frac{1}{3}\mathrm{T}^3 + \frac{1}{5}\mathrm{T}^5 + \text{etc.}\right]$$

45. 6.^{me} *formule*. Si, dans les mêmes équations T (n.° 36), on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, on aura les suivantes :

$$x^5 - 110x^3 + 2629x - 2520 = o$$

et

$$x^5 - 110x^3 + 2629x + 2520 = o$$

ou

$$(x-5)(x-9)(x+7)(x+8)(x-1) = o$$

et

$$(x+5)(x+9)(x-7)(x-8)(x+1) = o$$

faisant ensuite :

$$u = x^5 - 110x^3 + 2629x + 2520$$

et

$$t = x^5 - 110x^3 + 2629x - 2520$$

il viendra :

$$u-t=5040$$

$$u+t=2x^5-220x^3+5258x$$

$$\frac{u-t}{u+t}=\frac{2520}{x^5-110x^3+2629x}=\mathrm{T}$$

et l'équation A donnera :

$$\mathrm{Log.}(x+9)+\mathrm{Log.}(x+5)+\mathrm{Log.}(x+1)+\mathrm{Log.}(x-7)+\mathrm{Log.}(x-8)$$
$$-\mathrm{Log.}(x-9)-\mathrm{Log.}(x-5)-\mathrm{Log.}(x-1)-\mathrm{Log.}(x+7)-\mathrm{Log.}(x+8)$$
$$=2\mathrm{M}\left[\mathrm{T}+\frac{1}{3}\mathrm{T}^3+\frac{1}{5}\mathrm{T}^5+\text{etc.}\right]$$

46. 7.me *formule.* Si on suppose $a=3$ et $\lambda=1$ dans les équations Q (n.° 29), ou $\alpha=2$ et $\beta=1$ dans les premières équations du n.° 33, on aura les suivantes :

$$x^6-98x^4+2401x^2-14400=o$$

et

$$x^6-98x^4+2401x^2\ldots\ldots=o$$

ou

$$(x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3)=o$$

et

$$x^2(x+7)^2(x-7)^2=o$$

faisant ensuite :

$$u=x^6-98x^4+2401x^2$$

et

$$t=x^6-98x^4+2401x^2-14400$$

il viendra :

$$u-t=14400$$

$$u+t=2x^6-196x^4+4802x^2-14400$$

$$\frac{u-t}{u+t}=\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}=\mathrm{T}$$

et l'équation A donnera :

$$2\text{Log.}x+2\text{Log.}(x+7)+2\text{Log.}(x-7)-\text{Log.}(x+8)-\text{Log.}(x-8)$$
$$-\text{Log.}(x+5)-\text{Log.}(x-5)-\text{Log.}(x+3)-\text{Log.}(x-3)$$
$$=2\,\text{M}\left[\text{T}+\frac{1}{3}\text{T}^3+\frac{1}{5}\text{T}^5+\text{etc.}\right]$$

47. Les formules comprises dans les numéros précédens peuvent toutes être employées d'une manière avantageuse, relativement au degré d'exactitude qu'on désire dans le résultat, et exigent des calculs de même genre. Dans ce qui va suivre, nous ne donnerons des applications que d'une seule, ce que nous dirons de celle-ci pouvant servir à conclure par analogie ce qu'il y aurait à dire sur chacune des autres. Nous choisirons de preference, pour ces applications, la formule du numéro précédent, qui est du sixième degré, parce qu'elle est la plus convergente.

48. Pour donner une idée complète de l'application de la formule :

$$2\text{Log.}x+2\text{Log.}(x+7)+2\text{Log.}(x-7)-\text{Log.}(x+8)-\text{Log.}(x-8)$$
$$-\text{Log.}(x+5)-\text{Log.}(x-5)-\text{Log.}(x+3)-\text{Log.}(x-3)$$
$$=2\text{M}\left[\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}+\frac{1}{3}\left(\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}\right)^3+\text{etc.}\right]..\text{U}$$

supposons qu'on veuille, indépendamment de tout ce qui a été publié jusqu'ici, et par son moyen, calculer des tables de logarithmes suivant le système de Briggs ; la difficulté qu'on rencontrera est celle dont nous avons parlé dans le n.° 3. Il faudrait, pour pouvoir calculer le logarithme de l'un des nombres $x+8$, $x+7$, $x+5$, $x+3$, x, $x-3$, $x-5$, $x-7$, $x-8$, que ceux des autres fussent donnés, et, d'après l'hypothèse, aucun logarithme n'est censé connu. On remedie en général à cet inconvénient, lorsqu'on emploie des formules du genre de la précédente, en substituant successivement à x différentes valeurs, jusqu'à ce qu'on obtienne au moins un nombre n d'équations, dans lesquelles il n'entre que les logarithmes de n nombres premiers ; et, au moyen de ces équations, on détermine ensuite la valeur de chacun de ces logarithmes. Si, par exemple, on met successivement à la place de x, dans la formule U, les nombres 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 25 et 27, on aura les équations :

$$4L2+2L3-L7-L17 \ldots\ldots = 2M\left[\frac{25}{263}+\frac{1}{3}\left(\frac{25}{263}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-L3-L7-L13+2L17 \ldots\ldots = 2M\left[\frac{8}{281}+\frac{1}{3}\left(\frac{8}{281}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-3L2+2L3-L7+2L11-L19 \ldots = 2M\left[\frac{25}{2153}+\frac{1}{3}\left(\frac{25}{2153}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-L3-L7-L17+2L19 \ldots\ldots = 2M\left[\frac{2}{359}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{359}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-3L2-L3-L7+2L13 \ldots\ldots = 2M\left[\frac{1}{337}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{337}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-L3+6L7-2L11-L17-L19 \ldots = 2M\left[\frac{200}{117449}+\frac{1}{3}\left(\frac{200}{117449}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$2L2-L3-L5-L7-L11+2L17 = 2M\left[\frac{1}{2311}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2311}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-3L2-2L3-L7-2L11+2L13+2L19 = 2M\left[\frac{25}{121993}+\frac{1}{3}\left(\frac{25}{121993}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$6L2+2L3+2L5-L7-2L11-L17 = 2M\left[\frac{1}{28799}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{28799}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

$$-4L2+4L3-L7-L11+2L17-L19 = 2M\left[\frac{1}{46817}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{46817}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

Ces dix équations ne renferment que les logarithmes des huit premiers nombres simples 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; et, comme on n'a besoin que de huit équations pour déterminer huit inconnues, il est clair (le logarithme de 5 n'entrant que dans deux équations) qu'on en déduira quarante-quatre systèmes de huit équations, qui pourront tous servir à trouver les valeurs de ces logarithmes. De tous ces systèmes, celui des huit dernières étant le plus avantageux, parce qu'il contient les séries les plus convergentes, prenons ces huit équations et faisons, pour abréger :

$$\frac{25}{2153} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{2153}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{25}{2153}\right)^5 + \text{etc.} = S_1$$
$$\frac{2}{359} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{359}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{359}\right)^5 + \text{etc.} = S_2$$
$$\frac{1}{337} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{337}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{337}\right)^5 + \text{etc.} = S_3$$
$$\frac{200}{117449} + \frac{1}{3}\left(\frac{200}{117449}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{200}{117449}\right)^5 + \text{etc.} = S_4$$
$$\frac{1}{2311} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2311}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2311}\right)^5 + \text{etc.} = S_5$$
$$\frac{25}{121993} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{121993}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{25}{121993}\right)^5 + \text{etc.} = S_6$$
$$\frac{1}{28799} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{28799}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{28799}\right)^5 + \text{etc.} = S_7$$
$$\frac{1}{46817} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{46817}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{46817}\right)^5 + \text{etc.} = S_8$$

nous aurons :

$$-3L2 + 2L3 - L7 + 2L11 - L19 \ldots\ldots\ldots = 2MS_1$$
$$- L3 - L7 - L17 + 2L19 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2MS_2$$
$$-3L2 - L3 - L7 + 2L13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2MS_3$$
$$- L3 + 6L7 - 2L11 - L17 - L19 \ldots\ldots\ldots = 2MS_4$$
$$2L2 - L3 - L5 - L7 - L11 + 2L17 = 2MS_5$$
$$-3L2 - 2L3 - L7 - 2L11 + 2L13 + 2L19 = 2MS_6$$
$$6L2 + 2L3 + 2L5 - L7 - 2L11 - L17 = 2MS_7$$
$$-4L2 + 4L3 - L7 - L11 + 2L17 - L19 = 2MS_8$$

équations qui, étant résolues suivant les règles ordinaires, donnent :

$$L2 = M(94S_1 - 40S_2 - 74S_3 + 10S_4 + 28S_5 + 74S_6 + 14S_7 - 36S_8)$$
$$L3 = M(148S_1 - 62S_2 - 116S_3 + 16S_4 + 44S_5 + 116S_6 + 22S_7 - 56S_8)$$
$$L5 = M(226S_1 - 103S_2 - 183S_3 + 22S_4 + 64S_5 + 183S_6 + 33S_7 - 88S_8)$$
$$L7 = M(266S_1 - 115S_2 - 211S_3 + 28S_4 + 78S_5 + 211S_6 + 39S_7 - 102S_8)$$
$$L11 = M(328S_1 - 142S_2 - 260S_3 + 34S_4 + 96S_5 + 260S_6 + 48S_7 - 126S_8)$$
$$L13 = M\left(348S_1 - \frac{297}{2}S_2 - \frac{547}{2}S_3 + 37S_4 + 103S_5 + \frac{549}{2}S_6 + \frac{103}{2}S_7 - 133S_8\right)$$
$$L17 = M(390S_1 - 171S_2 - 311S_3 + 40S_4 + 114S_5 + 311S_6 + 57S_7 - 150S_8)$$
$$L19 = M(402S_1 - 173S_2 - 319S_3 + 42S_4 + 118S_5 + 319S_6 + 59S_7 - 154S_8)$$

En

En calculant d'abord ces huit valeurs dans la supposition de $M=1$, et ajoutant ensuite celles des logarithmes de 2 et de 5, on aura le logarithme Néperien de 10; le quotient de l'unité divisée par ce logarithme, sera le module des tables, et, en multipliant les valeurs trouvées par ce module, on parviendra aux valeurs des logarithmes tabulaires des huit premiers nombres simples. Dès-lors les logarithmes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 22 inclusivement, pourront être déterminés; et on trouvera ensuite successivement les logarithmes de tous les nombres premiers, sans que rien puisse gêner dans l'application de la formule. Pour avoir, par exemple, le logarithme de 23, on pourra faire :

$$x+8=23 \quad \text{ou} \quad x=15$$

et on aura :

$$L23=2L15+2L8+2L22-L7-L10-L12-L18-L20$$
$$-2M\left[\frac{1}{967}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{967}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

ou

$$L23=2L2-L3-L7+2L11-2M\left[\frac{1}{967}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{967}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

On parvient encore à des équations qui donnent le logarithme de 23, sans employer des logarithmes des nombres premiers plus grands que 23, en faisant :

$$x+7=23 \quad \text{ou} \quad x+5=23 \quad \text{ou} \quad x+3=23 \quad \text{ou} \quad x-7=23$$

et même cette dernière hypothèse est la plus avantageuse. En général, on peut faire le nombre dont on demande le logarithme, égal à l'une quelconque des quantités $x+8$, $x+7$, $x+5$, $x+3$, x, $x-3$, $x-5$, $x-7$, $x-8$, pourvu qu'aucune des autres ne devienne par là un nombre premier ou un multiple d'un nombre premier dont le logarithme soit inconnu. Le tableau suivant présente toutes les valeurs moindres que 1000, qu'il est possible de substituer à x dans la formule, pour avoir des équations qui donnent le logarithme d'un nombre premier p, plus petit que 100, sans qu'il soit besoin de connaître le logarithme d'aucun nombre premier plus grand que p.

NOMBRE p.	VALEURS A DONNER A x.
23	15, 16, 18, 20, 30
29	21, 22
31	23, 24, 26, 28, 31, 57
37	29, 32, 37
41	33, 34, 41, 49, 77, 85
43	35, 36, 38, 43, 253
47	39, 40, 42, 44, 47, 55, 133
53	45, 46, 48, 50, 525
59	51, 52, 177
61	53, 54, 56, 58, 61, 69, 125
67	59, 60, 62, 67
71	63, 64
73	65, 66, 68, 70, 73, 212, 287, 292
79	71, 72, 74, 79, 87, 153, 245
83	75, 76, 78, 80, 83, 88, 91, 161, 169
89	81, 82, 84, 86, 437
97	89, 90, 92, 97, 575

49. Le moyen employé dans le numéro précédent pour avoir les logarithmes des huit premiers nombres simples, pourrait également servir pour trouver un plus grand nombre de logarithmes, c'est-à-dire qu'on pourrait établir, par un plus grand nombre d'équations, les rapports qui existent entre un plus grand nombre de logarithmes, et déduire ensuite de ces équations les valeurs particulières de chacun d'eux. Nous allons donner ici vingt-cinq équations entre les vingt-cinq logarithmes des nombres premiers plus petits que 100. Elles pourront servir à déterminer ces logarithmes au moyen de séries très-convergentes, et dont les termes n'ont que l'unité pour numérateur, con-

dition très-avantageuse pour la simplicité du calcul. Il faut, pour les obtenir, substituer successivement à x, dans la formule U, les nombres suivans : 55, 57, 63, 65, 67, 72, 73, 75, 77, 80, 83, 85, 87, 88, 97, 125, 133, 153, 177, 245, 253, 287, 437, 525 et 575.

Équations.

$$4L2-L3-L5-L7+2L11-L13-L29+2L31-L47\ldots=2M\left(\frac{1}{37\ 20991}+\text{etc.}\right)$$

$$8L2-2L3+2L5-2L7-2L13+2L19-L31\ldots=2M\left(\frac{1}{46\ 20799}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2+2L3+6L7-2L11-L17-L29-L71\ldots=2M\left(\frac{1}{84\ 70727}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2+2L3-L7+2L13-L17-L19+2L29-L31-L73\ldots=2M\left(\frac{1}{102\ 33287}+\text{etc.}\right)$$

$$-5L2-L3-L5-L7-L31+2L37-L59+2L67\ldots=2M\left(\frac{1}{122\ 90881}+\text{etc.}\right)$$

$$-4L2+2L3-L5-L7-L11+2L13-L23-L67+2L79\ldots=2M\left(\frac{1}{189\ 85121}+\text{etc.}\right)$$

$$4L2-3L3-L7+2L11-2L13-L17-L19+2L73\ldots=2M\left(\frac{1}{206\ 33887}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2-L3+2L5-L7-L13+2L17+2L41-L67-L83\ldots=2M\left(\frac{1}{242\ 90449}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2-L3+6L7+2L11-L17-L23-L37-L41\ldots=2M\left(\frac{1}{284\ 71057}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2-L3-L5-L7-2L11-L17+2L29+2L73-L83\ldots=2M\left(\frac{1}{358\ 53511}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2+2L3-L5-L7-L11-2L13+2L19-L43+2L83\ldots=2M\left(\frac{1}{447\ 64721}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2-L3-L7-2L11+2L13+2L17+2L23-L31-L41\ldots=2M\left(\frac{1}{516\ 73777}+\text{etc.}\right)$$

$$4L2-L3-L7-L19-L23+2L29-L41+2L47-L79\ldots=2M\left(\frac{1}{594\ 48607}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2+6L3-L7+2L11-L13-L17+2L19-L31-L83\ldots=2M\left(\frac{1}{636\ 86897}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2+2L3-L5-L7+2L13-L17-L23-L47-L89+2L97=2M\left(\frac{1}{1144\ 88711}+\text{etc.}\right)$$

$$-6L2-L3+4L5-L7+2L11-2L13-L19+2L59-L61\ldots=2M\left(\frac{1}{5265\ 01249}+\text{etc.}\right)$$

$$-6L2+2L3-2L5+6L7-L13-L17+2L19-L23-L47 \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{7644\ 83201}+\text{etc.}\right)$$

$$6L2+2L3-L5-L7-L13+2L17-L23-L29-L37+2L73-L79 \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{17741\ 73311}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2-L3-L7-2L13+2L17+2L23-L29-L37-L43+2L59 \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{42574\ 30087}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2+2L3-2L5+8L7-3L11+2L17-L23-L31-L79 \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{2\ 99884\ 94801}+\text{etc.}\right)$$

$$-7L2-L3-2L5-2L7+2L11+2L13+2L23-L29-L31+2L41-L43 \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{3\ 63685\ 05601}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2-L3+8L7-L29-L31+2L41-L47-L59-L71-L73 \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{7\ 75250\ 43847}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2-2L3-L7-2L11-2L13-L17+2L19+2L23-L31+2L37+2L43-L89 \dots = 2M\left(\frac{1}{96\ 67924\ 02577}+\text{etc.}\right)$$

$$-3L2-L3+2L5+6L7-2L11-2L13+2L19-L29+2L37-L41-L47-L53 \dots = 2M\left(\frac{1}{290\ 71597\ 32049}+\text{etc.}\right)$$

$$2L2-3L3+2L5-L7-2L11-L13-2L17-L19+2L23-L29-L53+2L71+2L97 = 2M\left(\frac{1}{501\ 81753\ 60199}+\text{etc.}\right)$$

La convergence des séries contenues dans ces équations est telle, que le cinquième terme de la première, qui est la moins rapide, n'influe que sur le 61.^{me} chiffre décimal, et le troisième terme de la dernière sur le 65.^{me} C'est par des moyens bien plus pénibles, qu'Abraham Sharp a calculé avec 61 chiffres décimaux, 1.° les logarithmes de tous les nombres plus petits que 100, 2.° les logarithmes de tous les nombres premiers depuis 100 jusqu'à 1100, 3.° les logarithmes des quarante-un nombres compris depuis 999980 jusqu'à 1000020 inclusivement.

50. Après avoir montré, dans ce qui précède, comment on pourrait construire des tables de logarithmes à l'aide de la formule U, il nous reste à donner un exemple des calculs qu'exigerait ce travail. Pour cela, supposons que, les logarithmes de tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1100 étant connus, on demande celui de 1297. En faisant $x-8=1297$, nous aurons $x=1305$; et la formule (en se bornant au seul premier terme de la série) donnera :

$$L1297 = 2L1305 + 2L1298 + 2L1312 - L1302 - L1308 - L1300 - L1310 - L1313$$

$$- \frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200}$$

Or, dans cette équation, les logarithmes des nombres 1305, 1298, 1312, 1302, 1308, 1300, 1310 et 1313 sont donnés par l'hypothèse, puisqu'on a $L1305 = 2L3 + L5 + L29$, $L1298 = L2 + L11 + L59$, $L1312 = 5L2 + L41$, $L1302 = L2 + L3 + L7 + L31$, ... $L1308 = 2L2 + L3 + L109$, $L1300 = 2 + L13$, $L1310 = 1 + L131$ et $L1313 = L13 + L101$. Il ne reste donc plus qu'à évaluer en décimales la fraction $\frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200}$; après quoi l'opération sera réduite à de simples additions. En procédant à cette évaluation, on trouve d'abord $1305^2 = 17\ 03025$, $1305^4 = 290\ 02941\ 50625$, $1305^6 = 4939\ 27344\ 58681\ 40625$; puis $2401 \cdot 1305^2 = 40889\ 63025$, $98 \cdot 1305^4 = 28422\ 88267\ 61250$,
et enfin,

$$\frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200} = \frac{2M \cdot 7200}{4938\ 98922\ 11303\ 35200}$$

$$= \frac{2M}{68597\ 07251\ 56991} = 0{,}00000\ 00000\ 00001\ 26621\ 87057\ 73076\ldots$$

$$\ldots 12429\ 70490\ 38062\ 46583\ 69037 = 2MT$$

On achève ensuite le calcul comme on le voit ici :

2MT	= 0,00000 00000 00001 26621 87057 73076 12429 70490 38067 46583 69037
L.1302	= 3,11461 09842 32173 14288 76871 56690 66025 17555 92700 28095 44686
L.1308	= 3,11660 77439 88248 46292 30190 00317 97664 93787 13149 94289 66296
L.1310	= 3,11727 12956 55764 26081 00542 70697 73859 47801 63117 12162 69690
L.1300	= 3,11394 33523 06836 76920 65051 57942 32843 08297 29188 38706 82718
L.1313	= 3,11826 47260 89479 34348 16933 36165 26634 40490 18543 59352 08632
Somme	= 15,58069 81022 72503 24552 76646 94890 09456 78422 54766 79190 41059
C. arith. de la somme	= 84,41930 18977 27496 75447 23353 05109 90543 21577 45233 20809 58941
2L.1305	= 6,23122 10233 48599 53341 83273 49509 98516 57727 24529 61287 40588
2L.1298	= 6,22654 93849 28700 85244 91905 01005 32301 48032 73093 71865 37029
2L.1312	= 6,23586 76700 79282 94115 62126 47181 29186 67429 26082 28845 95911
L.1297	= 3,11293 99760 84080 08149 60658 02806 50547 94766 68938 82808 32469

Résultat exact jusques au 45.me chiffre inclusivement, et qui surpasse la vraie valeur du logarithme cherché de . . . . 0,00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 89696 66717 ainsi qu'il est facile de le vérifier en observant que L1297=L999987—L3—L257, et que ces trois derniers logarithmes sont au nombre de ceux qui ont été calculés par Sharp.

51. Il est bon de remarquer que la fraction

$$\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}$$

est toujours réductible. En effet, elle peut toujours être mise sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\frac{32\cdot 9\cdot 25}{x^2(x+7)^2(x-7)^2-32\cdot 9\cdot 25}$$

et

$$\frac{32\cdot 9\cdot 25}{(x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3)+32\cdot 9\cdot 25}.$$

Or, quelle que soit celle sous laquelle on la considère, on voit aisément que, 1.° ses deux termes sont divisibles par 4 ou 16 ou 32, quand x est de la forme $2p$ ou $4p$ ou $8p$, et qu'ils sont toujours divisibles par 32, lorsque x est un nombre impair ou de la forme $2p+1$; car alors les deux nombres $x+7$ et $x-7$ deviennent pairs, et leur différence étant 14, ou, plus généralement, un nombre impairement-pair, si l'un est divisible par 2, l'autre l'est nécessairement par 4. On peut en dire autant des nombres $x+5$ et $x-5$, $x+3$ et $x-3$.

2.° Les deux termes de la fraction sont toujours divisibles par 9; car x est essentiellement de l'une des trois formes $3p$, $3p+1$ et $3p-1$. Or, la première rend divisibles par 3 les nombres x, $x+3$, et $x-3$; la seconde, les nombres $x-7$, $x+8$ et $x+5$; et la troisième, les nombres $x+7$, $x-8$ et $x-5$.

3.° Les deux termes de la fraction sont divisibles par 25, lorsque x est de l'une des trois formes $5p$, $5p+2$ et $5p-2$; car la première rend divisibles par 5 les nombres x, $x+5$ et $x-5$; la seconde, les nombres $x-7$, $x+8$ et $x+3$; et la troisième, les nombres $x+7$, $x-8$ et $x-3$.

D'après ces considérations, je crois qu'on fera bien, lorsqu'on voudra, pour une valeur donnée de x, évaluer cette fraction en décimales, de la mettre sous une des formes précédentes, parce qu'étant sous ces formes, on peut aisément, avant de procéder au calcul, debarrasser ses deux termes des facteurs qui leur sont communs.

52. Pour qu'on puisse toujours juger du degré d'exactitude qu'on doit attendre des formules comprises dans les n.os 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, nous placerons ici le tableau suivant qui met sous les yeux le nombre des chiffres décimaux exacts, donnés par chacune d'elles, lorsque x égale 100 ou 1000, ou 10000, ou 100000, ou 1000000, soit qu'on néglige entièrement la série du second membre, soit qu'on se serve de son premier terme.

DÉSIGNATION DES FORMULES.	Nombre des chiffres décimaux exacts, donnés par chaque formule.									
	En négligeant la série, et x étant,					En prenant le 1.er terme de la série, et x étant,				
	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
Formule du 2.d degré, n.o 39.	4	6	8	10	12	13	19	25	31	37
Formule de M. de *Borda*, n.o 40.	5	8	11	14	17	17	26	35	44	53
Formule de M. *Haros*, n.o 41.	6	10	14	18	22	18	30	42	54	66
Formule du 4.e degré, n.o 42.	6	10	14	18	22	20	32	44	56	68
Formule du 5.e degré, n.o 44.	6	11	16	21	26	19	34	49	64	79
Formule du 5.e degré, n.o 45.	6	11	16	21	26	20	35	50	65	80
Formule du 6.e degré, n.o 46.	8	14	20	26	32	24	42	60	78	96

53. Si

53. Si on calculait des tables de logarithmes par une quelconque de ces formules, soit en négligeant entièrement la série du second membre, soit en se servant de son premier terme, on pourrait aisément se faire un moyen d'obtenir cinq ou six chiffres décimaux exacts, de plus que n'en donnerait, dans l'un ou l'autre cas, la formule employée. Il suffirait pour cela de déterminer d'avance le logarithme de la partie constante du premier ou du second terme de la série multipliée par le double du module; car, en retranchant ensuite de ce logarithme celui de la partie du dénominateur, qui peut influer sur les premiers chiffres du quotient, on aurait pour reste un logarithme répondant à un nombre qui exprimerait la valeur du premier ou du second terme de la série, au moins dans ses premiers chiffres significatifs. Ainsi, par exemple, en nous servant toujours de la formule U, si on sait que

$$L\, 2M \times 7200 = 3{,}79614\ 68034 = T'$$

et

$$L\, \frac{2M \times 7200^3}{3} = 11{,}03369\ 05415 = T''$$

en retranchant de T′ la somme $2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7)$ des doubles des logarithmes des nombres x, $x+7$ et $x-7$, qui entrent dans le premier calcul de la formule, on aura pour reste un logarithme qui différera peu de celui du produit du premier terme de la série, par le double du module. Il en sera de même par rapport à la valeur du second terme de la série multipliée par 2M, si on ôte de T″ trois fois la somme $2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7)$; car le logarithme restant sera celui de cette valeur, considérée seulement dans ses premiers chiffres significatifs.

Pour ne rien laisser à désirer à cet égard, soit repris l'exemple du n.° 50; on aura :

$$2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7) = 2L1305 + 2L1312 + 2L1298$$

et, en tirant cette somme du calcul déjà fait, il viendra :

$$18,69363\ 80784$$

logarithme dont le triple est :

$$56,08091\ 42351$$

Retranchant maintenant ce triple de T″, on trouvera pour reste :

$$-46+0,95277\ 63064$$

La caractéristique négative -46, qui se trouve dans ce résultat, indique d'abord que le premier chiffre significatif du nombre correspondant, est du 46.me ordre décimal, et la fraction (réduite, si on veut, à sept chiffres comme dans nos tables usuelles) appartenant au logarithme de 8969666, j'en conclus que la valeur trouvée pour le logarithme de 1297, doit être diminuée de la quantité $\frac{8969666}{10^{52}}$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu dans le numéro précité.

Si x surpassait 10000, on pourrait se contenter de retrancher de T′ six fois le logarithme de x, ou de T″ dix-huit fois ce même logarithme.

54. Je terminerai ce mémoire en faisant observer que les équations obtenues dans la première partie expriment toutes des propriétés des progressions par différence. En prenant, par exemple, celles qui ont fourni la formule U, et multipliant leurs racines par d, pour plus de généralité, on aura :

$$x^6-98d^2x^4+2401d^4x^2-14400d^6=o$$

et

$$x^6-98d^2x^4+2401d^4x^2\ \dots\dots\dots=o$$

ou

$$(x+8d)(x-8d)(x+5d)(x-5d)(x+3d)(x-3d)=o$$

et

$$x^2(x+7d)^2(x-7d)^2=o$$

ce qui nous apprend que, dans la progression

$$x-8d,\ x-7d,\ x-6d,\ x-5d,\ x-4d,\ x-3d,\ x-2d,\ x-d,\ x,\ x+d, \text{ etc.}$$

le produit des quarrés des 2.^{me}, 9.^{me} et 16.^{me} termes est égal au produit des 1.^{er}, 4.^{me}, 6.^{me}, 12.^{me}, 14.^{me} et 17.^{me} termes, moins 14400 fois la sixième puissance de la différence d. Mais x étant variable, il est évident que la propriété que nous venons d'énoncer aura lieu, quelle que soit sa valeur ; elle aura donc lieu lorsque x deviendra $x+nd$, ou, ce qui revient au même, quelque part qu'on prenne l'origine de la progression, qui peut d'ailleurs être prolongée indéfiniment à droite et à gauche. Cette propriété subsistera encore, si x devient $x+p$, p n'étant pas un multiple de d ; donc, en général, dans la progression,

$$x+nd+p,\ x+(n+1)d+p,\ x+(n+2)d+p,\ x+(n+3)d+p, \text{ etc.}$$

le produit des quarrés des 2.^{me}, 9.^{me} et 16.^{me} termes est égal au produit des 1.^{er}, 4.^{me}, 6.^{me}, 12.^{me}, 14.^{me} et 17.^{me} termes, moins 14400 fois la sixième puissance de la raison ou différence d.

Si on passe maintenant de cette dernière progression aux équations correspondant à la propriété que nous venons d'y observer, on verra que ces équations ne sont autre chose que des transformées de celles dont nous sommes partis ; transformées qu'on obtient en augmentant d'abord les racines d'un multiple de d, et ensuite de la quantité p. On doit seulement remarquer qu'après ces transformations, les racines ne sont plus divisibles par d, comme elles l'étaient auparavant, et que d est alors un facteur commun à toutes les différences des racines. Ce que nous venons de dire nous met en droit de conclure, 1.^{o} que les transformées auxquelles on parvient en augmentant ou diminuant les racines de deux équations telles que celles dont nous nous sommes occupés, conservent entre elles la même différence qui se trouvait entre ces équations, et ne peuvent conséquemment pas fournir des formules logarithmiques plus avantageuses ; 2.^{o} que, lorsqu'on a deux équations, telles que les différences entre les racines ont un facteur commun d, on peut, en augmentant ou diminuant ces racines d'une quantité égale au reste de la division de l'une d'elles par d, faire que toutes ces racines deviennent des multiples de d, et puissent, par conséquent, être divisées par cette quantité, ce qui conduit à des équations plus simples et plus utiles. Ainsi, par exemple, si l'on avait les deux équations,

$$x^4-50x^2+625=o$$

et

$$x^4-50x^2+\ \ 49=o$$

ou

$$(x+5)^2(x-5)^2=o$$

et

$$(x+1)(x-1)(x+7)(x-7)=o$$

dont les racines sont des nombres impairs, et diffèrent conséquemment entre elles d'un multiple de 2, en augmentant ces racines d'une unité, et les divisant ensuite par 2, on aurait :

$$x^4+2x^3-11x^2-12x+36=o$$

et

$$x^4+2x^2-11x^2-12x\ \ldots\ldots=o$$

ou

$$(x-2)^2(x+3)^2=o$$

et

$$x(x+1)(x+4)(x-3)=o$$

équations qui ne sont que des transformées de celles qui nous ont donné la formule du n.° 42 ; transformées qu'on aurait en mettant dans ces dernières $x-2$ à la place de x.

DYNAMIQUE.

De la rotation des corps autour de trois axes non rectangulaires.

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

On connaît la manière de décomposer une rotation, faite autour d'un axe donné, en trois autres rotations faites autour de trois axes perpendiculaires entre eux. Dans ce mémoire, nous nous proposons d'enseigner comment une rotation, autour d'un axe donné, peut être décomposée en trois autres rotations faites autour de trois axes formant, deux à deux, des angles quelconques.

Problème I.

1. *Étant donné les coordonnées rectangulaires des deux extrémités d'un arc de grand cercle appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine, et dont le rayon est l'unité, déterminer le cosinus de cet arc ?*

Soient A et B les deux extrémités de l'arc dont il s'agit; soient p, q, r, les coordonnées de la première, et p', q', r', celles de la seconde, le cosinus demandé sera égal à l'unité moins la moitié du quarré de la corde de AB (1). Ce dernier quarré est

$$(p-p')^2+(q-q')^2+(r-r')^2;$$

(1) En vertu de la formule connue : Cos. $x=1-2$ Sin. $\frac{1}{2}x^2$

(*Note des éditeurs.*)

et, à cause de

$$p^2+q^2+r^2=1 \qquad \text{et} \qquad p'^2+q'^2+r'^2=1,$$

il revient à

$$2(1-pp'-qq'-rr');$$

on aura donc:

$$\text{Cos.}AB=pp'+qq'+rr'.$$

2. Si l'arc AB est un quart de circonférence, on aura:

$$pp'+qq'+rr'=0;$$

en outre, l'expression de Cos. AB renferme tout ce qui peut concerner la relation entre deux systèmes de coordonnées, dont un est rectangulaire.

3. Le sinus de l'arc AB n'admet point de forme rationnelle. Toutefois, le quarré de ce sinus étant égal à cette somme de trois quarrés:

$$(pq'-qp')^2+(qr'-rq')^2+(rp'-pr')^2;$$

on voit que, si l'on considère p', q', r', comme représentant trois forces tant pour leur intensité que pour leurs application et direction, les racines

$$pq'-qp', \qquad qr'-rq', \qquad rp'-pr',$$

exprimeront les différences des momens de rotation de ces trois forces autour des trois axes rectangulaires p, q, r.

Problème II.

4. *Connaissant les trois côtés d'un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité; et étant donné les coordonnées des sommets de deux des angles de ce triangle, déterminer les coordonnées du sommet du troisième?*

Désignons par les grandes lettres A, B, C les angles du triangle; par les petites a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés, et soit C l'angle du sommet duquel il s'agit de trouver les coordonnées.

Soient p, q, r, les coordonnées du point A; soient p', q', r', les coordonnées du point B; soient x, y, z les coordonnées du point C; soit enfin désignée par T^2 la fonction connue :

$$1-\text{Cos.}^2 a-\text{Cos.}^2 b-\text{Cos.}^2 c+2\,\text{Cos.}\,a.\,\text{Cos.}\,b.\,\text{Cos.}\,c.$$

Cette fonction joue un très-grand rôle dans le calcul des triangles sphériques. Si l'on fait la somme des trois côtés $a+b+c=2s$, on aura:

$$T^2=4\,\text{Sin.}s.\,\text{Sin.}(s-a).\,\text{Sin.}(s-b).\,\text{Sin.}(s-c).$$

Elle apprend immédiatement à trouver les angles, moyennant les formules qui suivent:

$$T=\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,C.$$

$$T=\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,c.\,\text{Sin.}\,A.$$

$$T=\text{Sin.}\,c.\,\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,B.$$

Le radical T peut être donné sous une forme entièrement rationnelle, en introduisant les coordonnées des trois sommets A, B, C. On obtient ainsi pour T les trois expressions parfaitement identiques:

$$T=(qr'-rq')x+(rp'-pr')y+(pq'-qp')z\,;$$

$$T=(q'z-r'y)p+(r'x-p'z)q+(p'y-q'x)r\,;$$

$$T=(ry-qz)p'+(pz-rx)q'+(qx-py)r'.$$

En vertu de ce qui précède, on aura, pour la solution du problème, les trois équations

$$px+qy+rz=\text{Cos.}\,b.$$

$$p'x+q'y+r'z=\text{Cos.}\,a.$$

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

La détermination des trois inconnues ne suppose ensuite que les principes connus de l'algèbre. Il ne faut pas oublier que

$$p^2+q^2+r^2=1\,,$$

$$p'^2+q'^2+r'^2=1\,,$$

$$pp'+qq'+rr'=\text{Cos.}\,c.$$

De ces trois équations, on déduira celles qui suivent:

$$(pq'-qp')^2+(pr'-rp')^2=p^2-2pp'\text{Cos.}c+p'^2\,;$$

$$(qr'-rq')^2+(qp'-pq')^2=q^2-2qq'\text{Cos.}c+q'^2\,;$$

$$(rp'-pr')^2+(rq'-qr')^2=r^2-2rr'\text{Cos.}c+r'^2\,;$$

et ces réductions sont nécessaires pour donner aux trois inconnues toute la simplicité que la nature du problème permet.

Si, ensuite, pour abréger, l'on fait:

$$\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\text{Cos.}c=\text{M}\,,$$

$$\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\text{Cos.}a=\text{N}\,;$$

on trouvera, après les réductions:

$$x\text{Sin.}^2c=p\text{N}+p'\text{M}+(qr'-rq')\,\text{T}\,;$$

$$y\text{Sin.}^2c=q\text{N}+q'\text{M}+(rp'-pr')\,\text{T}\,;$$

$$z\text{Sin.}^2c=r\text{N}+r'\text{M}+(pq'-qp')\,\text{T}\,;$$

et le problème sera résolu; il admet deux solutions, à cause de l'ambiguité du radical T.

5. *Corollaire I.* Les deux solutions se confondent en une seule, lorsque le point C se trouve sur l'arc AB, ou sur son prolongement. Le radical T doit donc disparaître alors; ainsi, si l'on demande l'équation générale de condition, pour qu'un troisième point C de la surface sphérique, dont les coordonnées sont x, y, z, se trouve sur l'arc de grand cercle dont la position est déterminée par les deux points A et B, dont les coordonnées respectives sont p, q,

r, p', q', r'; cette équation de condition sera : $T=0$, ou

$$(qr'-rq')x+(rp'-pr')y+(pq'-qp')z=0.$$

6. *Corollaire II.* On peut, d'après cela, se proposer de déterminer un point C sur l'arc AB, ou un point C$'$ sur son prolongement opposé à B, distant du point A d'une quantité b, mesurée sur le grand cercle dont AB fait partie. S'il s'agit du point C, on aura $b=a+c$, d'où $a=b-c$; ainsi :

$$M=\text{Sin}.b.\,\text{Sin}.c\,; \qquad N=-\text{Sin}.c.\,\text{Sin}.(b-c)\,;$$

d'où il résulte :

$$x\text{Sin}.c=p'\,\text{Sin}.b-p\,\text{Sin}.(b-c).$$

$$y\text{Sin}.c=q'\,\text{Sin}.b-q\,\text{Sin}.(b-c).$$

$$z\text{Sin}.c=r'\,\text{Sin}.b-r\,\text{Sin}.(b-c).$$

Si, au contraire, il est question du point C$'$, on aura $b=a-c$; d'où $a=b+c$; ainsi :

$$M=-\text{Sin}.b\,\text{Sin}.c\,; \qquad N=\text{Sin}.c.\,\text{Sin}.(b+c)\,;$$

d'où il résulte :

$$x\text{Sin}.c=p\,\text{Sin}.(b+c)-p'\,\text{Sin}.b.$$

$$y\text{Sin}.c=q\,\text{Sin}.(b+c)-q'\,\text{Sin}.b.$$

$$z\text{Sin}.c=r\,\text{Sin}.(b+c)-r'\,\text{Sin}.b.$$

7. *Corollaire III.* Et si, dans cette même hypothèse, l'arc AC ou AC$'$ devait être égal à un quart de circonférence, on aurait, pour déterminer la position des deux points C et C$'$, éloignés de A d'un arc $b=\frac{1}{2}\varpi$, les équations qui suivent :

$$\text{Pour C}\left\{\begin{array}{l} x\text{Sin}.c=p'-p\,\text{Cos}.c. \\ y\text{Sin}.c=q'-q\,\text{Cos}.c. \\ z\text{Sin}.c=r'-r\,\text{Cos}.c. \end{array}\right.$$

$$\text{Pour } C' \begin{cases} x\,\text{Sin.}c = p\,\text{Cos.}c - p'. \\ y\,\text{Sin.}c = q\,\text{Cos.}c - q'. \\ z\,\text{Sin.}c = r\,\text{Cos.}c - r'. \end{cases}$$

8. *Corollaire IV*. L'arc AB$=c$ étant toujours supposé donné de grandeur et de position ; si, en supposant que le troisième point C du triangle est le pôle du côté opposé AB, on demande les coordonnées x, y, z, de ce pôle ; on aura, dans ce cas, $b=a=\frac{1}{2}\varpi$; ainsi $M=N=0$ et $T=\text{Sin.}c$; d'où il résulte :

$$x\,\text{Sin.}c = qr' - rq' \,;$$

$$y\,\text{Sin.}c = rp' - pr' \,;$$

$$z\,\text{Sin.}c = pq' - qp'.$$

9. *Corollaire V*. Et si, dans ce dernier cas, l'arc AB$=c$ était lui-même un quart de circonférence, on aurait, pour les coordonnées du pôle de cet arc, les valeurs qui suivent :

$$x = qr' - rq' \,;$$

$$y = rp' - pr' \,;$$

$$z = pq' - qp'.$$

Problème III.

10. *Un arc de grand cercle, appartenant à une sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées rectangulaires, et dont le rayon est l'unité, fait autour de l'une de ses extrémités, et sans quitter la sphère, un mouvement angulaire assez petit pour que le cosinus de l'angle sphérique décrit puisse sensiblement se confondre avec l'unité, et son sinus avec cet angle lui-même. On connaît les coordonnées des deux extrémités de l'arc, dans sa situation primitive, ainsi que la grandeur du mouvement angulaire qui a eu lieu, et*

l'on demande, pour la seconde situation du même arc, les coordonnées de celle de ses extrémités qui, dans le mouvement, a changé de situation ?

Soit c la longueur de l'arc dont il s'agit; soit A l'extrémité de cet arc autour de laquelle le mouvement a eu lieu, et soit désigné par la même lettre l'angle sphérique décrit; soit de plus B l'autre extrémité du même arc dans sa situation primitive, et C le point où elle parvient par suite du changement qui arrive dans sa position; soit enfin a l'arc de grand cercle qui joint les points B et C.

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, pour rendre applicables au cas actuel les formules générales déjà trouvées, il faudra d'abord y faire $b=c$, ce qui donnera:

$$\mathrm{M}=\mathrm{Cos}.\, a-\mathrm{Cos}.^2\, c.$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{Cos}.\, c\,(1-\mathrm{Cos}.\, a).$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{Sin}.\, b.\ \mathrm{Sin}.\, c.\ \mathrm{Sin}.\, \mathrm{A}=\mathrm{Sin}.^2\, c.\ \mathrm{Sin}.\, \mathrm{A}.$$

Il faudra ensuite, à la place du côté a, introduire l'angle opposé A; c'est à quoi l'on parviendra au moyen de la formule: $1-\mathrm{Cos}.\, a=\mathrm{Sin}.^2\, c\,(1-\mathrm{Cos}.\ \mathrm{A})$ (1); mais, comme on s'est permis de supposer $\mathrm{Sin}.\,\mathrm{A}=\mathrm{A}$ et $\mathrm{Cos}.\,\mathrm{A}=1$, il en résultera $1-\mathrm{Cos}.\, a=0$, d'où on conclura:

$$\mathrm{M}=\mathrm{Sin}.^2\, c\,;\quad \mathrm{N}=0\,;\quad \mathrm{T}=\mathrm{A}.\ \mathrm{Sin}.^2\, c\,;$$

ce qui donnera finalement:

$$x=p'+(qr'-rq')\,\mathrm{A}\,;$$

$$y=q'+(rp'-pr')\,\mathrm{A}\,;$$

$$z=r'+(pq'-qp')\,\mathrm{A}.$$

(1) Cette formule n'est autre chose que ce que devient l'équation fondamentale: $\mathrm{Sin}.\, b.\ \mathrm{Sin}.\, c.\ \mathrm{Cos}.\ \mathrm{A}=\mathrm{Cos}.\ a-\mathrm{Cos}.\ b.\ \mathrm{Cos}.\ c$, dans le cas particulier où $b=c$.

(*Note des éditeurs.*)

Problème IV.

11. *On a fait tourner successivement un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité, autour des sommets de ses trois angles ; le mouvement angulaire autour de chacun est supposé assez petit pour que le sinus de l'angle décrit soit censé se confondre avec cet angle même, et son cosinus avec l'unité. On connaît la grandeur de chacun des mouvemens angulaires ; on connaît de plus les coordonnées primitives des sommets des trois angles du triangle sphérique ; on connaît enfin les coordonnées primitives d'un certain point de la surface de la sphère liée invariablement avec ce triangle ; et on propose de déterminer quelles seront les coordonnées de ce même point, lorsque les trois mouvemens auront été effectués ?*

Désignons par A, B, C, tant les sommets des trois angles du triangle, que les mouvemens angulaires qui doivent avoir lieu autour de chacun d'eux ; supposons que la première rotation ait lieu autour de A, la seconde autour de B et la troisième autour de C ; soit T le point considéré sur la sphère, et supposons que la première rotation le transporte en U, la seconde en V, et la troisième en W ; c'est de ce dernier point qu'il s'agit d'avoir les coordonnées, en fonction de celles de A, B, C, T, et des angles A, B, C.

Pour y parvenir, soient :

m, n, o, ... les coordonnées de A ;

p, q, r, ... les coordonnées de B ;

s, t, u, ... les coordonnées de C ;

α, β, γ, ... les coordonnées de T ;

x, y, z, ... les coordonnées de U ;

x', y', z', ... les coordonnées de V ;

x'', y'', z'', ... les coordonnées de W ;

la

la simple application des formules du problème précédent nous fera voir que,

Pour la première rotation autour de A,

$$x=\alpha+(n\gamma-o\beta)\,\mathrm{A};$$
$$y=\beta+(o\alpha-m\gamma)\,\mathrm{A};$$
$$z=\gamma+(m\beta-n\alpha)\,\mathrm{A};$$

Pour la rotation autour de B,

$$x'=x+(qz-ry)\,\mathrm{B};$$
$$y'=y+(rx-pz)\,\mathrm{B};$$
$$z'=z+(py-qx)\,\mathrm{B};$$

Pour la rotation autour de C,

$$x''=x'+(tz'-uy')\,\mathrm{C};$$
$$y''=y'+(ux'-sz')\,\mathrm{C};$$
$$z''=z'+(sy'-tx')\,\mathrm{C}\ (1):$$

ce qui donne, moyennant deux simples substitutions successives, et en supprimant les quarrés de A, B, C, les formules finales qui suivent :

$$x''=\alpha+(n\gamma-o\beta)\,\mathrm{A}+(q\gamma-r\beta)\,\mathrm{B}+(t\gamma-u\beta)\,\mathrm{C};$$
$$y''=\beta+(o\alpha-m\gamma)\,\mathrm{A}+(r\alpha-p\gamma)\,\mathrm{B}+(u\alpha-s\gamma)\,\mathrm{C};$$
$$z''=\gamma+(m\beta-n\alpha)\,\mathrm{A}+(p\beta-q\alpha)\,\mathrm{B}+(s\beta-t\alpha)\,\mathrm{C};$$

et le problème sera résolu.

---

(1) A la rigueur, il n'y a que la première rotation qui s'exécute réellement de la manière qu'on le suppose ici : attendu que le point B éprouve un déplacement, et le point C deux, avant que la rotation ait lieu autour de l'un et de l'autre ; mais la petitesse supposée des mouvemens angulaires permet de ne point faire entrer ces déplacemens en considération ; et, en négligeant d'y avoir égard, les calculs se simplifient considérablement, sans que les conclusions auxquelles l'auteur se propose de parvenir soient affectées de la moindre erreur, ainsi qu'il serait aisé de s'en convaincre, en comparant son procédé à un autre plus rigoureux.

(*Note des éditeurs.*)

12. Pour ramener cette solution générale au cas ordinaire, où le triangle ABC étant tri-rectangle, les sommets de ses angles sont sur les axes des coordonnées, il faudra considérer que, dans ce dernier cas, on a :

$$m=1\,;\quad n=0\,;\quad o=0\,;$$
$$p=0\,;\quad q=1\,;\quad r=0\,;$$
$$s=0\,;\quad t=0\,;\quad u=1\,:$$

ce qui donne :

$$x''=\alpha+\gamma B-\beta C\,;$$
$$y''=\beta+\alpha C-\gamma A\,;$$
$$z''=\gamma+\beta A-\alpha B\,:$$

ce sont les formules connues du mouvement de rotation composé (1).

Problème V.

13. *Un triangle sphérique appartenant à une sphère qui a son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires, et son rayon égal à l'unité, a éprouvé successivement trois rotations autour des sommets de ses angles. Les mouvemens angulaires sont supposés assez petits, pour que les sinus des angles décrits puissent sensiblement être pris pour ces angles eux-mêmes, et leurs cosinus pour l'unité. On connaît la grandeur des mouvemens angulaires qui ont eu lieu, et les coordonnées primitives des sommets des trois angles du triangle, et on demande de déterminer ce que deviennent ces mêmes coordonnées, par l'effet des trois rotations ?*

Désignons par A, B, C, tant les sommets des trois angles du triangle, dans sa situation primitive, que les mouvemens angulaires

(1) Voyez la *Méchanique analitique*, numéros 5 et suivans.
(*Note des éditeurs.*)

qui ont lieu autour de chacun d'eux ; supposons que la première rotation ait lieu autour de A, la seconde autour de B, et la troisième autour de C; soient enfin A′, B′, C′, les positions que prennent les points A, B, C, par l'effet des trois rotations, il s'agit de déterminer les coordonnées des trois points A′, B′, C′, en fonction de celles des trois points A, B, C, et des quantités angulaires A, B, C.

Or, le problème précédent renferme entièrement la solution de celui-ci. Il suffit en effet de supposer, dans celui-là, que le point T se trouve successivement en A, B, C, et le point W, en A′, B′, C′.

Ainsi, pour trouver les coordonnées x, y, z, du point A′, il faudra remplacer, dans les formules précédentes, les lettres α, β, γ, par m, n, o ; ce qui donnera :

$$x = m + (oq - nr)\mathrm{B} + (ot - nu)\,\mathrm{C} ;$$
$$y = n + (mr - op)\mathrm{B} + (mu - os)\,\mathrm{C} ;$$
$$z = o + (np - mq)\mathrm{B} + (ns - mt)\,\mathrm{C}.$$

Pour trouver les coordonnées x, y, z, du point B′, il faudra remplacer, dans les mêmes formules, les lettres α, β, γ, par p, q, r ; ce qui donnera :

$$x = p + (nr - oq)\mathrm{A} + (tr - uq)\,\mathrm{C} ;$$
$$y = q + (op - mr)\mathrm{A} + (up - sr)\,\mathrm{C} ;$$
$$z = r + (mq - np)\mathrm{A} + (sq - tp)\,\mathrm{C}.$$

Pour trouver, enfin, les coordonnées x, y, z, du point C′, il faudra remplacer, dans ces mêmes formules, les lettres α, β, γ, par s, t, u ; ce qui donnera :

$$x = s + (nu - ot)\,\mathrm{A} + (qu - rt)\,\mathrm{B} ;$$
$$y = t + (os - mu)\mathrm{A} + (ns - pu)\,\mathrm{B} ;$$
$$z = u + (mt - ns)\,\mathrm{A} + (pt - qs)\,\mathrm{B} ;$$

et le problème sera résolu.

14. En vertu de ces trois rotations, le point A aura décrit l'arc AA′; le point B, l'arc BB′; et le point C, l'arc CC′. Par les suppositions du problème, ces trois arcs pourront être confondus avec leurs sinus; et on trouve les quarrés de ces derniers par la simple application de la formule donnée (3). En employant les réductions déjà enseignées, on aura finalement :

$$(AA')^2 = B^2 \text{Sin.}^2 c + 2BC(\text{Cos.}a - \text{Cos.}b.\text{Cos.}c) + C^2 \text{Sin.}^2 b \;;$$

$$(BB')^2 = C^2 \text{Sin.}^2 a + 2CA(\text{Cos.}b - \text{Cos.}c.\text{Cos.}a) + A^2 \text{Sin.}^2 c \;;$$

$$(CC')^2 = A^2 \text{Sin.}^2 b + 2AB(\text{Cos.}c - \text{Cos.}a.\text{Cos.}b) + B^2 \text{Sin.}^2 a.$$

Problème VI.

15. *Les mêmes choses étant supposées que dans le problème précédent, on demande de déterminer, dans l'intérieur du triangle, la position du point qui, à la fin des trois rotations, se retrouvera dans sa situation primitive ?*

Désignant, comme dans le problème IV, par α, β, γ, les coordonnées de ce point, au commencement des trois rotations, et par x'', y'', z'', les coordonnées du même point; à la fin de ces rotations, on aura :

$$x'' = \alpha \,, \qquad y'' = \beta \,, \qquad z'' = \gamma \;;$$

égalant donc à *zéro* les trois différences

$$x'' - \alpha \,, \qquad y'' - \beta \,, \qquad z'' - \gamma \;;$$

on obtiendra les trois équations qui suivent :

$$o = (n\gamma - o\beta)A + (q\gamma - r\beta)B + (t\gamma - u\beta)C \;;$$

$$o = (o\alpha - m\gamma)A + (r\alpha - p\gamma)B + (u\alpha - s\gamma)C \;;$$

$$o = (m\beta - n\alpha)A + (p\beta - q\alpha)B + (s\beta - t\alpha)C.$$

Par la nature du problème, chacune de ces trois équations doit être une conséquence nécessaire des deux autres; ce dont on peut en effet s'assurer facilement. Par leur moyen, on ne pourrait donc déterminer que le rapport entre les trois inconnues α, β, γ; mais, en y ajoutant la quatrième équation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,;$$

le problème devient entièrement déterminé. Si, pour abréger, on fait:

$$W^2=A^2+B^2+C^2+2BC\,\text{Cos}.a+2CA\,\text{Cos}.b+2AB\,\text{Cos}.c\,,$$

on aura finalement:

$$\alpha W=mA+pB+sC\ ;$$
$$\beta W=nA+qB+tC\ ;$$
$$\gamma W=oA+rB+uC\ :$$

et le problème sera résolu.

16. Si nous désignons par la lettre W le point, dans l'intérieur du triangle ABC, dont on vient de déterminer la position, par rapport aux trois axes primitifs, supposés perpendiculaires entre eux; on trouvera la position de ce même point, par rapport aux sommets des trois angles du triangle ABC, moyennant les formules connues (1), savoir:

$$\text{Cos}.AW=m\alpha+n\beta+o\gamma\ ;$$
$$\text{Cos}.BW=p\alpha+q\beta+r\gamma\ ;$$
$$\text{Cos}.CW=s\alpha+t\beta+u\gamma\ :$$

ce qui devient, après la substitution et les réductions:

$$W\,\text{Cos}.AW=A+B\,\text{Cos}.c+C\,\text{Cos}.b$$
$$W\,\text{Cos}.BW=B+C\,\text{Cos}.a+A\,\text{Cos}.c$$
$$W\,\text{Cos}.CW=C+A\,\text{Cos}.b+B\,\text{Cos}.a.$$

17. Si, en employant les formules et réductions déjà enseignées, on calcule les cosinus des arcs A'W, B'W, C'W, on trouvera qu'ils ne diffèrent de ceux des arcs AW, BW, CW, que dans

les secondes puissances et produits des quantités angulaires A, B, C, et qu'ainsi les uns peuvent être censés égaux aux autres. On aura donc :

$$\mathrm{AW}=\mathrm{A'W}\ ;\qquad \mathrm{BW}=\mathrm{B'W}\ ;\qquad \mathrm{CW}=\mathrm{C'W}.$$

18. Otant les quarrés des cosinus de l'unité, on obtiendra les quarrés des sinus. Si l'on emploie les réductions déjà enseignées, on trouvera :

$$\mathrm{W}^2\mathrm{Sin.}^2\mathrm{AW}=\mathrm{B}^2\mathrm{Sin.}^2c+2\mathrm{BC}\,(\mathrm{Cos.}a-\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c)+\mathrm{C}^2\mathrm{Sin.}^2b\ ;$$

$$\mathrm{W}^2\mathrm{Sin.}^2\mathrm{BW}=\mathrm{C}^2\mathrm{Sin.}^2a+2\mathrm{CA}\,(\mathrm{Cos.}b-\mathrm{Cos.}c\mathrm{Cos.}a)+\mathrm{A}^2\mathrm{Sin.}^2c\ ;$$

$$\mathrm{W}^2\mathrm{Sin.}^2\mathrm{CW}=\mathrm{A}^2\mathrm{Sin.}^2b+2\mathrm{AB}\,(\mathrm{Cos.}c-\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b)+\mathrm{B}^2\mathrm{Sin.}^2a.$$

19. Les seconds membres de ces équations sont (14) les quarrés même des petits arcs AA', BB', CC', décrits par les sommets des angles du triangle, en vertu des trois rotations successives. Tirant donc la racine quarrée de part et d'autre, il viendra :

$$\mathrm{WSin.AW}=\mathrm{AA'}\ ;\quad \mathrm{WSin.BW}=\mathrm{BB'}\ ;\quad \mathrm{WSin.CW}=\mathrm{CC'}.$$

20. Mais, en vertu des formules connues de la trigonométrie sphérique, on a ;

$$\mathrm{AA'}=\mathrm{AWA'Sin.AW}\ ;\quad \mathrm{BB'}=\mathrm{BWB'Sin.BW}\ ;\quad \mathrm{CC'}=\mathrm{CWC'Sin.CW}\ (*).$$

Multipliant ces équations par les précédentes, il viendra, en supprimant les facteurs communs, et renversant,

$$\mathrm{AWA'}=\mathrm{W}\ ;\qquad \mathrm{BWB'}=\mathrm{W}\ ;\qquad \mathrm{CWC'}=\mathrm{W}\ ;$$

de manière que ces trois angles sont égaux entre eux et à la quantité radicale W.

(*) En vertu de la proportionnalité des sinus des angles au sinus des côtés opposés, on a : Sin.AA'W.Sin.AA'=Sin.AWA'Sin.AW; mais, à raison de la petitesse de l'angle AWA', on peut supposer Sin.AA'W=1, Sin.AA'=AA' et Sin.AWA'=AWA'; ce qui rend cette équation identique avec la première des trois ci-dessus : il en serait de même pour les deux autres.

(*Note des éditeurs.*)

21. Il résulte donc de cette analise, que le triangle sphérique ABC, en éprouvant les trois rotations successives, la première égale à A, la seconde égale à B, la troisième égale à C, autour des trois axes qui sont désignés par ces mêmes lettres, se sera effectivement tourné autour d'un point W, situé dans l'intérieur du triangle, dont la position sera déterminée (16) par les trois formules :

$$\text{Cos.AW} = \frac{\text{A} + \text{B Cos.}c + \text{C Cos.}b}{\text{W}};$$

$$\text{Cos.BW} = \frac{\text{B} + \text{C Cos.}a + \text{A Cos.}c}{\text{W}};$$

$$\text{Cos.CW} = \frac{\text{C} + \text{A Cos.}b + \text{B Cos.}a}{\text{W}};$$

et qu'il aura décrit, autour de ce point, un angle égal à W, c'est-à-dire, à

$$\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2 + \text{C}^2 + 2\text{BC Cos.}a + 2\text{CA Cos.}b + 2\text{AB Cos.}c}$$

22. Réciproquement, s'il fallait décomposer la rotation donnée W, en trois autres rotations A, B, C, faites autour de trois axes dont la position serait donnée par rapport au point W, il faudrait regarder A, B, C, comme les quantités inconnues d'un problème, dont les quantités connues seraient : la rotation donnée W ; les arcs $a = \text{BC}$, $b = \text{CA}$, $c = \text{AB}$, qui seraient les côtés du triangle sphérique formé par les trois axes ; et les arcs AW, BW, CW, qui déterminent la position du point W, par rapport à ces mêmes axes. Dans la résolution de ces trois équations, on rencontrera encore la fonction,

$$\text{T}^2 = 1 - \text{Cos.}^2 a - \text{Cos.}^2 b - \text{Cos.}^2 c + 2\text{Cos.}a.\ \text{Cos.}b.\ \text{Cos.}c.$$

Si ensuite on fait, pour abréger :

$$\text{Cos.AW} = p, \qquad \text{Cos.BW} = q, \qquad \text{Cos CW} = r;$$

on trouvera :

$$A=\frac{W}{T^2}\{p\text{Sin.}^2a-q(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a.\,\text{Cos.}b)-r(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\,\text{Cos.}a)\}$$

$$B=\frac{W}{T^2}\{q\text{Sin.}^2b-r(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\,\text{Cos.}c)-p(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a.\,\text{Cos.}b)\}$$

$$C=\frac{W}{T^2}\{r\text{Sin.}^2c-p(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c.\,\text{Cos.}a)-q(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b.\,\text{Cos.}c)\}$$

le problème sera donc résolu ; et l'on voit qu'il sera possible dans tous les cas.

Strasbourg, le 12 *d'août* 1810.

TRIGONOMÉTRIE.

Méthode facile et élémentaire pour parvenir au développement des fonctions circulaires en produits indéfinis.

Par M. GERGONNE.

IL est bien peu de questions mathématiques qui soient susceptibles d'une résolution exacte ; et, pour la plupart d'entre elles, on n'a d'autre parti à prendre que de recourir à des approximations. L'analise offre pour cela divers moyens dont les principaux et les plus parfaits sont : 1.° les séries dont les termes, alternativement positifs et négatifs, convergent de telle manière que chacun d'eux est, à lui seul, plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent ; 2.° les fractions continues dont les fractions intégrantes, toutes positives, sont moindres que

que l'unité; 3.° enfin les produits indéfinis dont les facteurs, alternativement plus grands et plus petits que l'unité, tendent sans cesse vers cette limite commune.

S'il est impossible de traiter de ces divers instrumens d'approximation, dans les ouvrages consacrés à l'enseignement élémentaire, avec toute l'étendue que peuvent comporter leur nature et leur importance, il semble du moins convenable et utile de donner, dans ces sortes d'ouvrages, quelques notions sur chacun d'eux et sur le parti qu'on peut en obtenir.

C'est ce qu'on fait généralement aujourd'hui, à l'égard des séries et des fractions continues; mais, jusqu'ici, les produits indéfinis, si remarquables par leur forme, et si commodes par la manière dont ils se prêtent au calcul logarithmique, n'ont pas encore obtenu place dans les élémens; et ce qui les concerne a été réservé, en totalité, pour les traités de haute analise; ce qui tient sans doute à ce qu'on n'a pu parvenir, par des moyens à la fois élémentaires et rigoureux, à aucune fonction de cette forme. Je vais essayer de remplir, en partie, cette sorte de lacune, en déduisant de considérations fort simples, les expressions connues des sinus et des cosinus, en produits indéfinis.

On sait que, x étant un arc quelconque, on a:

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin.}x&=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots\ldots\\ \text{Cos.}x&=1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(1)$$

Pour découvrir quels doivent être les facteurs binomes des seconds membres de ces équations, il faut remarquer, 1.° que, si une quantité A mise à la place de x, dans l'un ou l'autre de ces seconds

(1) Voyez la *Théorie des fonctions analitiques*.
Voyez aussi la *Géométrie de M. Legendre*.

membres, le réduit à zéro, ce second membre sera divisible par $A-x$ ou, pour mieux dire, par $1-\frac{x}{A}$; 2.° que réciproquement aucun binome de la forme $1-\frac{x}{A}$ ne pourra être facteur de l'un ou l'autre de ces seconds membres, à moins que la valeur $x=A$ ne rende ce second membre égal à zéro. Ainsi, la recherche des facteurs binomes des seconds membres de ces équations se réduit à celle des valeurs de x qui peuvent les faire devenir nuls.

Mais, au lieu de chercher quelles sont les valeurs de x qui peuvent réduire ces seconds membres à zéro, il revient au même, et il est beaucoup plus facile, de chercher quelles sont celles de ces valeurs qui peuvent rendre nuls $\text{Sin}.x$ et $\text{Cos}.x$: or, pour que ces fonctions deviennent nulles, il est nécessaire et suffisant qu'on ait pour la première $x=\pm k\varpi$, et pour la seconde $x=\pm\frac{2k-1}{2}\varpi$, ou :

$$1\mp\frac{x}{k\varpi}=0\,, \qquad 1\mp\frac{2x}{(2k-1)\varpi}=0\,:$$

ϖ étant la demi-circonférence dont le rayon est 1, et k un nombre entier positif quelconque (1). On peut donc affirmer que les facteurs binomes de la série :

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots,$$

sont tous ceux de la forme $1\mp\frac{x}{k\varpi}$ qu'il est possible de former, en donnant successivement à k toutes les valeurs entières et positives imaginables; et que les facteurs binomes de la série :

$$1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots\ldots,$$

(1) On pourrait prendre aussi bien pour la seconde formule $1\mp\frac{2x}{(2k+1)\varpi}$; mais on ne doit pas prendre l'une et l'autre, d'autant que la dernière, en y changeant k en $k-1$, rentre dans la première.

sont tous ceux que l'on peut former, en donnant les mêmes valeurs à k, dans la formule $1 \mp \frac{2x}{(2k-1)\varpi}$.

Mais ces binomes n'entreront-ils qu'à la première puissance, soit dans l'une, soit dans l'autre série, ou bien tous ou quelques-uns d'entre eux ne s'y trouveront-ils pas affectés d'exposans différens de l'unité positive ? C'est ce qu'il s'agit présentement d'examiner.

Je remarque d'abord qu'aucun de ces binomes ne peut, dans la série dont il est facteur, se trouver affecté d'un exposant négatif; puisqu'alors l'égalité de ce facteur à zéro, au lieu de rendre Sin.x ou Cos.x nul, ainsi que cela doit être, le rendrait au contraire infini. On ne peut admettre non plus que cet exposant soit une fraction positive; car, à cause de la multiplicité des racines qu'une même quantité peut admettre, dans chaque degré, il arriverait, contrairement à la doctrine des fonctions circulaires, qu'à un même arc répondraient plusieurs sinus ou cosinus; ou encore que la série, qui n'a qu'une valeur unique pour chaque valeur de x, en aurait plusieurs, lorsqu'elle serait mise sous forme de produit de facteurs.

Je dis, enfin, qu'aucun des facteurs binomes de l'une ou de l'autre série ne peut être affecté d'un exposant entier et positif, différent de l'unité. On peut remarquer, en effet, que chacune de ces séries est, au signe près, la fonction dérivée de l'autre; si donc un des facteurs binomes de l'une d'elles s'y trouvait élevé à une puissance entière et positive p, plus grande que l'unité, on en conclurait, par la théorie connue des racines égales, que ce même facteur devrait aussi se trouver dans l'autre, et s'y trouver à la puissance $p-1$; d'où résulterait d'abord cette conséquence absurde qu'une même valeur de x rend nuls à la fois Sin.x et Cos.x, ou, en d'autres termes, qu'il existe un arc dont le sinus et le cosinus sont tous deux nuls : assertion détruite par l'équation fondamentale Sin.x^2+Cos.$x^2=1$. On peut d'ailleurs remarquer que, de ce que le facteur dont il s'agit entrerait à la puissance $p-1$ dans l'autre série, on pourrait conclure qu'il ne doit entrer qu'à la puissance $p-2$ dans la première; c'est-à-dire, dans celle où on l'a supposé à la puissance p ; ce qui fait apercevoir encore, d'une autre manière, l'absurdité de l'hypothèse.

Nous voilà donc assurés que non-seulement nos facteurs doivent entrer dans les deux séries, mais que, de plus, chacun d'eux ne doit s'y trouver qu'à la première puissance seulement. Je remarque actuellement que l'on peut faire le produit de ceux qui répondent à une même valeur de k; on obtient ainsi les facteurs du second degré :

$$1-\frac{x^2}{k^2\varpi^2}, \qquad 1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\varpi^2};$$

donnant donc à k toutes les valeurs entières et positives, à partir de l'unité, et ayant égard au facteur x qui affecte la valeur de Sin.x, il viendra :

$$\text{Sin.}\,x=x\left(1-\frac{x^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\varpi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\varpi^2}\right)\ldots\ldots,$$

$$\text{Cos.}\,x=\left(1-\frac{4x^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\varpi^2}\right)\ldots\ldots.$$

Soit fait d'abord, dans ces deux formules, $x=\frac{m\varpi}{2n}$; elles deviendront ;

$$\text{Sin.}\,\frac{m}{2n}\varpi=\frac{m\varpi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{64n^2}\right)\ldots,$$

$$\text{Cos.}\,\frac{m}{2n}\varpi=\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right)\ldots;$$

en y faisant, au contraire, $x=\frac{(n-m)\varpi}{2n}$ et remarquant, 1.° que

$$\text{Sin.}\,\frac{(n-m)\varpi}{2n}=\text{Sin.}\left(\frac{1}{2}\varpi-\frac{m\varpi}{2n}\right)=\text{Cos.}\,\frac{m\varpi}{2n};$$

2.° que

$$\text{Cos.}\,\frac{(n-m)\varpi}{2n}=\text{Cos.}\left(\frac{1}{2}\varpi-\frac{m\varpi}{2n}\right)=\text{Sin.}\,\frac{m\varpi}{2n};$$

il viendra, en transposant les formules :

$$\operatorname{Sin.}\frac{m}{2n}\varpi=\left\{1-\frac{(n-m)^2}{n^2}\right\}\left\{1-\frac{(n-m)^2}{9n^2}\right\}\left\{1-\frac{(n-m)^2}{25n^2}\right\}\ldots\ldots\ldots,$$

$$\operatorname{Cos.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{(n-m)\varpi}{2n}\left\{1-\frac{(n-m)^2}{4n}\right\}\left\{1-\frac{(n-m)^2}{16n^2}\right\}\left\{1-\frac{(n-m)^2}{36n^2}\right\}\ldots\ldots;$$

décomposant, dans les deux premières formules, les facteurs du second degré en facteurs du premier, et réduisant de plus, dans chaque facteur, l'entier et la fraction en une seule fraction, il viendra :

$$\operatorname{Sin.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6m-n}{6n}\cdot\frac{6n+m}{6n}\ldots\ldots,$$

$$\operatorname{Cos.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{5n}\cdot\frac{7n-m}{7n}\cdot\frac{7n+m}{7n}:$$

voilà donc deux expressions, l'une des sinus et l'autre des cosinus, en produits indéfinis, dont les facteurs, tendant sans cesse vers l'unité, sont alternativement plus grands et plus petits que cette limite commune.

En faisant subir les mêmes transformations aux deux autres expressions, elles deviendront :

$$\operatorname{Sin.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdot\frac{6n+m}{7n}\ldots;$$

$$\operatorname{Cos.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}\cdot\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\ldots\ldots;$$

divisant alors l'une par l'autre les deux expressions soit de $\operatorname{Sin.}\frac{m}{2n}\varpi$ soit de $\operatorname{Cos.}\frac{m}{2n}\varpi$, il viendra également :

$$\varpi=2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\ldots\ldots;$$

expression du nombre ϖ donnée pour la première fois par Wallis (1).

---

(1) Voyez l'*Arithmetica infinitorum*, dans le premier volume de ses œuvres.

Je ne pousserai pas plus loin ici les nombreuses conséquences qui peuvent être déduites des formules auxquelles je viens de parvenir ; on les trouvera développées, avec beaucoup d'étendue, dans les chapitres IX, X et XI du premier volume de l'*Introduction à l'analise infinitésimale* d'Euler : ouvrage dont on ne saurait trop recommander la lecture à ceux qui veulent connaître toutes les richesses et toute la fécondité de l'analise.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème I de la page 17 de ce volume, pris dans son énoncé le plus général (1).

Par M. D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.

ENONCÉ. Circonscrire à un cercle donné un polygone de m côtés, de manière que les sommets des angles du polygone soient situés sur m droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle ?

Solution. Par une propriété du cercle qui lui est commune avec toutes les courbes du second degré (2) ; lorsqu'un angle circonscrit à un cercle est assujetti à avoir son sommet sur une droite donnée,

(1) On trouvera ci-après, pag. 127, une construction très-simple de ce problème, pour le cas particulier du triangle.

(2) La démonstration générale et analitique tant de cette propriété des courbes du second degré, que de la propriété analogue des surfaces de ce degré, sera le sujet d'un article dans ces annales.

la corde qui joint les points de contact de ses côtés avec le cercle, se trouve par là même assujettie à passer par un certain point qui est aussi donné (1).

Puis donc que les sommets des angles du polygone demandé doivent être situés sur m droites données, il en résulte que, si l'on forme un polygone inscrit d'un pareil nombre de côtés, qui ait les sommets de ses angles aux points où le premier touche le cercle donné, les côtés de ce dernier prolongés, s'il le faut, passeront par m points donnés. Il est de plus évident que, le polygone inscrit étant construit, il suffira, pour former l'autre, de mener, par les sommets des angles de celui-ci, des tangentes au cercle auquel il est inscrit.

Le problème par lequel on propose de circonscrire à un cercle donné un polygone de m côtés, qui ait les sommets de ses angles sur m droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle, revient donc à celui où l'on proposerait d'inscrire au cercle donné un polygone de m côtés, dont les côtés, prolongés ou non prolongés, passassent par m points donnés (2).

---

(1) Ce point peut être facilement déterminé de plusieurs manières différentes. Soit en effet C le centre du cercle donné, et D la droite donnée.

On pourra d'abord abaisser de C sur D, une perpendiculaire, et si A est son pied, et B le point où elle coupe le cercle donné, en prenant sur elle un point P tel que CP soit troisième proportionnelle à CA et CB ; le point P sera le point cherché.

Autrement, 1.° Si la droite D ne rencontre pas le cercle donné, en désignant toujours par A le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur D ; si, par ce point A, on mène deux tangentes au cercle, et qu'on joigne par une corde les points de contact de ces tangentes avec le cercle ; l'intersection P de cette corde avec la perpendiculaire sera le point cherché.

2.° Si la droite D coupe le cercle, il suffira de mener des tangentes à ce cercle par les deux points où elle le coupera, et l'intersection P de ces tangentes sera le point cherché.

Il est aisé de voir, d'après ces constructions, ce qu'il y aurait à faire si, au contraire, le point P étant donné, il était question de déterminer la droite D à laquelle il répond.

(2) Il est visible, par ce qu'on a dit plus haut, que réciproquement ce dernier problème peut être ramené au premier.

Or, ce dernier problème a été traité, avec beaucoup de soin et de détails, par un grand nombre d'illustres géomètres (1).

Le problème proposé est donc résolu, puisque sa résolution est ramenée à celle d'un autre problème que depuis long-temps on sait résoudre.

Et, d'autant que ce dernier n'admet que deux solutions au plus, il est certain que le premier n'en saurait admettre un plus grand nombre.

Solution du problème II de la page 17 de ce volume;

Par M. J. Jouvin, ancien élève de l'école impériale polytechnique.

Énoncé. Déterminer l'équation la plus générale des courbes planes qui jouissent de cette propriété, savoir : que toutes celles de leurs cordes dont la direction passe par un certain point de leur plan sont d'une longueur donnée et constante ?

Construction. Soit P le point donné, et $2r$ la longueur constante de toutes les cordes dont la direction passe par ce point. Soit tracé à volonté une courbe continue ou discontinue que nous désignerons par A ; soit mené par le point P une suite de droites D coupant A en une suite de points C ; enfin, de chacun de ces points C comme centre, et avec le rayon constant r, soit décrit une suite de cercles; chacun de ces cercles coupera celle des droites D sur laquelle son centre C se trouvera situé, en deux points M et N ; alors tous les points M et tous les points N se trouveront sur deux branches d'une courbe unique qui satisfera, dans toute son étendue, aux con-

(1) Voyez sur-tout, pour ce qui concerne l'histoire de ce problème, la *Géométrie de position*, par M. *Carnot*; Paris 1803, page 383; et les *Élémens d'Analise géométrique et d'Analise algébrique*, par M. *S. Lhuilier*; Genève 1809, page 279.

ditions

ditions du problème ; et cette courbe sera continue ou discontinue, suivant la nature de la courbe arbitraire A.

Analise. Soit rapporté la courbe arbitraire A à deux axes rectangulaires passant par P, et supposons qu'alors son équation soit :

$$y=f(x) ;$$

l'équation générale des droites D sera :

$$y=\alpha x ,$$

α étant une indéterminée.

On obtiendra ensuite les équations de tous les points C, en combinant entre elles les deux équations

$$y=f(x), y=\alpha x ;$$

d'où on conclura d'abord : $f(x)=\alpha x$. Si l'on suppose que cette équation, résolue par rapport à x, donne $x=\varphi(\alpha)$, les points C auront pour leurs équations :

$$x=\varphi(\alpha) ; y=\alpha\varphi(\alpha).$$

Les cercles qui auront ces points pour centres et r pour rayon, auront donc pour équation générale :

$$[x-\varphi(\alpha)]^2+[y-\alpha\varphi(\alpha)]^2=r^2 ;$$

en sorte que la combinaison de cette équation avec l'équation $y=\alpha x$ de D fera connaître les points M et N qui répondent à chaque valeur particulière de l'indéterminée α.

Éliminant donc cette indéterminée entre ces deux équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu géométrique de tous les points M et N ; elle sera donc l'équation de la courbe cherchée. L'équation la plus générale des courbes qui satisfont aux conditions du problème proposé est donc :

$$\left\{x-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=r^2$$

dans laquelle φ désigne une fonction absolument arbitraire.

Remarque. Nous avons supposé qu'on s'était donné la fonction f, et nous avons vu que, dans ce cas, la fonction φ n'était autre chose que la fonction de α qu'on obtenait pour valeur de x, en résolvant l'équation :

$$f(x)=\alpha x.$$

Si, au contraire, c'était la fonction φ qui fût donnée, et qu'on voulût en déduire la fonction f, cette dernière fonction ne serait autre chose que la fonction de x qu'on obtiendrait, en éliminant α entre les deux équations :

$$x=\varphi(\alpha)\,, \qquad\qquad y=\alpha\varphi(\alpha)\;;$$

et en résolvant ensuite l'équation résultante par rapport à y.

Nous ne nous arrêterons pas aux applications qu'on peut faire des résultats auxquels nous sommes parvenus, attendu que ces applications ne peuvent présenter de difficultés.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

ÉNONCÉ. Circonscrire à un cercle donné, un triangle qui ait les sommets de ses angles situés sur trois droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle ?

Remarque. Il est aisé de voir que toute la difficulté du problème consiste à trouver le point de contact du cercle donné, avec un seul des côtés du triangle cherché ; ce qu'on fera comme il suit :

Construction. Soit a, b, c, les trois côtés du triangle formé par les droites données; soit A, B, C, les sommets des angles opposés. Soit déterminé deux points α et β qui soient situés, par rapport aux droites a et b, comme il est dit à la note de la page 123; soit ensuite mené, par A et α une droite coupant a en m, et par B et β une autre droite coupant b en n; et soit enfin mené par m et n une droite coupant, en t et t', le cercle donné; si, par l'un ou l'autre de ces deux points, on mène au cercle une tangente terminée à a et b, cette tangente sera l'un des côtés du triangle cherché (1).

On propose de démontrer cette construction ?

II.

Un tétraèdre peut être coupé par un plan, qui ne passe par les sommets d'aucun de ses angles, de deux manières différentes.

1.° Trois des sommets peuvent être situés d'un même côté du plan coupant, et un seul de l'autre; ce plan coupe ainsi les trois arêtes d'un même angle trièdre, la section est triangulaire, et le tétraèdre se trouve divisé en deux nouveaux corps, dont l'un est encore un tétraèdre, tandis que l'autre est un tronc de tétraèdre, à bases parallèles ou non parallèles.

2.° Deux des sommets peuvent être situés d'un côté du plan coupant, et deux de l'autre; ce plan coupe alors deux couples d'arêtes opposées, la section est quadrangulaire, et le tétraèdre se trouve divisé en deux nouveaux corps qui sont l'un et l'autre des troncs de tétraèdres.

Si, dans l'un ou dans l'autre cas, on demande que le plan cou-

(1) Il résulte de l'analise du problème général, page 122, que la même construction peut être appliquée à la résolution directe de cet autre problème : *Inscrire à un cercle donné un triangle dont les côtés, ou leurs prolongemens, passent par des points donnés;* problème que M. *Lhuilier* ne résout, à l'endroit déjà cité, qu'en le ramenant à un autre qui n'est pas lui-même sans difficultés.

pant partage le tétraèdre en deux parties équivalentes, le problème sera évidemment indéterminé.

Mais, on en levera absolument l'indétermination, si l'on exige de plus que l'aire de la section soit un *minimum*.

Le problème, ainsi envisagé, n'ayant encore été résolu, jusqu'ici, que pour le seul cas de la section triangulaire (1), on propose de le résoudre pour celui où cette section doit être quadrilatère ?

III.

Deux points étant donnés, on propose de déterminer l'équation la plus générale des courbes planes qui, passant par ces deux points, sont telles que l'espace mixtiligne compris entre l'arc qui se termine à ces deux points et sa corde, soit équivalent à une surface donnée ?

---

(1) Voyez la *Correspondance sur l'École polytechnique*, tome 1, n.° 9, pages 346-353.

TRIGONOMÉTRIE.

Analise complète d'un problème de trigonométrie rectiligne.

Solution d'une difficulté qui a été proposée sur la théorie des triangles semblables ;

Par M. Suremain-de-Missery, ci-devant officier d'artillerie, membre de plusieurs sociétés savantes.

1. On démontre aisément que *deux triangles qui ont deux côtés respectivement proportionnels, et l'angle opposé à l'un de ces côtés égal, de part et d'autre, sont semblables, si l'angle opposé à l'autre côté est de même espèce dans chacun.*

Car, soient a, b, c, les côtés d'un triangle, et A, B, C, les angles opposés ; a', b', c', les côtés d'un autre triangle, et A′, B′, C′, les angles opposés ; et supposons qu'on ait, à la fois, $a:b::a':b'$, $A=A'$ et B de même espèce que B′. Ces deux triangles donnent respectivement :

$$a : b :: \text{Sin.}A : \text{Sin.}B\,,$$

$$a' : b' :: \text{Sin.}A' : \text{Sin.}B'\,;$$

donc, puisque $a:a'::b:b'$, on aura :

$$\text{Sin.}A : \text{Sin.}B :: \text{Sin.}A' : \text{Sin.}B'\,;$$

et puisqu'on a $A=A'$, d'où $\text{Sin.}A=\text{Sin.}A'$, on pourra en conclure :

$$\text{Sin.}B=\text{Sin.}B'\,;$$

et de là :

$$B=B' \quad \text{ou} \quad B=180^\circ-B';$$

mais, si B et B' sont de même espèce, sans être égaux, on ne peut avoir $B=180^\circ-B'$; on a donc exclusivement $B=B'$ et, par conséquent, les triangles proposés sont semblables comme équiangles.

Cette proposition donne naturellement lieu au problème suivant :

2. *Connaissant les angles A, B, C, et les côtés a, b, c, d'un triangle, déterminer les angles A', B'; C', et les côtés a', b', c', d'un autre triangle qui soit tel qu'on ait : $A'=A$ et $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=m$, m étant un nombre donné ?*

Ce problème présentant quelques circonstances remarquables qui n'ont jamais été discutées, nous allons le résoudre avec tout le détail que sa nature comporte.

On connaît $a'=ma$, $b'=mb$, $A'=A$, et l'on demande c', B', C'; or, si l'on connaissait c', on trouverait aussitôt B' et C'; tout se réduit donc à déterminer c' en fonction des données, ce qu'on fera ainsi qu'il suit :

Les deux triangles donnent respectivement :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,\text{Cos.}A,$$

$$a'^2=b'^2+c'^2-2b'c'\,\text{Cos.}A';$$

d'où on tire, en se rappelant que $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$ et que $A'=A$,

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{2c}{b}\,\text{Cos.}A,$$

$$\frac{c'^2}{b'^2}=\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{2c'}{b'}\,\text{Cos.}A.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il vient :

$$\frac{c'^2}{b'^2}-\frac{c^2}{b^2}=2\,\text{Cos.}A\left(\frac{c'}{b'}-\frac{c}{b}\right)$$

équation qui revient à

$$\left(\frac{c'}{b'}-\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c'}{b'}+\frac{c}{b}-2\text{Cos.}A\right)=0$$

Égalant donc successivement chacun de ces facteurs à zéro, on a,

$$\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{c'}{b'}=-\frac{c}{b}+2\mathrm{Cos.A}=\frac{b^2-a^2}{bc} \text{ (*)};$$

d'où on tire :

$$c'=\frac{b'}{b}c \qquad \text{et} \qquad c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}:$$

telles sont les deux racines qui doivent résoudre la question proposée.

3. La première est toujours positive.

La seconde peut être positive, négative ou nulle, suivant que b est $>a$, $<a$ ou $=a$; ou, ce qui revient au même, suivant que B est $>$ A, $<$ A ou $=$ A.

Sur quoi nous remarquons que, si A est aigu, B peut être $>$ A, $<$ A ou $=$ A; mais que, si A est droit ou obtus, B doit être nécessairement $<$ A; donc, si A est aigu, b peut être $>a$, $<a$ ou $=a$; tandis que, si A est droit ou obtus, b doit être nécessairement $<a$. On raisonnerait de même pour B.

Supposons successivement $b>a$, $b<a$, $b=a$.

1.° Si b est $>a$, on a B $>$ A; donc B peut être aigu, obtus ou droit, et A est nécessairement aigu.

Dans la figure 1, on a $b>a$ et B obtus.

Dans la figure 2, on a $b>a$ et B aigu.

Dans la figure 3, on a $b>a$ et B droit.

2.° Si b est $<a$, on a B $<$ A; donc A peut être aigu, obtus ou droit, et B est nécessairement aigu.

Dans la figure 4, on a $b<a$ et A obtus.

Dans la figure 5, on a $b<a$ et A aigu.

Dans la figure 6, on a $b<a$ et A droit.

3. Si $b=a$, on a aussi B $=$ A; donc B ou son égal A est nécessairement aigu.

Dans la figure 7, on a $b=a$ et B ou A aigu.

(*) A cause de $2\,\mathrm{Cos.A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$.

(*Note des Éditeurs.*)

Quant à l'angle C, il peut être aigu, obtus ou droit, soit qu'on ait $b > a$, $b < a$ ou $b = a$; mais cela ne nous intéresse point, comme on le sentira, en construisant les valeurs de c', ce que nous ferons ci-après. Seulement, si cet angle est droit ou obtus, les deux autres A et B se trouveront par là nécessités à être aigus.

Revenons présentement à nos racines, $c' = \frac{b'}{b}c$ et $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$.

4. La valeur $c' = \frac{b'}{b}c$, toujours positive, répond à un triangle $a'b'c'$, semblable à abc, et qui remplit les conditions du problème. Je dis *semblable* à abc; car on a $c' = \frac{b'}{b}c = \frac{a'}{a}c$, d'où $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, ce qui entraîne la similitude.

5. Cette valeur $c' = \frac{b'}{b}c$ est facile à construire; si, en effet, (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), sur la direction de la droite $CA = b$, et à partir du point C, on porte une longueur $CA' = mb = b'$; que, sur la direction de la droite $CB = a$, et à partir du même point, on porte une longueur $CB' = ma = a'$; en menant A'B', cette dernière droite aura pour expression $\frac{b'}{b}c$ et, par conséquent, A'B'C sera le triangle cherché, semblable au triangle ABC.

6. La valeur $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$, positive si b est $> a$, répond à un triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc, mais qui remplit, comme le premier, les conditions du problème. Je dis, *en général dissemblable* à abc; car ce dernier triangle donne $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\mathrm{Cos.B}$, d'où $\frac{b^2 - a^2}{c} = c - 2a\,\mathrm{Cos.B}$; ainsi, suivant que B sera aigu, obtus ou droit (fig. 1, 2, 3), $\frac{b^2 - a^2}{c}$ sera respectivement $< c$, $> c$ ou $= c$ et, par conséquent, $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$ sera $< \frac{b'}{b}c$, $> \frac{b'}{b}c$ ou $= \frac{b'}{b}c$; or, dans les deux premiers cas, le triangle $a'b'c'$ ne sera pas sem-

blable au triangle abc, et, dans le troisième cas, il lui sera semblable; donc, ce dernier cas n'étant que la limite commune des deux autres, il est vrai de dire que le triangle $a'b'c'$, dans lequel $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, est en général dissemblable à abc.

7. Cette valeur $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, b étant toujours supposé $>a$, est facile à construire; si, en effet (fig. 1 et 2), on abaisse du point C une perpendiculaire CO sur le côté c, prolongé s'il est nécessaire; que l'on porte ensuite le segment OB en sens contraire; et qu'enfin, par le nouveau point B, on mène une nouvelle droite $\text{CB}=a$; on aura une nouvelle droite AB, qui sera la différence (fig. 2) ou la somme (fig. 1) des segmens, suivant que la perpendiculaire tombera en dedans ou en dehors du triangle donné abc. On aura donc, en nommant c'' cette nouvelle droite AB, $c''=\frac{(b+a)(b-a)}{c}=\frac{b^2-a^2}{c}$, et partant $c'=\frac{b'}{b}c''$. Or si, sur la direction de la droite $\text{CA}=\text{B}$, à partir du point C, on prend une longueur $\text{CA}'=mb=b'$; que, sur la direction de la nouvelle droite $\text{CB}=a$, et à partir du même point, on porte une longueur $\text{CB}'=ma=a'$; qu'enfin on mène A'B', on aura cette dernière droite $=\frac{b'}{b}c''=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$ et, par conséquent, A'B'C sera le triangle cherché, dissemblable à ABC.

8. La valeur $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, négative si b est $<a$, répond à un triangle $a'b'c'$ qui remplit, non les conditions même du problème, mais d'autres conditions un peu différentes, et telles que A', au lieu d'être $=$ A, serait $=180^\circ-\text{A}$. En effet, dans cette nouvelle hypothèse, il faudra prendre, non plus $\text{Cos.A}'=\text{Cos.A}$, mais $\text{Cos.A}'=-\text{Cos.A}$; et par conséquent, non plus $\frac{c'^2}{b'^2}=\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{2c'}{b'}\text{Cos.A}$, mais $\frac{c'^2}{b'^2}=\frac{a^2}{b^2}-1-\frac{2c'}{b'}\text{Cos.A}$: ce qui revient à changer simplement

le signe de c'; exécutant donc ce changement, dans les racines déjà obtenues, elles deviendront, pour le problème dont il s'agit ici :

$$c' = -\frac{b'}{b}c \qquad \text{et} \qquad c' = \frac{b'}{b}\cdot\frac{a^2-b^2}{c};$$

c'est-à-dire qu'elles ne différeront que par le signe, de celles qui répondent au premier problème.

9. La valeur $c' = \frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, relative au premier problème, où l'on a fait $A' = A$, négative si b est $< a$, doit donc, étant prise avec un signe contraire, résoudre le second problème, où l'on a fait $A' = 180^\circ - A$. Cette valeur répond à un triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc, et qui remplit les conditions du premier problème, excepté que A' est $= 180^\circ - A$, au lieu d'être $= A$. Je dis *en général dissemblable* à abc; car ce dernier triangle donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos.}A$, d'où $\frac{a^2-b^2}{c} = c - 2b\,\text{Cos.}A$; ainsi, suivant que A sera aigu, obtus ou droit (fig. 4, 5, 6), $\frac{a^2-b^2}{c}$ sera $<c$, $>c$ ou $=c$; et par conséquent $c' = -\frac{b'}{b}\cdot\frac{a^2-b^2}{c}$ sera $< -\frac{b'}{b}c$, $> -\frac{b'}{b}c$ ou $= -\frac{b'}{b}c$; or, dans les deux premiers cas, le triangle $a'b'c'$ n'est pas semblable au triangle abc, et, dans le troisième, qui n'est autre chose que la limite commune de ces deux-là, il lui est semblable; donc il est vrai de dire qu'en général il lui est dissemblable.

10. Cette valeur $c' = \frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, b étant $< a$, est facile à construire; si, en effet, on opère (fig. 4 et 5), comme il a été dit (fig. 1 et 2), on aura une nouvelle droite AB, et en faisant cette droite $= -c''$, parce qu'elle tombe à l'opposé de c, on aura $-c'' = \frac{(a+b)(a-b)}{c} = \frac{a^2-b^2}{c}$, et partant $c' = \frac{b'}{b}c''$; or, si l'on continue, comme dans les figures 1 et 2, on aura semblablement une droite A'B', correspondante à la nouvelle droite AB, et dont l'expression sera

$=\frac{b'}{b}c''=\frac{b}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$; d'où il suit que A'B'C sera le triangle cherché, dissemblable à ABC.

11. La valeur $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, nulle si $b=a$, ne répond à aucun triangle $a'b'c'$, dissemblable à abc, ou, si l'on veut, répond à un triangle dissemblable évanouissant : cela est évident (fig. 7.)

12. Résumons ;

Pour le problème où, connaissant les côtés a, b, c, et les angles A, B, C, d'un triangle, il s'agit de déterminer les côtés a', b', c', et les angles A', B', C', d'un autre triangle, qui soit tel qu'on ait : A'=A et $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=m$, m étant un nombre donné ; voici, relativement à la détermination de c', les seules valeurs qui satisfassent à la question, telle qu'elle a été proposée :

1.° Si b est $>a$ et B obtus (fig. 1), on a,

$$c'=\frac{b'}{b}c \qquad \text{ou} \qquad c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}.$$

2.° Si b est $>a$ et B aigu (fig. 2), on a encore,

$$c'=\frac{b'}{b}c \qquad \text{ou} \qquad c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}.$$

3.° Si b est $>a$ et B droit (fig. 3), on a,

$$c'=\frac{b'}{b}c \qquad \text{ou} \qquad c'=\frac{b'}{b}c.$$

4.° Si b est $<a$ et A obtus (fig. 4), on a seulement,

$$c'=\frac{b'}{b}c.$$

5.° Si b est $<a$ et A aigu (fig. 5), on a encore,

$$c'=\frac{b'}{b}c.$$

6. Si b est $< a$ et A droit (fig. 6), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c.$$

7.° Si, enfin, $b = a$ (fig. 7), on a seulement,

$$c' = \frac{b'}{b} c.$$

Et, pour le problème analogue où, connaissant les côtés a, b, c, et les angles A, B, C, d'un triangle, il s'agit de déterminer les côtés a', b', c', et les angles A$'$, B$'$, C$'$, d'un autre triangle qui soit tel qu'on ait: $A' = 180° - A$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = m$, m étant un nombre donné; voici, relativement à la détermination de c', les seules valeurs qui satisfassent à la question, telle qu'elle a été proposée :

1.° Si b est $< a$ et A obtus (fig. 4), on a seulement,

$$c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

2.° Si b est $< a$ et A aigu (fig. 5), on a encore,

$$c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

3.° Si b est $< a$ et A droit (fig. 6), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c;$$

et, dans chacun des quatre autres cas (fig. 1, 2, 3, 7), on n'a aucune valeur de c' qui satisfasse à la question.

13. On voit que les deux problèmes ont les mêmes racines, $c' = \frac{b'}{b} c'$ et $c' = -\frac{b'}{b} c$, lorsque A est droit, et partant $b < a$; parce qu'alors on a, tout à la fois, $A' = A$ et $A' = 180° - A$.

On voit encore que la racine $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$, du premier problème,

racine

racine négative lorsque b est $< a$, ne satisfait point aux conditions précises de ce problème, excepté cependant dans le cas où l'angle A est droit; puisqu'alors elle devient $c' = -\frac{b'}{b} c$, valeur qui satisfait au problème (fig. 6).

On voit, enfin, que la racine $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}$, du second problème, racine négative si b est $> a$, ne satisfait point aux conditions précises de ce problème, même dans le cas où l'angle B est droit; puisqu'alors elle devient $c' = -\frac{b'}{b} c$, valeur qui ne satisfait point à ce problème (fig. 3).

14. D'Alembert et les autres géomètres qui l'ont suivi, enseignent que, lorsqu'une équation a deux racines, l'une positive et l'autre négative, la première résout la question dans le sens le plus direct et le plus immédiat que son énoncé puisse présenter, tandis que la seconde ne la résout qu'en modifiant cet énoncé, de manière à rendre additif ce qui était soustractif, *et vice versâ*. Cependant, l'on voit ici deux racines, l'une positive et l'autre négative qui, l'une et l'autre, résolvent deux questions dans le sens le plus direct et le plus immédiat que leur énoncé présente, savoir : les racines

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{et} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c,$$

qui toutes deux résolvent également le premier et le second problème lorsqu'on suppose $b < a$ et A droit, et les résolvent sans qu'il soit nécessaire de rien changer à leur énoncé. On voit donc que le principe posé par d'Alembert souffre des exceptions, et qu'ainsi la théorie des quantités négatives, relativement aux racines des équations, n'est pas encore suffisamment établie, comme l'avaient déjà soupçonné de très-bons analistes (*).

(*) Les géomètres dont parle ici l'auteur ont aussi posé en principe que, lorsque les racines d'un problème du second degré sont toutes deux positives, elles le

15. Après avoir déterminé le côté c', venons à la détermination des angles B' et C'.

Pour le premier problème ; on voit, par les constructions qui donnent les valeurs de c',

1.° Que, si le triangle cherché est semblable au triangle donné (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), on a,

$$B'=B \quad \text{et} \quad C'=C;$$

2.° Que, si le triangle cherché est dissemblable au triangle donné (fig. 1 et 2), on a,

$$B'=180^\circ-B;$$

d'où, à cause de $A'=A$ et $A'+B'+C'=180^\circ$, on déduit,

$$C'=B-A.$$

Pour le second problème ; on voit, par les constructions qui donnent les valeurs de c',

1.° Que, si le triangle cherché est semblable au triangle donné (fig. 6), on a,

---

résolvent, l'une et l'autre, dans le sens le plus direct et le plus immédiat, et cela est vrai quelquefois ; mais il arrive souvent aussi qu'une seule de ces racines convient à la question : c'est, par exemple, ce qui arrive lorsqu'on se propose de déterminer *quelle doit être la flèche d'un segment sphérique, appartenant à une sphère donnée, pour que le volume de ce segment* soit moitié de celui du secteur dont il fait partie. Le *problème L* de l'*Arithmétique universelle* en offre encore un autre exemple, lorsque du moins, ainsi que le fait Newton, on prend pour inconnue la profondeur du puits.

Peut-être ne serait-il pas impossible de rencontrer un problème du second degré que ses racines, toutes deux négatives, résoudraient dans un sens direct ; ou un problème que ses racines, bien que positives l'une et l'autre, ne résoudraient qu'autant qu'on en modifierait l'énoncé ; ou enfin un problème qui serait résolu dans un sens direct, par sa racine négative, et, dans un sens inverse, par sa racine positive ?

(*Note des rédacteurs.*)

$$B'=B \quad \text{et} \quad C'=C\,;$$

2.° Que, si le triangle cherché est dissemblable au triangle donné (fig. 4 et 5), on a,

$$B'=B,$$

d'où, à cause de $A'=180°-A$ et $A'+B'+C'=180°$, on déduit,

$$C'=A-B.$$

16. Observons que, si, au lieu de porter en sens contraire le segment OB, comme on l'a fait (fig. 1, 2, 4, 5, 7), on portait en sens contraire l'autre segment OA; c et c' deviendraient négatifs en même temps, soit dans les racines,

$$c'=\frac{b'}{b}c \qquad \text{et} \qquad c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}\,;$$

de l'équation du premier problème, soit dans les racines,

$$c'=-\frac{b'}{b}c \qquad \text{et} \qquad c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{a^2-b^2}{c}\,;$$

de l'équation du second; en sorte que ces racines resteraient toujours les mêmes, comme il était aisé de le prévoir.

Par conséquent, dans cette nouvelle construction, on trouverait aussi les mêmes valeurs pour les angles B′ et C′, ainsi que cela doit être.

17. Après avoir résolu le problème proposé, art. 2, ainsi que l'autre problème qui se trouve lié à celui-là, il est temps d'en venir à l'exposé et à la solution de la difficulté annoncée dans le titre de ce mémoire; voici en quoi elle consiste:

On a prétendu pouvoir infirmer la démonstration donnée à l'art. 1, par le raisonnement qui suit:

Si deux triangles, abc et $a'b'c'$, sont tels qu'on ait à la fois:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, $A = A'$ et B de même espèce que B', on aura, comme on l'a fait voir, art. 2,

$$\frac{c'^2}{b'^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2\,\text{Cos.}\,A\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right);$$

divisant les deux membres de cette équation par $\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}$, il viendra:

$$\frac{c'}{b'} + \frac{c}{b} = 2\text{Cos.}A;$$

d'où l'on conclura:

$$\frac{c'}{b'} = -\frac{c}{b} + 2\text{Cos.}A = \frac{b^2 - a^2}{bc}.$$

Or, pour que les triangles soient semblables, il faut qu'on ait $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; donc, puisqu'on a déjà $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, il suffira de faire $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ d'où $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$; et alors la dernière formule deviendra $\frac{c}{b} = \frac{b^2 - a^2}{bc}$; et partant:

$$b^2 = a^2 + c^2;$$

ce qui donne $B = B' = 90°$. Il semblerait donc résulter de là que, pour que les deux triangles soient semblables, il faut que les angles B et B' soient tous deux droits.

18. Mais les détails dans lesquels nous sommes entrés jusqu'ici, mettent dans le plus grand jour tout ce qu'un pareil raisonnement présente de défectueux; on voit, en effet, qu'en divisant l'équation $\frac{c'^2}{b'^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2\text{Cos.}A.\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right)$, ou son équivalente,

$$\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c'}{b'} + \frac{c}{b} - 2\text{Cos.}A\right) = 0$$

par le facteur $\frac{c'}{b'}-\frac{c}{b}$, qui, égalé à zéro, donne la racine $c'=\frac{b'}{b}c$, on élimine cette racine, laquelle répond à un triangle $a'b'c'$, semblable au triangle abc; et l'on ne conserve que le facteur $\frac{c'}{b'}+\frac{c}{b}-$ $2\text{Cos.}A$ qui, égalé à zéro, donne la racine $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, laquelle répond à un autre triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc. Cependant, on suppose ensuite semblables ces triangles qui, en général, ne le sont pas; lors donc que la supposition de cette similitude est introduite dans le calcul, l'algèbre doit redresser cette fausse hypothèse, en indiquant le cas unique où elle peut devenir vraie.

19. Or, ce cas est celui où l'un des angles A et B est droit (art. 12, n.os 3 et 6).

En faisant $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$, dans l'équation $\frac{c'}{b'}=\frac{b^2-a^2}{bc}$, nous avons trouvé $b^2=a^2+c^2$, d'où nous avons conclu $B=90°$; mais c'est qu'alors nous avons tacitement supposé $b>a$, et partant $\frac{c'}{b'}$ positif.

Si nous avions supposé $b<a$, et partant $\frac{c'}{b'}$ négatif, il eût fallu faire, dans le cas correspondant, $\frac{c'}{b'}=-\frac{c}{b}$; et alors nous eussions trouvé $a^2=b^2+c^2$, d'où $A=90°$.

20. En général, le triangle semblable à abc est indiqué par la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$, et le triangle dissemblable à abc l'est par la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{b^2-a^2}{bc}$ qui est positive ou négative, suivant que b est $>a$ ou $<a$. Faire $\frac{c'}{b'}=\pm\frac{c}{b}$, suivant que b est $>a$ ou $<a$, c'est donc demander à l'algèbre dans quels cas deux triangles, en général dissemblables, pourraient néanmoins devenir semblables; et elle nous apprend que ce sera dans celui où l'un des angles A et B sera droit.

Mais la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$ indique que les triangles abc, $a'b'c'$, entre lesquels on a $a:b::a':b'$ et $A'=A$, peuvent être semblables. Et puisqu'alors on a toujours $B'=B$ ou $B'=180^\circ-B$, il est clair que ces triangles seront en effet semblables, si B et B′ sont de même espèce, et non pas seulement si B et B′ sont droits.

Ainsi se trouve expliqué le paradoxe de l'art. 17, de manière à conserver à l'analise l'exactitude et la lumière qui la caractérisent éminemment (*).

(*) La difficulté que résout ici M. de Missery, n'est pas plus particulière à la question qu'il s'est proposée qu'à toute autre : elle se reproduira toutes les fois qu'on se permettra d'opérer de la manière indiquée art. 17.

On dit communément qu'on peut, sans troubler l'égalité, multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité ; et cela est très-vrai, si le multiplicateur ou le diviseur est entièrement connu et différent de zéro; mais on ne saurait, dans le cas contraire, user de cette faculté, sans s'exposer aux plus graves erreurs; d'autant qu'il peut souvent arriver que l'équation n'ait lieu qu'en vertu du facteur introduit ou supprimé. On peut même affirmer qu'à l'aide d'un tel procédé, il n'est aucune proposition absurde dont on ne puisse donner une démonstration apparente, ni aucune proposition évidente dont, à l'inverse, on ne parvienne aussi, du moins en apparence, à démontrer la fausseté. De quelle négligence ne sont donc pas coupables ceux qui, écrivant des élémens, gardent un silence absolu sur ce point capital, ou même ne s'y arrêtent, pour ainsi dire, qu'en passant, et sans y insister fortement ?

Les mêmes considérations prouvent que, passé le premier degré, on ne saurait user avec trop de circonspection de certains modes particuliers d'élimination, séduisans par leur brièveté, mais qui ont souvent le double inconvénient de faire évanouir des racines utiles à la question qu'on traite, et de les remplacer par d'autres qui lui sont absolument étrangères.

(*Note des rédacteurs.*)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 62 de ce volume ;

Par un ABONNÉ.
GERGONNE

POUR parvenir au but que je me propose d'atteindre, je vais d'abord établir quelques principes que, pour plus de briéveté, je me contenterai d'énoncer, d'autant que leur démonstration ne saurait souffrir de difficulté.

1. Dans tout tronc de pyramide, à bases parallèles ou non parallèles, le point d'intersection, soit de deux côtés, soit de deux diagonales, soit enfin d'un côté et d'une diagonale de l'une des bases, et le point déterminé par l'intersection des deux lignes correspondantes de l'autre base, sont deux points d'une droite qui passe par le sommet de la pyramide (*).

2. Il en est de même, en général, pour toute droite passant par des points qui, dans les deux bases, sont des intersections de lignes correspondantes.

3. Dans tout tronc de pyramide, à bases non parallèles, les points d'intersection, soit des côtés correspondans, soit des diagonales corres-

(*) On ne suppose pas, dans cette proposition et dans les suivantes, que les deux bases du tronc soient essentiellement des polygones convexes ; et on admet même que le sommet de la pyramide peut se trouver compris entre les plans de ces deux bases.

pondantes des deux bases, sont tous situés sur une même ligne droite, laquelle n'est autre chose que l'intersection des plans de ces deux bases.

4. En général, des droites qui, dans les deux bases, sont déterminées par des points correspondans, concourent à l'intersection des plans de ces deux bases.

5. De quelque manière que soit situé, par rapport à un plan, un système de droites originales concourant en un même point, et en quelque lieu qu'on suppose l'œil d'un spectateur, autre cependant que le point de concours de ces droites, leur perspective sur ce plan ne pourra être qu'un système de droites parallèles, ou un système de droites concourant en un même point, suivant que le point de concours des droites originales sera sur le plan conduit, parallèlement à celui du tableau, par l'œil du spectateur, ou qu'il sera hors de ce plan.

6. Réciproquement, tout système de droites, parallèles, ou concourant en un même point, tracées sur un même plan, peut être considéré comme la perspective d'un système de droites originales concourant en un même point; et il est même aisé de voir que cela peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes.

7. Les perspectives, sur un plan quelconque, des deux bases d'un tronc de pyramide, à bases parallèles ou non parallèles, sont deux polygones d'un même nombre de côtés, tels (1 et 2) que les droites qui joignent leurs points correspondans (5) sont parallèles ou concourent en un même point; en outre, si les côtés de ces polygones ne sont pas parallèles chacun à chacun, les intersections des lignes correspondantes de l'un et de l'autre se trouveront toutes (3 et 4) sur une même ligne droite.

8. Etant données l'une des bases et les grandeurs et directions de trois arêtes latérales d'un tronc de pyramide, ce tronc se trouve entièrement déterminé. Il faut seulement, pour que sa construction soit possible, que les trois arêtes latérales données concourent en un même point; ce point est alors le sommet de la pyramide; on connaît donc les directions de toutes les arêtes latérales; et, comme on connaît aussi

trois

trois points du plan de la base inconnue, ce plan est entièrement déterminé, et ses intersections avec les directions des arètes latérales déterminent les longueurs de ces arètes, et, en même temps, les sommets de tous les angles de la base inconnue.

9. Un tronc de pyramide étant donné, sa perspective (pour une situation donnée de l'œil et du tableau) est aussi donnée; donc (8) étant données, sur un plan, la perspective de l'une des bases d'un tronc de pyramide, et les perspectives de trois de ses arêtes latérales, la perspective du tronc se trouve entièrement déterminée, et il doit être possible d'en achever la construction. Voici de quelle manière on peut procéder pour y parvenir:

1.° Soient d, d', d'', ... les côtés du polygone, perspective de l'une des bases, que je désignerai par (S); soient δ, δ', δ'', ... les côtés du polygone, perspective de l'autre base, que je désignerai par (Σ); soient p, p', p'', ... les sommets des angles du polygone (S): p étant l'intersection de d et d', p' l'intersection de d' et d'', et ainsi de suite; soient, en outre, ϖ, ϖ', ϖ'', ... les sommets des angles du polygone (Σ): ϖ étant l'intersection de δ et δ', ϖ' celle de δ' et δ'', et ainsi de suite; soient, enfin, D, D$'$ et D$''$, ... les perspectives des arêtes latérales: D joignant p et ϖ, D$'$ joignant p' et ϖ', et ainsi de suite.

2.° On suppose que l'on donne le polygone (S); ce qui entraîne la connaissance des droites d, d', d'', ... et celle des points p, p', p'', ...; on suppose, en outre, que l'on donne les grandeurs et directions des droites D, D$'$, D$''$, ce qui entraîne la détermination des points ϖ, ϖ', ϖ'', et conséquemment celle des droites δ' et δ''; et il s'agit de déterminer tout le reste.

3.° D'abord, pour que le problème soit possible, il faut (5) que D, D$'$, D$''$ soient parallèles ou concourent en un même point; en supposant donc qu'il en soit ainsi, si, par les points p''', p'''', ..., on mène des droites parallèles à celles-là, ou concourant au même point qu'elles, il est clair que ces dernières indiqueront les directions de D$'''$, D$''''$, en sorte qu'il ne s'agira plus que d'assigner les points

ϖ''', ϖ'''', ... où elles doivent se terminer : attendu que la détermination de ces points entraînera celle des droites δ''', δ'''', ...

4.° Mais il est clair que tout se réduit à donner une méthode pour déterminer ϖ'''. En effet, ce point étant déterminé, on connaîtra toujours le polygone (S), on connaîtra de plus les grandeurs et direction de D′, D″ et D‴; on se trouvera donc, pour la détermination de ϖ'''', dans les mêmes circonstances où on s'était trouvé pour la détermination de ϖ'''; et par conséquent il suffira, pour obtenir ce point, de répéter le même procédé, lequel conduira, par une suite de semblables opérations, à la détermination des autres points inconnus, en quelque nombre qu'on les suppose. Voyons donc comment nous pourrons déterminer le point ϖ'''.

5.° Soient prolongées d' et d''' jusqu'à leur point de concours m', et soit conduit, par ce point m', une droite L′ parallèle à D, D′, D″, ..., ou concourant au même point qu'elles; cette droite L′ contiendra (7) le point μ' de concours des droites δ' et δ'''; en prolongeant donc δ', jusqu'à sa rencontre avec L′, on obtiendra le point μ'; et, comme ce point est sur δ''', dont on connaît déjà le point ϖ'', cette droite δ''' se trouvera déterminée; on pourra donc la construire, et son intersection avec D‴, dont la direction est déjà connue, déterminera le point cherché ϖ'''. L'inspection des figures 8 et 9 mettra cette construction dans tout son jour.

10. On voit que, pour chaque nouveau point, tel que ϖ''', qu'on veut déterminer, on est obligé d'avoir recours à un point auxiliaire, tel que μ'; de manière qu'après la construction achevée, on se trouvera avoir deux fois autant de points qu'on en cherchait; si donc m exprime le nombre des angles des polygones (S) et (Σ), comme trois des points de (Σ) sont donnés, on aura déterminé $2(m-3)$ ou $2m-6$ points de ce polygone, qui, joints aux trois points déjà donnés ou pris arbitrairement, feront en tout $2m-3$.

11. Ainsi, un polygone de m côtés étant donné ou construit arbitrairement sur un plan, il est toujours possible, 1.° de construire, sur ce plan, un autre polygone, aussi de m côtés, de manière qu'en

joignant deux à deux, par des droites, $2m-3$ points du premier avec leurs correspondans dans le second, ces droites soient parallèles ou concourent en un même point ; et, s'il en est ainsi, comme alors la figure qu'on aura construite sera la perspective d'un tronc de pyramide, il arrivera, de soi-même (7) ; 2.° que toutes les autres droites qui joindront des points correspondans des deux polygones, seront parallèles aux premières, ou concourront au même point qu'elle ; et qu'enfin 3.° les intersections des lignes correspondantes, dans les deux polygones, seront toutes situées sur une même ligne droite, si toutefois ces lignes ne sont pas parallèles ; mais on voit que, si seulement quelques-unes de ces lignes étaient parallèles entre elles, elles devraient l'être aussi à la droite qui contiendrait les intersections de toutes les autres deux à deux.

12. Si l'on fait actuellement attention qu'en général tout système de m droites qui se coupent deux à deux, sur un même plan, forme un polygone de m côtés, on reconnaîtra sans peine, dans les propositions qui viennent d'être énoncées, celles qui se trouvent à l'endroit déjà cité de ce recueil ; de manière que la démonstration de ces dernières se trouve renfermée dans ce qui précède.

13. La construction que j'ai indiquée (9) était la plus propre à conduire à la démonstration que j'avais principalement en vue ; mais, comme le problème auquel cette construction se rapporte se présente fréquemment dans le tracé des figures de géométrie, on ne sera pas fâché, je pense, d'en trouver ici une solution plus commode que, pour plus de clarté, j'appliquerai à un exemple particulier.

Soit ABCDE (fig. 10 et 11) la perspective donnée de l'une des bases, soit d'un tronc de pyramide, soit d'un tronc de prisme ; soient AA′, BB′, CC′, les perspectives, aussi données, de trois de ses arêtes latérales consécutives ; et proposons-nous d'achever la construction de la perspective de ce tronc.

Soient d'abord menées DD′ et EE′, parallèles à AA′, BB′, CC′, (fig. 10), ou concourant au même point qu'elles (fig. 11) ; soient ensuite prolongés BA et B′A′ jusqu'à leur point de concours A″, puis BC et B′C′ jusqu'à leur point de concours en C″; en menant A″C″, cette droite sera la perspective de l'intersection des plans des deux bases; menant donc et prolongeant les diagonales BD, BE, jusqu'à la rencontre de A″C″ en D″ et E″, si l'on mène ensuite B′D″ et B′E″, coupant DD′ et EE′ en D′ et E′, ces points D′ et E′ seront les sommets d'angles cherchés; de manière qu'en menant C′D′, D′E′ et E′A′, la construction sera terminée.

Au surplus, l'obligation où sont les côtés correspondans des deux polygones de concourir en un même point de A″C″ peut fournir, soit une autre construction, soit un moyen de vérifier celle-ci.

14. La construction serait peu différente si, au lieu des trois points A′, B′, C′, situés sur AA′, BB′, CC′, on en donnait trois autres situés sur les perspectives de trois droites quelconques, parallèles aux arêtes (fig. 10), ou concourant au sommet (fig. 11).

15. On pourrait aussi ne donner qu'un seul point de l'une ou de l'autre sorte, et remplacer les deux autres par la perspective A″C″ de l'intersection des plans des deux bases.

16. Les mêmes constructions peuvent aussi être appliquées à la résolution des deux problèmes suivans:

1.° *Etant données la perspective d'un cône ou d'un cylindre, droit ou oblique; celles de trois droites passant par le sommet du cône, ou parallèles à celle qui joint les centres des deux bases du cylindre; et enfin, celles de trois points situés sur ces droites; déterminer tant de points qu'on voudra de la perspective de la section du cône ou du cylindre par un plan passant par les trois points dont les perspectives sont données?*

2.° *Etant données la perspective d'un cône ou d'un cylindre, droit ou oblique; celle de l'intersection d'un plan qui le coupe avec le plan de sa base; celle d'une droite passant par le sommet du cône, ou parallèle à celle qui joint les centres des deux bases du cylindre; et enfin celle du point où le plan coupant rencontre cette dernière droite; déterminer tant de points qu'on voudra de la perspective de la section?*

La solution de ces problèmes, déduite des méthodes exposées ci-dessus, sera incomparablement plus courte et plus simple que celles que fournirait la *géométrie descriptive* proprement dite.

Théorèmes sur les triangles, relatifs à la page 64 de ces Annales;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

THÉORÈME. Dans tout triangle, le quarré de la distance des centres des cercles qui lui sont inscrits et circonscrits, est égal au rectangle du rayon du cercle circonscrit, par l'excès du même rayon sur le double de celui du cercle inscrit (*).

(*) Ce théorème a aussi été adressé, mais sans démonstration, aux Rédacteurs des *Annales*, par M Kramp, professeur doyen de la faculté des sciences à Strasbourg.

Le même théorème est connu des Rédacteurs depuis 1807, il leur fut communiqué, à cette époque, par feu M. Mahieu, professeur de mathématiques au collége d'Alais, qui le tenait de M. Maisonneuve, ingénieur des mines. Voici de quelle manière M. Maisonneuve y était parvenu.

En désignant par c, c', c'', les trois côtés du triangle, et par D la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit, on trouve, sans beaucoup de peine,

$$D=\sqrt{\frac{c^2c'^2c''^2}{(c+c'+c'')(c+c'-c'')(c'+c''-c)(c''+c-c')}-\frac{cc'c''}{c+c'+c''}};$$

mais on sait qu'en désignant par R le rayon du cercle circonscrit, par r celui de l'inscrit, et par T l'aire du triangle, on a ces trois expressions:

§. I.

LEMME. Dans tout triangle, la base est à la hauteur, comme le produit du sinus de l'angle au sommet par le sinus total est au produit des sinus des angles à la base.

$$16T^2=(c+c'+c'')(c+c'-c'')(c'+c''-c)(c''+c-c'),$$

$$2T=r(c+c'+c''),$$

$$4RT=cc'c'';$$

des deux dernières équations on tire d'abord;

$$\frac{cc'c''}{c+c'+c''}=2rR;$$

comparant ensuite le quarré de la troisième à la première, on aura:

$$\frac{c^2c'^2c''^2}{(c+c'+c'')(c+c'-c'')(c'+c''-c)(c''+c-c')}=R^2;$$

et partant:

$$D=\sqrt{R^2-2rR},$$

ou:

$$D^2=R(R-2r);$$

équation qui n'est que la traduction analitique du théorème de M. Lhuilier, et qui est aussi celle de M. Kramp.

Ces sortes de rencontres, qui n'ôtent rien au surplus au mérite personnel de chaque inventeur, ne sauraient être fort rares dans les sciences exactes, où l'on marche constamment dans la voie de la vérité; c'est ainsi que M. Mahieu, vers l'époque déjà indiquée, trouva le théorème suivant, auquel M. Lhuilier est aussi parvenu de son côté, (voyez ses *Élémens d'analise géométrique et d'analise algébrique*; Genève 1809, pag. 224):

« Si l'on désigne par r, r', r'', r''', les rayons des quatre cercles qui peuvent » toucher à la fois les trois côtés d'un même triangle, considérés comme des droites » indéfinies, et par T l'aire de ce triangle, on aura $T=\sqrt{rr'r''r'''}$. »

(*Note des éditeurs.*)

Soit ABC un triangle dont AB est la base, et dont CQ est la hauteur (fig. 12). J'affirme que $AB : CQ = 1 \times \text{Sin.}C : \text{Sin.}A.\text{Sin.}B.$

Démonstration.

$$AB : AC = \text{Sin.}C : \text{Sin.}B,$$

$$AC : CQ = 1 \quad . \ \text{Sin.}A;$$

donc
$$AB : CQ = \text{Sin.}C : \text{Sin.}A.\text{Sin.}B.$$

COROLLAIRE. Dans tout triangle, un des côtés est au rayon du cercle inscrit, comme le produit du sinus total par le cosinus de la moitié de l'angle opposé à ce côté est au produit des sinus des demi-angles qui lui sont adjacens.

En effet, le triangle qui, ayant son sommet au centre du cercle inscrit, a pour base le côté dont il s'agit, a sa hauteur égale au rayon de ce cercle; de plus, ses angles, à la base, sont moitié des angles correspondans du premier triangle; enfin, son angle, au sommet, est le supplément du complément de la moitié de l'angle au sommet du même triangle.

§. II.

LEMME CONNU. Dans tout triangle, le rayon du cercle circonscrit est à l'un des côtés, comme le sinus total est au double du sinus de l'angle opposé à ce côté.

§. III.

LEMME. Dans tout triangle, le rayon du cercle circonscrit est au rayon du cercle inscrit, comme le cube du sinus total est à quatre fois le produit continuel des sinus des demi-angles du triangle.

Soit ABC un triangle; que les rayons des cercles, dont l'un lui est circonscrit et dont l'autre lui est inscrit, soient désignés par *R* et r respectivement; j'affirme que $R : r = 1^3 : 4\text{Sin.}\frac{1}{2}A.\text{Sin.}\frac{1}{2}B.\text{Sin.}\frac{1}{2}C.$

Démonstration.

$$AB : r = 1 \times \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C : \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B., \quad (\S.\text{ I. Coroll.})$$

$$R : AB = 1 : 2\text{Sin.}C \quad ; (\S.\text{ II.})$$

donc,
$$R : r = 1^2 \times \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C : 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B.\text{Sin. } C,$$
$$= 1^3 : 4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.$$

SCHOLIE. Quatre fois le produit continuel du sinus des demi-angles d'un triangle, est égal au produit du quarré du sinus total par l'excès de la somme des cosinus des angles de ce triangle sur ce sinus total.

En effet, $\text{Cos.}A + \text{Cos.}B + \text{Cos.}C - 1 = \text{Cos.}A + \text{Cos.}B - 2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C$

$$= 2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B) - 2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C$$
$$= 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C \left\{ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B) - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C \right\}$$
$$= 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C \left\{ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B) - \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B) \right\}$$
$$= 4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.$$

On peut aussi exprimer ce produit continuel dans les côtés du triangle.

En effet,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(AB-AC+BC) \times \frac{1}{2}(-AB+AC+BC)}{BA \times AC}}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(AB-BC+AC) \times \frac{1}{2}(-AB+BC+AC)}{AB \times BC}}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(AC-BC+AB) \times \frac{1}{2}(-AC+BC+AB)}{AC \times CB}}$$

donc,

donc,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{A.Sin.}\tfrac{1}{2}\text{B.Sin.}\tfrac{1}{2}\text{C}=\frac{\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}-\text{CA})\times\frac{1}{2}(\text{AB}-\text{BC}+\text{CA})\times\frac{1}{2}(-\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})}{\text{AB}\times\text{BC}\times\text{CA}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}-\text{CA})\times\frac{1}{2}(\text{AB}-\text{BC}+\text{CA})\times\frac{1}{2}(-\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})}{\text{AB}\times\text{BC}\times\text{CA}\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})}$$

$$=\frac{\overline{\text{ABC}}^2}{\text{AB}\times\text{BC}\times\text{CA}\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})}$$

§. IV.

THÉORÈME. Le quarré de la distance des centres de deux cercles, dont l'un est circonscrit à un triangle, et dont l'autre lui est inscrit, est égal au rectangle du rayon du cercle circonscrit par l'excès de ce rayon sur le double de celui du cercle inscrit.

Soit ABC un triangle; soient Z et z les centres de deux cercles, dont l'un est circonscrit au triangle, et dont l'autre lui est inscrit; que les rayons de ces cercles soient R et r; j'affirme que $\overline{\text{Z}z}^2=R(R-2r)$.

Démonstration. Soient ZP et zp, perpendiculaires à l'un des côtés, tels que AB.

$$\overline{\text{Z}z}^2=(\text{ZP}-\text{zp})^2+(\text{Ap}-\text{AP})^2$$

$$=\overline{\text{AZ}}^2-2\text{ZP}\times\text{zp}-2\text{Ap}\times\text{AP}+\overline{\text{zp}}^2+\overline{\text{Ap}}^2$$

$$=RR-2Rr\,\text{Cos.C}-\text{Ap}\times\text{AB}+\overline{\text{Ap}}^2+rr\ \ (*)$$

$$=RR-2Rr+4Rr\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\text{C}-\text{Ap}\times\text{Bp}+rr\ \ (**)$$

(*) A cause de $2\text{AP}=\text{AB}$ et de $\text{ZP}=\text{AZ Cos. AZP}=R$ Cos.C.

(**) A cause de $\text{Cos. C}=1-2\ \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\text{C}$.

(*Notes des éditeurs.*)

$$=R(R-2r)+4Rr\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-rr(\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}B-1)\quad(*)$$

$$=R(R-2r)+4Rr\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-rr\times\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B}$$

$$=R(R-2r)+4Rr\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-rr\times\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B}$$

$$=R(R-2r)+r\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\left(4R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C-r\times\frac{1}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B}\right)$$

$$=R(R-2r)+\frac{r\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B}(4R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C-r)$$

$$=R(R-2r)\qquad\qquad(\S.\ \text{III.})$$

§. V.

Corollaire. L'équation $\overline{Zz}^2=R(R-2r)$ détermine la relation qui règne entre les distances des centres et les rayons de deux cercles, dont l'un est circonscrit à un triangle, et dont l'autre lui est inscrit; de manière que deux de ces quantités étant données, la troisième est déterminée.

Ainsi, $$(R-r)^2=\overline{Zz}^2+rr$$

et $$2r=\frac{RR-\overline{Zz}^2}{R}\qquad\text{ou}\qquad R:R+Zz=R-Zz:2r$$

Savoir: le quarré de la différence des rayons des deux cercles est égal à la somme des quarrés de la distance des centres et du rayon du cercle inscrit.

Le rayon du cercle circonscrit est à la somme de ce rayon et de

(*) A cause de $Ap=zp.\text{Cot. }zAp=r.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A$, et de $Bp=zp.\text{Cot. }zBp=r.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}B$.
(*Note des éditeurs.*)

la distance des centres, comme la différence de ce rayon et de cette distance est au double du rayon du cercle inscrit.

§. VI.

La relation entre la distance des centres de deux cercles et les rayons R et r de ces cercles, étant telle qu'il vient d'être dit; si on circonscrit au cercle dont le rayon est r un triangle dont un des côtés soit une corde de l'autre cercle, ce triangle sera inscrit à ce dernier cercle; et reciproquement, si l'on inscrit au cercle dont le rayon est R un triangle dont un des côtés soit tangent à l'autre cercle, ce triangle sera circonscrit à ce dernier cercle.

Il y a donc un nombre illimité de triangles qui peuvent être à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre cercle, lorsque les rayons de ces cercles et la distance de leurs centres sont liés par l'équation $\overline{Zz}^2 = R(R-2r)$.

Pour que cette inscription et cette circonscription simultanées soient possibles, on doit avoir $R \overline{\overline{>}} 2r$. Lorsque $R=2r$, alors $Zz=0$; les deux cercles sont concentriques; les triangles sont équilatéraux, et ils diffèrent entre eux seulement par la position de leurs côtés.

Lorsque l'inscription et la circonscription simultanées sont possibles, pour que le problème soit déterminé, on doit ajouter, sur le triangle à construire, quelque autre condition indépendante de l'équation $\overline{Zz}^2 = R(R-2r)$.

Exemple. Que l'on donne un angle du triangle cherché, tel que l'angle C. Le cercle dont le rayon est R fait connaître le côté AB, opposé à cet angle, par l'équation $AB = 2R\,\text{Sin.}\,C$. Dans le triangle ABC, dont on connaît l'angle C, on connaît aussi la somme des angles A et B; de plus, dans la proportion $AB : r = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C : \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B$, on connaît le quatrième terme, savoir, le produit des sinus des demi-angles dont la somme est donnée; mais, $2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B =$

$\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)-\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)$; donc, on connaît le cosinus de la demi-différence des angles A et B ; et partant on connaît aussi la demi-différence de ces angles, et on les connaît l'un et l'autre.

On a,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)+\frac{2r}{AB}\cdot\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C+\frac{r}{2R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}.$$

Comme la plus grande valeur de $\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)$ est l'unité, on doit avoir :

$$1 \overset{=}{>} \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C+\frac{r}{2R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C};$$

d'où

$$r \overset{=}{<} 2R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\,(1-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C),$$

ou encore

$$r \overset{=}{<} 4R\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.\text{Sin.}^2(45^\circ-\tfrac{1}{4}C).$$

dans le cas de la limite, le triangle est isocèle.

§. VII.

Ce qui vient d'être développé, sur le cercle circonscrit et sur le cercle *inscrit* à un triangle, peut être appliqué, avec de légers changemens, au cercle circonscrit et à l'un des trois cercles *exinscrits* à ce même triangle, savoir : à un cercle qui touche un des côtés du triangle extérieurement, et les prolongemens des deux autres côtés (Voyez mes *Élémens d'analyse*, etc, §. 131.).

Comme le rayon du cercle exinscrit à un triangle, dans l'un de ses angles, a, relativement au côté qu'il touche extérieurement, une direction opposée à celle du rayon du cercle inscrit ; dans la formule $\overline{Zz}^2=R(R-2r)$, on doit changer le signe de r, ce qui donne l'équation $\overline{Zz}^2 = R(R+2r)$, savoir : le quarré de la distance des centres de deux cercles dont l'un est circonscrit à un triangle, et dont l'autre lui est exinscrit, est égal au rectangle du rayon du cercle circonscrit par la somme de ce rayon, et du double du rayon du cercle exinscrit.

On peut parvenir à cette équation immédiatement, sans partir de la doctrine des quantités négatives, et de la correspondance qui a lieu entre les changemens de direction et le changement des signes, en procédant comme il suit :

1.° Dans tout triangle, la base est au rayon du cercle exinscrit, relatif à cette base, comme le produit du sinus total par le cosinus du demi-angle opposé à la base, est au produit du cosinus des demi-angles à la base.

2.° Dans tout triangle, le rayon du cercle circonscrit est au rayon de l'un des cercles exinscrits, comme le cube du sinus total est à quatre fois le produit continuel des cosinus des demi-angles à la base, et du sinus du demi-angle qui lui est opposé.

Scholie. $4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{A}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{B}.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{C} = \text{Cos.A} + \text{Cos.B} - \text{Cos.C} + 1$

$$= 4 \times \frac{\overline{\text{ABC}}^2}{\text{AB}\times\text{BC}\times\text{CA}\times\frac{1}{2}(-\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})}$$

THÉORÈME. *Le quarré de la distance des centres de deux cercles dont l'un est circonscrit à ce triangle, et dont l'autre lui est exinscrit, est égal au rectangle du rayon du cercle circonscrit par la somme de ce rayon et du double de celui du cercle exinscrit.*

Soit ABC un triangle ; soit Z le centre du cercle circonscrit, et R son rayon ; soit z′ le centre d'un cercle exinscrit à ce triangle, dans l'angle C ; et soit r' son rayon : j'affirme que $\overline{Zz'}^2 = R(R+2r')$.

Démonstration. Soit z′p′ perpendiculaire à AB.

$$\overline{Zz'}^2 = (\text{ZP}+\text{z}'\text{p}')^2 + (\text{AP}-\text{Ap}')$$

$$=RR+2ZP\times z'p'-2AP\times Ap'+\overline{Ap'}^2+\overline{z'p'}^2$$
$$=RR+2Rr'\text{Cos.}C-Ap'\times P'B+r'r'$$
$$=R(R+2r')-2Rr'(1-\text{Cos.}C)-r'r'\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B+r'r'$$
$$=R(R+2r')-4Rr'\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+r'r'(1-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B)$$
$$=R(R+2r')-4Rr'\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+r'r'\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B}$$
$$=R(R+2r')-4Rr'\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+r'r'\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B}$$
$$=R(R+2r')-\frac{r'\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B}\left\{4R\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C-r'\right\}$$
$$=R(R+2r').\quad (*)\qquad\qquad (\S.\ \text{VII},\ 2.^{\circ})$$

(*) De toute cette analise dérive naturellement la démonstration des deux *Porismes* énoncés à la page 64 de ce volume.

En reprenant, en effet, les symboles employés dans la première note, de l'équation :

$$D^2=R^2-2Rr,$$

on tirera successivement :

$$1.^{\circ}\ r=\frac{R^2-D^2}{2R};\qquad 2.^{\circ}\ R=r\pm\sqrt{r^2+D^2}.$$

Or, la valeur unique de r, donnée par la première formule, étant toujours possible, tant que R n'est pas nul, et étant de plus positive, lorsqu'on a $R>D$, on en peut conclure, 1.° *qu'un point étant donné arbitrairement, dans l'intérieur d'un cercle dont le rayon est* R, *et à une distance* D *de son centre ; il y a toujours une longueur, et une seule longueur* r, *laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle, ayant son centre au point donné ; il arrivera qu'un même triangle pourra être à la fois inscrit au premier des deux cercles et circonscrit au second.*

Quant à la seconde formule, bien qu'elle donne pour R deux valeurs essentiellement réelles, l'une positive et l'autre négative, et cela indépendamment du rap-

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

Un cercle étant donné, le partager, par un nombre limité d'opérations faites avec la règle et le compas seulement, en un nombre donné quelconque de parties, égales à la fois en surface et en contour.

Autre problème.

Concevons qu'après avoir divisé tous les côtés d'un polygone quelconque en m parties égales, on prenne sur les deux côtés de chacun de ses angles, et à partir de son sommet, n de ces parties, n étant $<\frac{1}{2}m$.

Si l'on coupe les angles du polygone par des droites qui passent par les points déterminés de cette manière sur chacun de leurs côtés, on transformera ce polygone en un autre d'un nombre de côtés double.

On pourra opérer sur ce nouveau polygone de la même manière qu'il vient d'être dit pour le premier; et, si l'on poursuit continuel-

---

port de grandeur entre r et D; comme néanmoins le changement du signe de r ne fait simplement que changer les signes de ces valeurs, sans en changer la grandeur absolue, on en doit conclure que l'une d'elles, savoir, $r-\sqrt{r^2+D^2}$, est relative au cercle que M. Lhuilier appelle exinscrit, et que par conséquent la valeur de R, relative au cercle *inscrit*, est *unique*, comme celle de r dans la première formule. Ainsi, 2.° *un point étant donné arbitrairement, sur le plan d'un cercle dont le rayon est* r, *et à une distance quelconque* D *de son centre, il y a toujours une longueur, et une seule longueur* R, *laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle, ayant son centre au point donné, il arrivera qu'un même triangle pourra être, à la fois, circonscrit au premier des deux cercles et inscrit au second.*

(*Note des éditeurs.*)

lement ainsi, on formera une suite de polygones, tels que le nombre des côtés de chacun sera constamment double du nombre de ceux du précédent, dont celui-ci fera nécessairement partie, si le polygone donné est convexe.

On conçoit, enfin, que tous ces polygones seront circonscrits à une même courbe fermée, qui pourra être considérée comme leur limite commune.

En supposant donc que le polygone primitif soit donné, ainsi que les nombres m et n, on propose de déterminer la nature de cette courbe ?

Problème d'analise.

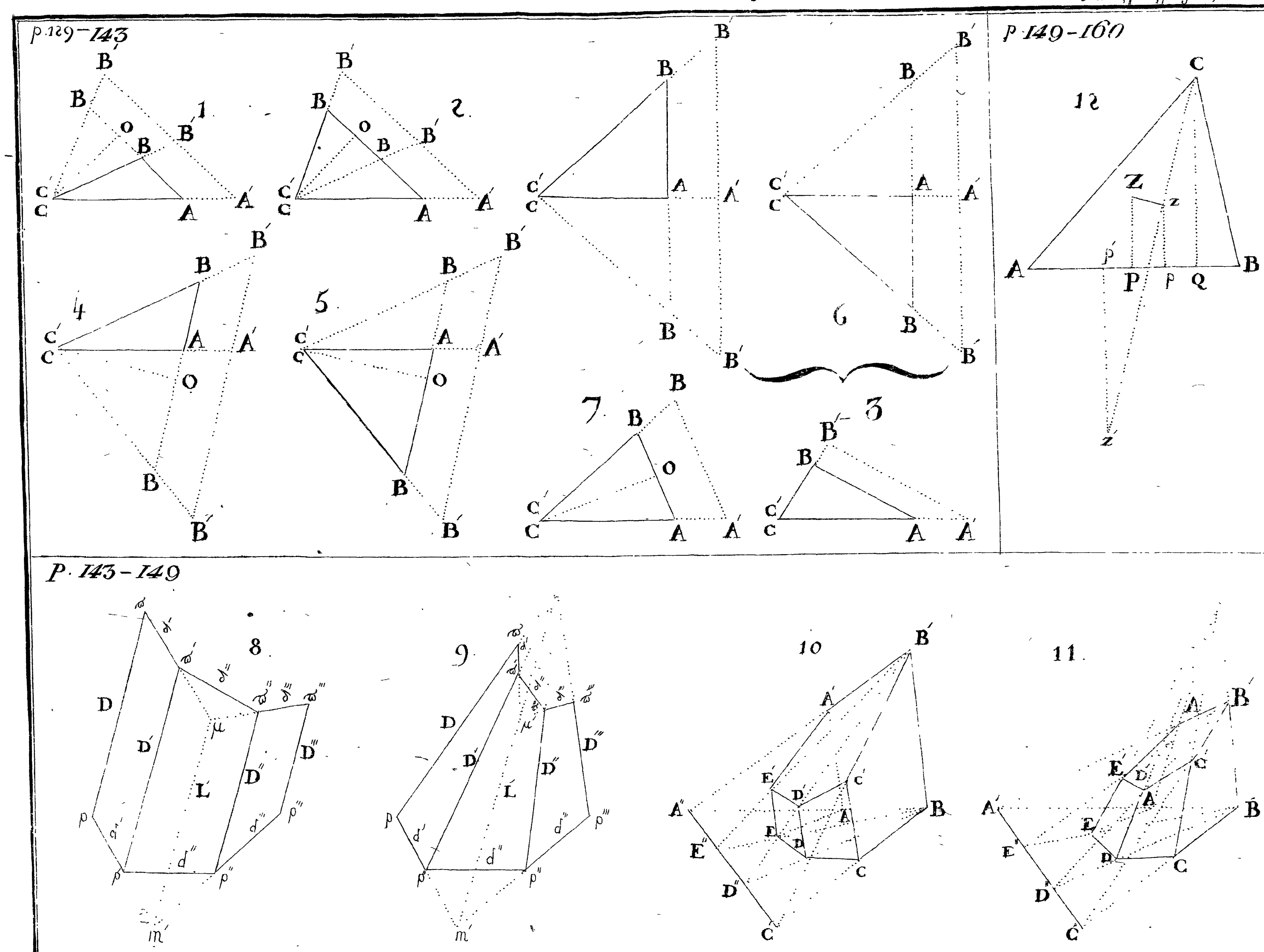
Tous ceux qui ont écrit sur le calcul différentiel se sont occupés, avec plus ou moins de détails, du changement de la variable indépendante, dans les fonctions différentielles où cette variable est unique, et ont donné des règles pour effectuer ce changement.

Mais, dans les traités même les plus étendus, on ne trouve absolument rien de relatif au changement des variables indépendantes, dans les fonctions différentielles de plusieurs variables : changement qui pourtant peut être souvent utile, soit pour simplifier les formules, soit pour faciliter leur intégration, soit enfin pour rendre possible, par la différentiation des équations, l'élimination de certaines variables qu'on aurait d'abord considérées comme indépendantes.

Afin donc que cette omission se trouve réparée, autant du moins que peuvent l'exiger les besoins les plus ordinaires de la géométrie et de l'analise ; on propose d'indiquer ce qu'il faut substituer, dans les formules, à la place des cinq coefficiens différentiels,

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy},$$

lorsqu'on passe de l'hypothèse où z est fonction de x et de y, à celle dans laquelle x, y, z, sont, toutes trois, fonctions des deux nouvelles variables indépendantes t et u ?



J. D. G. fecit.

ASTRONOMIE.

Sur le quadrilatère sphérique bi-rectangle ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Le théorème de trigonométrie sphérique, dont les applications nombreuses à l'astronomie seront enseignées dans ce mémoire, peut être énoncé ainsi qu'il suit : *Tout quadrilatère sphérique bi-rectangle est immédiatement réductible au triangle sphérique obliquangle.*

2. Le quadrilatère sphérique peut être bi-rectangle de deux manières. Dans *la première*, les deux angles droits A et B (fig. 1), du quadrilatère ABDE, sont adjacens au même côté AB. Alors, prolongeant les côtés AD et BE jusqu'au point C, qui sera le pôle de l'arc AB, on aura :

Le côté AB, égal à l'angle C ;

Le côté AD, égal au complément du côté CD ;

Le côté BE, égal au complément du côté CE ;

Le côté DE, commun au quadrilatère ABDE et au triangle CDE ;

L'angle ADE, supplément de l'angle CDE ;

L'angle BED, supplément de l'angle CED.

Ainsi, le quadrilatère ABDE sera entièrement réduit au triangle sphérique CDE, et toutes les formules démontrées pour le triangle seront immédiatement applicables à ce quadrilatère.

3. Dans *la seconde*, les deux angles droits A et L (fig. 2), du quadrilatère sphérique EASL, sont diagonalement opposés l'un à l'autre. Ce quadrilatère se rencontre fréquemment en astronomie. Un des cas les plus communs est celui où le côté EA désigne l'équateur, le côté EL l'écliptique, et S une étoile quelconque. On aura alors.

L'angle E = à l'obliquité de l'écliptique;

L'angle PSL = à l'angle de position;

Le côté AE = à l'ascension droite;

Le côté AS = à la déclinaison;

Le côté EL = à la longitude;

Le côté SL = à la latitude (*).

(*) Outre les deux quadrilatères qui viennent d'être considérés par l'auteur, on peut encore, comme l'a fait M. Carnot, relativement aux figures planes rectilignes, considérer les quadrilatères des figures 3 et 4, dans lesquels deux côtés opposés se coupent, et où, pour mieux faire saisir leur analogie avec les premiers, nous avons désigné les points correspondans à ceux des figures 1 et 2 par les mêmes lettres. La théorie de ces quadrilatères ne différant pas essentiellement de celle des quadrilatères dont s'occupe M. Kramp dans son mémoire, nous croyons suffisant de les faire remarquer. Nous observerons seulement, 1.° que le quadrilatère de la figure 4 est celui qu'il faut employer, toutes les fois que l'étoile n'est point comprise entre l'écliptique et l'équateur; 2.° que les quadrilatères des figures 1 et 3 peuvent, entre autres usages, servir à résoudre ces deux questions générales, dont chacune en contient quatre particulières:

1.° *De ces quatre choses: les déclinaisons, la différence des ascensions droites, et la distance angulaire de deux étoiles, trois quelconques étant connues, déterminer la quatrième?*

2.° *De ces quatre choses: les latitudes, la différence des longitudes de deux*

4. Pour fixer les idees, nous allons considérer le quadrilatère sphérique bi-rectangle sous ce dernier point de vue. Mais, pour abréger, nous désignerons :

Par E .... l'obliquité de l'écliptique, ou l'angle AEL;

Par S .... l'angle de position, ou l'angle PSL;

Par A .... l'ascension droite de l'astre, ou l'arc AE;

Par A' .... la déclinaison de l'astre, ou l'arc AS;

Par L .... la longitude de l'astre, ou l'arc EL;

Par L' .... la latitude de l'astre, ou l'arc SL.

5. Prolongeons le côté AS jusqu'en P, pôle de l'arc AE; prolongeons de même l'arc SL jusqu'en Q, pôle de l'arc EL; et menons les arcs de grands cercles EP, EQ, PQ : les quatre arcs AP, EP, LQ, EQ, seront ainsi des quarts de circonférence; et l'arc PQ sera la mesure de l'angle PEQ, égal à l'angle AEL. On aura, par conséquent, dans le triangle SPQ,

Le côté $SP=90^{\circ}-A'$;

Le côté $SQ=90^{\circ}+L'$;

Le côté $PQ=E$;

étoiles, et leur distance angulaire, trois quelconques étant connues, déterminer la quatrième?

On peut, au surplus, à ces deux questions, substituer la suivante, plus générale, qui en comprend *vingt et une* particulières, et peut fournir *quarante-deux* formules :

De ces sept choses : les déclinaisons, les latitudes, la différence des ascensions droites, celle des longitudes, et la distance angulaire de deux étoiles, cinq quelconques étant connues, déterminer les deux autres?

(*Note des éditeurs.*)

L'angle $PSQ=S$;

L'angle $SPQ=90^\circ+A$;

L'angle $SQP=90^\circ-L$.

Ainsi, le triangle SPQ sera entièrement représentatif du quadrilatère bi-rectangle AESL; tous les angles et côtés de l'un se retrouveront dans les angles et côtés de l'autre.

6. Appliquant d'abord au triangle SPQ le théorème par lequel, dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels à ceux des côtés opposés, on aura les trois proportions qui suivent:

$$(1).\quad \text{Cos.}\,A' : \text{Cos.}\,L = \text{Sin.}\,E : \text{Sin.}\,S;$$

$$(2).\quad \text{Cos.}\,L' : \text{Cos.}\,A = \text{Sin.}\,E : \text{Sin.}\,S;$$

$$(3).\quad \text{Cos.}\,A : \text{Cos.}\,L = \text{Cos.}\,L' : \text{Cos.}\,A'.$$

La dernière proportion se tire immédiatement des deux triangles EAS et ELS, rectangles en A et L; ils fournissent:

$$\text{Cos.}\,ES = \text{Cos.}\,EA.\,\text{Cos.}\,AS;$$

$$\text{Cos.}\,ES = \text{Cos.}\,EL.\,\text{Cos.}\,LS.$$

d'où l'on tire:

$$\text{Cos.}\,A.\,\text{Cos.}\,A' = \text{Cos.}\,L.\,\text{Cos.}\,L'.$$

7. Appliquant à ce même triangle SPQ le théorème en vertu duquel on passe des trois côtés, supposés donnés, aux trois angles du triangle, on aura les trois équations qui suivent:

$$(4).\quad \text{Cos.}\,S = \frac{\text{Cos.}\,E + \text{Sin.}\,A'.\,\text{Sin.}\,L'}{\text{Cos.}\,A'.\,\text{Cos.}\,L'};$$

$$(5).\quad \text{Sin.}\,L = \frac{\text{Sin.}\,A' + \text{Cos.}\,E.\,\text{Sin.}\,L'}{\text{Sin.}\,E.\,\text{Cos.}\,L'};$$

$$(6).\quad \text{Sin.}\,A = \frac{\text{Sin.}\,L' + \text{Cos.}\,E.\,\text{Sin.}\,A'}{\text{Sin.}\,E.\,\text{Cos.}\,A'}\,.$$

Ces trois formules renferment la solution du problème qui suit : *Connaissant la déclinaison et la latitude d'un astre, trouver sa longitude, son ascension droite et son angle de position ?*

8. De ces trois formules, on tire de plus :

$$(7).\quad \text{Cos.}E = \text{Cos.}S.\,\text{Cos.}A'.\,\text{Cos.}L' - \text{Sin.}A'.\,\text{Sin.}L'\ ;$$

$$(8).\quad \text{Sin.}A' = \text{Sin.}E.\,\text{Sin.}L.\ \text{Cos.}L' - \text{Cos.}E.\ \text{Sin.}L'\ ;$$

$$(9).\quad \text{Sin.}L' = \text{Sin.}E.\,\text{Sin.}A.\ \text{Cos.}A' - \text{Cos.}E.\ \text{Sin.}A'\ .$$

Au moyen de la seconde, on déduit la déclinaison de la longitude et de la latitude ; et la troisième fait connaître la latitude, lorsque l'ascension droite et la déclinaison sont données.

9. On connaît de même les formules moyennant lesquelles on trouve les côtés d'un triangle sphérique dont on connaît les angles. En les appliquant de même au triangle SPQ, on rencontre les expressions littérales qui suivent :

$$(10).\quad \text{Cos.}E = \frac{\text{Cos.}S - \text{Sin.}A.\text{Sin.}L}{\text{Cos.}A.\ \text{Cos.}L.}\ ;$$

$$(11).\quad \text{Sin.}A' = \frac{\text{Sin.}L - \text{Sin.}A.\text{Cos.}S}{\text{Cos.}A.\text{Sin.}S}\ ;$$

$$(12).\quad \text{Sin.}L' = \frac{\text{Sin.}A - \text{Cos.}S.\text{Sin.}L}{\text{Sin.}S.\text{Cos.}L}\ .$$

Elles renferment la solution du problème : *Connaissant la longitude, l'ascension droite d'un astre, et son angle de position, trouver sa latitude et sa déclinaison.*

10. De ces trois formules, on tire encore celles qui suivent :

$$(13).\quad \text{Cos.}S = \text{Cos.}E.\ \text{Cos.}A.\text{Cos.}L + \text{Sin.}A.\text{Sin.}L\ ;$$

$$(14).\quad \text{Sin.L} = \text{Sin.A}'.\text{Cos.A}.\,\text{Sin.S} + \text{Sin.A}.\text{Cos.S}\ ;$$

$$(15).\quad \text{Sin.A} = \text{Sin.L}'.\text{Sin.S}.\text{Cos.L} + \text{Cos.S}.\,\text{Sin.L}\ .$$

La première est remarquable : elle apprend à trouver l'angle de position, lorsqu'on connait la longitude et l'ascension droite.

11. Appliquons de même au triangle SPQ les formules qui font trouver deux angles d'un triangle spherique dont on connaît le troisième et les deux côtes qui le comprennent ; on parvient à la solution des problèmes qui suivent.

En regardant comme donnés les deux côtés SP et PQ, et l'angle compris SPQ, on aura :

$$(16).\quad \text{Tang.L} = \frac{\text{Tang.A}'.\text{Sin.E} + \text{Sin.A}.\text{Cos.E}}{\text{Cos.A}}\ ;$$

$$(17).\quad \text{Cot.S} = \frac{\text{Cos.A}'.\,\text{Cot.E} + \text{Sin.A}.\,\text{Sin.A}'}{\text{Cos.A}}\ .$$

Ainsi, connaissant, outre l'obliquité de l'écliptique, l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, on trouvera, par ces formules, sa longitude et son angle de position.

En supposant donnés les deux côtés PQ et SQ, et l'angle compris PQS, on aura :

$$(18).\quad \text{Cot.S} = \frac{\text{Cot.E}.\,\text{Cos.L}' + \text{Sin.L}.\,\text{Sin.L}'}{\text{Cos.L}}\ ;$$

$$(19).\quad \text{Tang.A} = \frac{\text{Sin.E}.\text{Tang.L}' + \text{Sin.L}.\,\text{Cos.E}}{\text{Cos.L}}\ .$$

Ainsi, connaissant, outre l'obliquité, la longitude et la latitude d'un astre, on trouvera, par ces formules, son ascension droite et son angle de position.

Considérant enfin comme donnés les deux côtés PS et QS, et l'angle compris PSQ, on aura :

$$(20).\quad \text{Tang.L}=\frac{\text{Tang A}'.\ \text{Cos.L}'+\text{Cos.S. Sin L}'}{\text{Sin.S}}\ ;$$

$$(21).\quad \text{Tang.A}=\frac{\text{Tang.L}'.\ \text{Cos.A}'+\text{Cos.S. Sin.A}'}{\text{Sin.S}}\ .$$

12. Appliquant aussi au triangle SPQ les formules qui apprennent à trouver deux côtés d'un triangle sphérique, dont on connaît le troisième côté et les deux angles adjacens ; on parviendra à la solution des problèmes qui suivent.

En regardant comme donnés le côté SQ avec les angles adjacens PSQ et PQS, on aura :

$$(22).\quad \text{Cot.E}=\frac{\text{Cot.S. Cos.L}-\text{Sin.L. Sin.L}'}{\text{Cos.L}'}\ ;$$

$$(23).\quad \text{Tang.A}'=\frac{\text{Tang.L. Sin.S}-\text{Cos.S. Sin.L}'}{\text{Cos.L}'}.$$

En supposant donnés le côté PS avec les angles adjacens PSQ et SPQ, on aura :

$$(24).\quad \text{Cot.E}=\frac{\text{Cot.S. Cos.A}-\text{Sin.A. Sin.A}'}{\text{Cos.A}'}\ ;$$

$$(25).\quad \text{Tang.L}'=\frac{\text{Tang.A. Sin.S}-\text{Cos.S. Sin.A}'}{\text{Cos.A}'}\ .$$

Considérant enfin comme donnés le côté PQ avec les deux angles adjacens PQS et QPS, on trouvera :

$$(26).\quad \text{Tang.A}'=\frac{\text{Tang.L. Cos.A}-\text{Sin.A. Cos.E}}{\text{Sin.E}}\ ;$$

$$(27).\quad \text{Tang.L}'=\frac{\text{Tang.A. Cos.L}-\text{Sin.L. Cos.E}}{\text{Sin.E}}\ .$$

Elles nous apprennent à trouver la latitude et la déclinaison d'un astre dont on connaît la longitude et l'ascension droite.

13. Les problèmes dont nous venons de donner la solution sont au nombre de *trente-six*. Nous allons en donner l'aperçu dans la table qui suit. Nous rappellerons encore que nous désignons

Par E ,.... l'obliquité de l'écliptique ;

Par A ,.... l'ascension droite ;

Par A′,.... la déclinaison ;

Par L ,.... la longitude ;

Par L′,.... la latitude ;

Par S ,.... l'angle de position.

Dans les *quatorze* premiers de ces problèmes, l'obliquité de l'écliptique est au nombre des quantités données, et l'angle de position n'en est point ; savoir :

Data.	*Quæsita.*
E, A, A′, ...	L. (16).
E, A, A′, ...	L′. (9).
E, A, A′, ...	S. (17).
E, L, L′, ...	A. (19).
E, L, L′, ...	A′. (8).
E, L, L′, ...	S. (18).
E, A, L, ...	A′. (26).
E, A, L, ...	L′. (27).
E, A, L, ...	S. (13).

E,

Data.	*Quæsita.*
E, A′, L′, ...	A. (6).
E, A′, L′, ...	L. (5).
E, A′, L′, ...	S. (4).
E, A, L′, ...	S. (2).
E, A′, L, ...	S. (1).

Quatre autres problèmes sont compris dans la proportion (3), en vertu de laquelle le produit des cosinus de l'ascension droite et de la déclinaison est égal à celui des cosinus de la longitude et de la latitude; il en résulte que, connaissant trois de ces quatre quantités, on peut toujours trouver la quatrième par une simple règle de trois.

Dans les *quatre* problèmes qui suivent, on suppose qu'outre l'obliquité de l'écliptique et l'angle de position, on connaît l'une des quatre quantités A, A′, L, L′. On en trouve la solution par l'une ou l'autre des proportions (1) et (2).

Enfin, dans les *quatorze* derniers, l'angle de position est au nombre des quantités données, tandis que l'obliquité de l'écliptique n'en est pas, savoir :

Data.	*Quæsita.*
S, A, A′, ...	L. (14).
S, A, A′, ...	L′. (25).
S, A, A′, ...	E. (24).
S, L, L′, ...	A. (15).
S, L, L′, ...	A′. (23).
S, L, L′, ...	E. (22).

Data.	*Quæsita.*
S, A, L, ...	A′. (11).
S, A, L, ...	L′. (12).
S, A, L, ...	E. (10).
S, A′, L′, ...	A. (21).
S, A′, L′, ...	L. (20).
S, A′, L′, ...	E. (7).
S, A, L′, ...	E. (2).
S, A′, L, ...	E. (1).

14. Le but de ce mémoire est de faire voir comment, par des formules faciles et simples, on peut toujours déterminer trois des six quantités E, A, A′, L, L′, S, lorsqu'on connaît les trois autres; et que la solution de toutes les questions qui s'y rapportent, ne suppose, dans tous les cas, que la simple connaissance du triangle sphérique.

STATIQUE.

Recherches nouvelles sur les conditions d'équilibre, dans un système libre, de forme invariable;

Par M. GERGONNE.

J'AI donné, au commencement de ce volume (*), une méthode par laquelle on parvient directement aux conditions de l'équilibre, entre des puissances dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et appliquées à des points invariablement liés entre eux.

Cette méthode consiste à introduire, dans le système, des puissances arbitraires, mais telles néanmoins que, soit en les composant entre elles, soit en les combinant avec celles du système primitif, on soit également conduit à une *résultante effective* (**). On conçoit en effet que, pour parvenir aux conditions cherchées, il n'est plus alors question que d'exprimer que la résultante du système modifié est identiquement la même que celle des puissances arbitrairement introduites.

Pour assujettir ces puissances arbitraires à la double condition d'avoir à elles seules une résultante effective, et d'en fournir une aussi

(*) Page 4 et suivantes.

(**) J'emploie ici cette expression pour désigner une résultante qui n'est pas appliquée à une distance infinie.

par leur combinaison avec les puissances primitives du système, je me suis trouvé obligé d'établir six équations entre les premières (*). J'ai prouvé que, dans tous les cas, ces équations ne seraient pas suffisantes pour déterminer les grandeur et direction des puissances introduites; et j'en ai conclu que les conditions exigées pourraient toujours être satisfaites, et même d'une infinité de manières différentes.

Un savant, dont j'ambitionne le suffrage et l'estime, m'a fait, contre ce raisonnement, une objection sérieuse que je m'étais au surplus déjà faite à moi-même, postérieurement à l'impression du mémoire dont il s'agit. Cette objection consiste en ce que, pour prouver que des quantités sont assignables, il ne suffit pas de faire voir qu'elles sont en plus grand nombre que les équations qui les lient, attendu qu'un problème n'est pas toujours possible par cela seul qu'il est indéterminé, et que souvent, dans ce cas, ses conditions ne peuvent être remplies qu'au moyen de certaines relations entre les données qu'il renferme.

Afin donc de mettre cette théorie à l'abri de toute atteinte, il eût été nécessaire de prouver que les équations que j'avais établies ne se trouvaient pas dans le cas d'exception que je viens de mentionner; et il s'offrait, pour parvenir à ce but, un moyen bien simple, en apparence: c'était de sortir de dessous le signe Σ les six indéterminées A', B', C'; A'', B'', C'', d'en chercher les valeurs en fonction des données et des autres arbitraires du système, d'en conclure les valeurs de $A+X$, $B+Y$, $C+Z$, et de prouver qu'à l'aide de ce que ces dernières valeurs renfermaient d'indéterminé, il serait toujours possible de faire en sorte qu'aucune d'elles ne devînt nulle.

Mais, en examinant la chose avec plus d'attention, je ne tardai pas d'apercevoir que cette voie de démonstration m'engagerait dans des calculs et des discussions qui feraient perdre à mon procédé une grande partie de la brièveté que j'avais principalement eu en vue.

J'ai donc préféré revenir sur le fond même de la méthode, et je

(*) Ces équations, qui se trouvent aux pages 8 et 9 du mémoire, y sont désignées par (I) et (II).

suis parvenu ainsi à lui donner une extrême simplicité. C'est sous cette nouvelle forme que je vais l'exposer, en supposant toujours connues et la composition des forces qui concourent en un point, et celle des forces parallèles, dans le cas où elles ont une résultante unique et effective.

LEMME I.

Quels que soient le nombre et la nature des puissances d'un système, ce système peut toujours être réduit à deux puissances effectives au plus.

Démonstration. I. Soit imaginé un plan, situé comme on le voudra par rapport au système, et soit décomposé chacune des forces qui pourraient lui être parallèles, en deux autres qui ne le soient pas; ce qui pourra toujours être fait d'une infinité de manières différentes. Toutes les forces du système rencontreront alors le plan arbitraire.

II. Soit décomposé chaque force, au point où elle rencontre ce plan, en deux autres, dont l'une y soit contenue et dont l'autre lui soit perpendiculaire. Par ce procédé, tout le système se trouvera réduit à deux groupes de forces dont les unes seront dans un même plan, tandis que les autres seront perpendiculaires à ce plan, et conséquemment parallèles entre elles.

III. Les puissances de cette dernière sorte pourront toujours, comme l'on sait, être réduites à deux au plus lesquelles, étant parallèles entre elles et aux composantes, seront dans un même plan perpendiculaire au premier. Si, au contraire, elles peuvent se composer en une seule, on pourra toujours, par la direction de celle-ci, conduire un plan, qui sera également perpendiculaire à l'autre, mais dont alors la situation demeurera indéterminée. Ainsi, dans tous les cas, les puissances du système pourront être réduites à des forces contenues dans deux plans perpendiculaires entre eux, et se coupant conséquemment suivant une certaine droite.

IV. Soit pris arbitrairement deux points sur cette droite, et soit pris, aussi arbitrairement, un point sur la direction de chacune des forces comprises dans l'un et l'autre plans, dont elle est l'intersection; en joignant chacun des points de la dernière sorte aux deux premiers par deux droites, chaque force pourra être décomposée en deux autres, dirigées suivant ces droites; et, cette décomposition faite, toutes les puissances du système se trouveront réduites à deux groupes de forces qui, dans chaque groupe, seront appliquées à un même point.

V. Or des puissances qui agissent sur un même point, peuvent toujours, si elles ne se détruisent pas, être composées en une seule, agissant aussi sur ce point; donc, par l'effet de cette dernière opération, le système se trouvera réduit, comme l'annonce la proposition, à deux puissances effectives, au plus.

On peut même dire généralement que, dans tous les cas, le système se réduira en effet à deux puissances, en sous-entendant que l'une ou l'autre, ou toutes les deux peuvent être des puissances nulles, appliquées à des points quelconques, suivant des directions arbitraires.

LEMME II.

Pour que deux puissances se fassent équilibre, il est nécessaire et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées.

Démonstration. Comme il est de soi-même évident que deux puissances se font équilibre, lorsqu'elles sont égales et directement opposées, il ne peut être question ici que de prouver que l'équilibre ne peut subsister entre deux puissances que dans ce cas unique.

Or, les deux puissances peuvent être ou n'être pas dans un même plan; et, lorsqu'elles y sont, elles peuvent ou agir suivant une même droite, ou concourir en un même point, ou enfin être parallèles; ce qui fait en tout quatre cas que nous allons considérer successivement.

I. Deux puissances qui agissent suivant une même droite ayant une résultante égale à leur somme ou à leur différence, suivant qu'elles agissent dans le même sens ou en sens contraire, cette résultante ne peut être nulle, et conséquemment il ne peut y avoir équilibre, à moins que ces deux puissances ne soient égales et agissent en sens contraire ; ce qui est le cas indiqué dans l'énoncé de la proposition.

II. Si deux puissances concourent en un même point, elles auront une résultante représentée, tant en grandeur qu'en direction, par la diagonale du parallèlogramme construit sur les grandeurs et directions de ces forces ; et, comme cette diagonale ne sera jamais nulle, il s'ensuit que jamais de telles forces ne pourront se faire équilibre.

III. Si les deux puissances sont parallèles, et qu'elles agissent dans le même sens, elles auront une résultante égale à leur somme, et conséquemment elles ne seront pas en équilibre.

Si, agissant en sens contraire, elles sont inégales, elles auront une résultante égale à leur différence, et conséquemment elles ne seront pas non plus en équilibre.

Si enfin, agissant toujours en sens contraire, elles sont égales, elles formeront alors un *couple* ; et on sait qu'un tel système ne saurait être de lui-même en équilibre (*).

(*) Si j'admets ici cette dernière proposition, ce n'est pas cependant que je la regarde comme suffisamment établie dans les élémens de statique qui ont été publiés jusqu'à ce jour ; je crois même qu'il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de la prouver nettement *à priori*.

Beaucoup d'auteurs se sont contentés de la déduire des formules qui donnent les grandeur et situation de la résultante de deux forces qui agissent parallèlement et en sens contraire ; mais, outre que, pour que ce moyen de démonstration fût concluant, il faudrait prouver qu'une résultante zéro, appliquée à une distance infinie, ne peut être remplacée par la même résultante appliquée à une distance finie. Il n'est pas exact, en général, d'appliquer des formules à un cas pour lequel elles n'ont pas été construites, et le problème, si connu, des deux lumières, montre qu'une pareille application peut souvent conduire à des conséquences absurdes. Mais ce dernier problème peut du moins être traité pour le cas particulier où les intensités des deux lumières sont égales, et on obtient ainsi le résultat qui convient véritablement à ce cas ; tandis que, si l'on applique à la composition de deux forces égales et parallèles, agissant en sens contraire, les raisonnemens qui conduisent à la

IV. Considérons enfin le cas où les deux puissances ne peuvent être comprises dans un même plan ; soit P et Q (fig. 5) ces deux forces ; XZ et TV les plans parallèles qui les contiennent ; et AB la perpendiculaire commune à leurs directions ; soit enfin BN la projection, sur XZ, de la direction de P ; soit fait, dans ce plan, l'angle NBQ'=

---

résultante de ces forces, lorsqu'elles sont inégales, il sera impossible de parvenir à aucune conclusion.

C'est sans doute parce qu'il a senti cette difficulté, que M. Poinsot, qui avait un grand intérêt à bien établir cette proposition, sur laquelle repose toute sa statique, a cru devoir étayer, par divers raisonnemens, les conclusions que lui avait fourni le calcul ; mais ces raisonnemens portent principalement sur ce qu'un même système ne saurait admettre deux résultantes distinctes, ou, en d'autres termes, sur ce que deux puissances distinctes ne sauraient être équivalentes : proposition vraie dans tous les cas, et évidente dans un grand nombre, mais qui cesse d'être telle, lorsque les deux puissances, étant égales et parallèles, agissent dans le même sens.

Loin qu'il soit évident de soi-même que deux puissances égales et parallèles, agissant dans le même sens, ne sont pas équivalentes, et ne peuvent conséquemment être substituées l'une à l'autre, il serait, au contraire, facile de prouver, par un raisonnement très-spécieux, qu'une puissance peut être transportée en un point quelconque parallèlement à elle-même. « Lorsqu'une puissance est appliquée » à l'un des points d'un corps », dirait-on, « son action sur ce corps ne peut » être, en effet, que de faire avancer ce point en ligne droite, suivant sa direction, » et conséquemment, par la liaison des parties de ce corps, de faire décrire » à tous les points qui le composent, des droites parallèles avec des vitesses égales ; » résultat auquel on parviendra pareillement, en appliquant la puissance dont il » s'agit à un autre point quelconque, pourvu qu'on lui conserve sa grandeur et sa » direction. »

On ne saurait même douter qu'il n'en dût être ainsi, pour une force unique appliquée à un corps dépouillé de masse, du moins tant que ce corps serait parfaitement libre, mais non point pour plusieurs forces ; puisqu'alors l'effet que chacune d'elles tendait à produire se trouverait contrarié par l'action des autres ; et, s'il n'en est pas ainsi, dans la nature, pour une force unique, appliquée à un corps parfaitement libre, c'est seulement parce que la masse de ce corps donne naissance à une force d'inertie qui contrarie l'action de celle qui lui est appliquée.

On verra, au surplus, dans la note suivante, que la théorie qu'on expose ici peut être rendue indépendante de toutes ces difficultés.

NBQ,

NBQ, et soit appliqué au point B, suivant BQ', une force Q'=Q; les deux puissances Q et Q' étant dans une situation absolument semblable, par rapport à P, si Q pouvait faire équilibre à P, il en devrait être de même de Q' qui, par conséquent, serait équivalente à Q; donc la puissance Q'' égale et directement opposée à Q', et lui faisant conséquemment équilibre, devrait aussi faire équilibre à Q; donc enfin deux puissances Q et Q'', concourant en un même point B, se feraient équilibre, ce qui est absurde (II). Ainsi, le cas où deux puissances sont égales et directement opposées est l'unique où elles se fassent équilibre (*).

Problème.

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre entre les puissances d'un système de forme invariable, absolument libre dans l'espace?

Solution. Il vient d'être prouvé (Lemme I.) que tout système peut toujours, quelle qu'en soit la nature, être réduit à deux puissances effectives; et (Lemme II.) que, pour qu'il y ait équilibre entre deux

---

(*) Voici comment cette importante proposition peut être démontrée, indépendamment de la considération des couples.

Il est d'abord évident que, si des puissances se font équilibre, leur équilibre ne pourra être troublé par l'introduction dans leur système, d'un axe fixe, autour duquel ce système ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation; d'où il résulte que, si des puissances ne se font pas équilibre autour d'un tel axe, l'equilibre n'aura pas plus lieu entre elles, si cet axe cesse d'exister.

Or, excepté le cas particulier où deux puissances agissent suivant la même droite, et pour lequel la proposition à établir est évidente d'elle-même, il n'est pas difficile de se convaincre qu'il est toujours possible d'introduire dans leur système un axe fixe tellement situé que ces puissances tendent toutes deux à produire, dans le même sens, un mouvement de rotation autour de cet axe, et tendent conséquemment à produire un mouvement effectif. Si donc elles ne sont pas même en équilibre autour d'un axe fixe, elles ne le seront pas, à plus forte raison, lorsqu'elles auront toute liberté d'agir.

puissances, il est à la fois nécessaire et suffisant que ces deux-puissances soient égales et directement opposées.

On peut donc dire, d'après cela que, *pour qu'il y ait équilibre, dans un système de forme invariable, absolument libre dans l'espace, il est nécessaire et suffisant que les deux puissances auxquelles il peut toujours être réduit, soient égales et directement opposées.* Il ne s'agit donc, pour résoudre le problème proposé, que de traduire cette proposition en analise, et c'est là une chose extrêmement facile, comme on va le voir :

Soit en effet P, P′, P″, ..., des puissances dirigées dans l'espace d'une manière quelconque, et appliquées à des points invariablement liés entre eux; soit x', y', z', les coordonnées rectangulaires du point d'application de P′; soit de plus X′; Y′, Z′, ses composantes parallèles aux axes, et soit adopté des notations analogues pour les autres puissances du système.

Soit réduit (Lemme I.) tout le système à deux puissances seulement; soit t, u, v, les coordonnées du point d'application de la première; T, U, V, ses composantes parallèles aux axes; t', u', v', les coordonnées du point d'application de la seconde et T′, U′, V′, ses composantes parallèles aux axes. Par le principe de la composition des forces parallèles, nous aurons :

$$\mathrm{T}+\mathrm{T}'=\Sigma(\mathrm{X}'),\ \mathrm{T}u+\mathrm{T}'u'=\Sigma(\mathrm{X}'y'),\ \mathrm{T}v+\mathrm{T}'v'=\Sigma(\mathrm{X}'z'),$$
$$\mathrm{U}+\mathrm{U}'=\Sigma(\mathrm{Y}'),\ \mathrm{U}v+\mathrm{U}'v'=\Sigma(\mathrm{Y}'x'),\ \mathrm{U}t+\mathrm{U}'t'=\Sigma(\mathrm{Y}'x'),$$
$$\mathrm{V}+\mathrm{V}'=\Sigma(\mathrm{Z}'),\ \mathrm{V}t+\mathrm{V}'t'=\Sigma(\mathrm{Z}'x'),\ \mathrm{V}u+\mathrm{V}'u'=\Sigma(\mathrm{Z}'y')\ (*).$$

(*) Comme, par le Lemme I, ces équations peuvent toujours être satisfaites, il en résulte cette conséquence analitique, qui peut trouver quelquefois son application, savoir : que si, entre des indéterminées X, Y, Z, X′, Y′, Z′, x, y, z, x', y', z', et les quantités connues quelconques a, b, c, d, e, f, g, h, k, on a les neuf équations:

$$\mathrm{X}+\mathrm{X}'=a,\quad \mathrm{X}y+\mathrm{X}'y'=d,\quad \mathrm{X}z+\mathrm{X}'z'=g,$$
$$\mathrm{Y}+\mathrm{Y}'=b,\quad \mathrm{Y}z+\mathrm{Y}'z'=e,\quad \mathrm{Y}x+\mathrm{Y}'x'=h,$$
$$\mathrm{Z}+\mathrm{Z}'=c,\quad \mathrm{Z}x+\mathrm{Z}'x'=f,\quad \mathrm{Z}y+\mathrm{Z}'y'=k;$$

Présentement, pour qu'il y ait équilibre dans le système, il est nécessaire et il suffit (Lemme II.) que les deux puissances auxquelles nous l'avons réduit soient à la fois égales et directement opposées : or, cela exige d'abord que les composantes de chacune, parallèles aux axes, ne diffèrent des composantes de l'autre, parallèles aux mêmes axes, que par le signe seulement ; ce qui donne 1.°

$$T'=-T\ ,\quad U'=-U\ ,\quad V'=-V\ ;$$

éliminant T', U', V', des neuf équations ci-dessus, au moyen de celles-là, elles deviendront :

$$\begin{array}{lll}\Sigma(X')=0\ , & T(u-u')=\Sigma(X'y')\ , & T(v-v')=\Sigma(X'z')\ ,\\ \Sigma(Y')=0\ , & U(v-v')=\Sigma(Y'z')\ , & U(t-t')=\Sigma(Y'x')\ ,\\ \Sigma(Z')=0\ , & V(t-t')=\Sigma(Z'x')\ , & V(u-u')=\Sigma(Z'y')\ .\end{array}$$

Alors, les deux puissances étant égales, parallèles et agissant en sens contraire, il suffira, pour leur équilibre, qu'elles aient un point commun ; c'est-à-dire, qu'il suffira que les coordonnées de l'un des points de la direction de l'une satisfassent aux équations de l'autre ; or, l'une d'elles a pour ses équations :

$$V(x-t)=T(z-v)\ ,\qquad V(y-u)=U(z-v)\ ;$$

et, comme t', u', v', sont les coordonnées de l'un des points de la direction de l'autre, on devra avoir 2.°

$$\left.\begin{array}{l}V(t'-t)=T(v'-v)\ ,\\ V(u-u')=U(v'-v)\ ;\end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}V(t-t')=T(v-v')\ ,\\ V(u-u')=U(v-v')\ ;\end{array}\right.$$

éliminant les binomes $t-t'$ et $u-u'$ des équations ci-dessus, au moyen de celles-là, et faisant en outre, pour abréger, $T=mV$ et $U=nV$, elles deviendront :

---

ces équations ne seront jamais impossibles, c'est-à-dire, qu'on pourra toujours y satisfaire par des valeurs réelles et finies des indéterminées qu'elles renferment.

Il en sera donc de même de tout système d'équations déduites de celles-là, par l'élimination de quelques-unes des variables entre lesquelles elles établissent des relations.

$$\Sigma(X')=0\,,\qquad mnV(\nu-\nu')=\Sigma(X'y')\,,\qquad m\,V(\nu-\nu')=\Sigma(X'z')\,,$$

$$\Sigma(Y')=0\,,\qquad nV(\nu-\nu')=\Sigma(Y'z')\,,\qquad mnV(\nu-\nu')=\Sigma(Y'x')\,,$$

$$\Sigma(Z')=0\,,\qquad mV(\nu-\nu')=\Sigma(Z'x')\,,\qquad nV(\nu-\nu')=\Sigma(Z'y')\,;$$

éliminant enfin, entre ces dernières, les trois quantités :

$$mV(\nu-\nu')\,,\qquad nV(\nu-\nu')\,,\qquad mnV(\nu-\nu')\,,$$

étrangères au système primitif, on obtiendra ainsi les six équations :

$$\Sigma(X')=0\,,\qquad \Sigma(Y'z')=\Sigma(Z'y')\,,$$

$$\Sigma(Y')=0\,,\qquad \Sigma(Z'x')=\Sigma(X'z')\,,$$

$$\Sigma(Z')=0\,,\qquad \Sigma(X'y')=\Sigma(Y'x')\,;$$

lesquelles expriment conséquemment les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de ce système.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Méthodes directes pour résoudre, dans tous les cas, cette question : Étant donné d'espèce et de position sur un plan, une courbe quelconque du second degré, placée comme on voudra, par rapport aux axes des coordonnées ; établir l'équation numérique de cette courbe, relativement à sa situation actuelle ?

Par M. RAYMOND, professeur de mathématiques au collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

MESSIEURS,

L'ARTICLE que j'ai l'honneur de vous adresser est sans doute de peu d'importance ; mais vous avez annoncé que vous donneriez sur-tout votre attention aux vues qui auraient pour objet l'utilité et la simplicité de l'enseignement des mathématiques ; sous ce rapport, j'ai pensé que vous ne dédaigneriez pas quelques détails propres à abréger les recherches des élèves, dans la matière dont il s'agit. J'ai donc l'honneur de vous transmettre ces détails, en attendant que je puisse m'occuper de quelque objet plus digne d'intéresser vos lecteurs.

Les traités élémentaires de MM. Lacroix, Biot, Lefrançais, Garnier, etc., fournissent bien aux élèves les données nécessaires pour la solution de la question inverse de celle posée ci-dessus, savoir, de la question : *Étant donnée une équation numérique quelconque, du second degré, déterminer l'espèce et la position de la courbe à laquelle elle appartient, et construire cette courbe graphiquement ?* Mais ces ouvrages ne donnent aucun moyen direct d'arriver à la solution de la première question, et il est nécessaire pour les élèves de la savoir résoudre en général et avec facilité. Nous allons donc nous en occuper successivement, pour chaque espèce de courbe.

1. Commençons par rappeler que l'équation générale :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ,$$

étant résolue par rapport à y, peut être mise sous cette forme :

$$y=-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-x')(x-x'')}\ ;$$

x' et x'' représentant les abscisses des limites, dans le sens des x ; auquel cas le diamètre de la courbe, dans le même sens, a pour équation :

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}.$$

La résolution, par rapport à x, donne les résultats analogues :

$$x=-\left\{\frac{By+E}{2C}\right\}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4C^2}(y-y')(y-y'')}\ ,$$

$$x=-\frac{B}{2C}y-\frac{E}{2C}.$$

2. 1.° *Pour l'ellipse.* Soit l'ellipse ILI′L′ (fig. 6) disposée de telle manière que l'on ait :

$$AD=\frac{3}{2}\ ,\ AE=2\ ,\ AB=4\ ,\ AB'=8\ ,\ OL=2.$$

le diamètre DI′ aura pour équation :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

substituant donc, sous le radical, les valeurs :

$$x'=-4\ ,\qquad x''=-8\ ,$$

l'équation totale deviendra :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x+4)(x+8)}.$$

Mettant sous le radical la valeur de x relative au centre O de la courbe et faisant ainsi :

$$x=AC=-6\ ,$$

la partie radicale de l'ordonnée exprimera alors la valeur du demi-diamètre OL, et l'on posera par conséquent :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times-4}=2,$$

ce qui déterminera la valeur numérique du facteur $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$; l'on aura ainsi :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{+4}{-4}=-1\ ;$$

d'où :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-(x^2+12x+32)}.$$

Isolant le radical, élevant tout au carré, transposant et réduisant, on aura enfin :

$$16y^2+24xy+25x^2+48y+228x+548=0\ ;$$

équation cherchée, dont on constatera l'exactitude par la discussion.

Le procédé serait absolument semblable, si l'on donnait les limites de la courbe, dans le sens des y.

3. Soit O (fig. 7) un point considéré comme le résultat de la contraction d'une ellipse réduite à ce point ; soient :

$$AD=2\,,\qquad AE=2\,,\qquad AB=5.$$

L'équation du diamètre DO sera :

$$y=x+2.$$

On a ici :

$$x'=x''=5\,,$$

d'où ;

$$y=2+2\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-5)^2}\,,$$

en substituant l'abscisse relative au centre, qui est de même valeur que la limite unique, et observant que tout diamètre de la courbe est nul, on trouvera :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{0}{0}\,,$$

ce qui nous apprend qu'on peut donner à ce facteur la valeur qu'on voudra. Nous choisirons la plus simple, et, attendu qu'il est toujours négatif, dans l'ellipse, nous le ferons $=-1$; nous aurons ainsi :

$$y=x+2\pm\sqrt{-(x-5)^2}\;;$$

isolant le radical, élevant au carré, transposant et réduisant, il viendra enfin :

$$y^2-2xy+2x^2-4y-6x+29=0\quad(*).$$

(*) Il est facile de se rendre raison de l'indétermination qu'on rencontre ici pour la valeur de $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$; si en effet on pose ce coefficient $=-m$, il viendra :

$$y=x+2\pm\sqrt{-m(x-5)^2}\;;$$

d'où, en transposant et faisant disparaître le radical,

$$(y-x-2)^2+m(x-5)^2=0\;;$$

4. 2.° *Pour l'hyperbole.* Soit une hyperbole, disposée comme dans la fig. 8, et telle qu'on ait ;

$$AD=1\,,\quad AE=3\,,\quad AB=5\,,\quad AB'=1\,,\quad OL=3.$$

L'équation du diamètre sera :

$$y=\frac{1}{3}x-1\,,$$

et, à cause de $x'=5$ et de $x''=-1$, on aura pour la courbe :

$$y=\frac{1}{3}x-1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-5)(x+1)}.$$

Mettant sous le radical, à la place de x, la valeur de $AC=2$, et comparant ce radical, ainsi modifié, à la valeur de OL, prise sous une forme imaginaire, par la raison que le second diamètre ne saurait rencontrer la courbe, on fera ainsi :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times-9}=3\sqrt{-1}\,;$$

d'où :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=+1\,;$$

$$y=\frac{1}{3}x-1\pm\sqrt{x^2-4x-5}\,,$$

---

or, lorsque m est positif, comme on le suppose ici, cette équation ne peut être satisfaite qu'en posant séparément

$$y-x-2=0 \qquad \text{et} \qquad m(x-5)=0\,,$$

ou, plus simplement,

$$y-x-2=0 \qquad \text{et} \qquad x-5=0\,;$$

d'où l'on voit que le coefficient m disparaît de lui-même. De plus, comme l'on a

$$m=-\frac{(y-x-2)^2}{(x-5)^2}\,,$$

on devra avoir, dans le cas actuel, $m=\frac{0}{0}$.

On voit par là qu'un même point conjugué peut être exprimé par une infinité d'équations numériques différentes.

(*Note des éditeurs.*)

ce

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$9y^2-6xy-8x^2+18y+30x+54=0.$$

5. Soit l'hyperbole de la fig. 9, et supposons que l'on ait :

$$AO=2, \quad AE=2, \quad AB=AI'=2, \quad OL=3.$$

Le diamètre II', dans le sens des x, aura pour équation :

$$y=-x-2;$$

ce diamètre ne pouvant rencontrer la courbe, les limites AB et AI' qui le déterminent doivent être introduites dans l'équation sous la forme imaginaire, et il faut faire :

$$x'=AB\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}, \quad x''=AI'\sqrt{-1}=-2\sqrt{-1};$$

ce qui donne :

$$(x-x')(x-x'')=x^2+4:$$

ainsi, on aura :

$$y=-x-2\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x^2+4)}.$$

Faisant maintenant, sous le radical, $x=0$, attendu que l'abscisse relative au centre est nulle, et observant que le diamètre LL' est réel, on posera :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times 4}=3,$$

d'où :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{9}{4}.$$

Ainsi, l'équation deviendra :

$$y=-x-2\pm\sqrt{\frac{9}{4}x^2+9};$$

ou :

$$4y^2+8xy-5x^2+16y+16x-20=0.$$

6. Soit l'hyperbole de la fig. 10, rapportée aux asymptotes OS et OZ; supposons que l'asymptote OZ soit parallèle à l'axe AY des ordonnées, ce qui annonce déjà que le quarré de y manquera dans l'équation cherchée. Soient ensuite :

$$AZ=AS=3, \quad AG=AH=2, \quad AD=6, \quad AK=\frac{8}{3}.$$

L'asymptote OS aura pour équation :

$$y=-2x+6\ ,$$

et celle de l'asymptote OZ sera :

$$x=-3\ ,$$

d'où : $y+2x-6=0$ et $x+3=0$.

Comme ces deux équations appartiennent au système commun des lignes OS et OZ, on les combinera par voie de multiplication et l'on aura :

$$xy+2x^2+3y-18=0\ ;$$

équation qui suffirait, si l'on ne cherchait qu'à représenter le système des asymptotes dont il s'agit ; mais, comme la courbe existe, il faut tenir compte des données que fournit sa situation. Or, on voit que l'équation finale doit être telle que, 1.° si l'on y fait $x=0$, on doit trouver :

$$y=\mathrm{AK}=\frac{8}{3}\ ,$$

d'où : $3y-8=0$;

2.° si l'on y fait $y=0$, il doit venir :

$$x=\mathrm{AG}=\mathrm{AH}=\pm 2\ ,$$

d'où : $x^2=4$, et par conséquent, $2x^2-8=0$;

ce qui indique que le terme indépendant des variables doit être -8, et qu'ainsi l'équation cherchée sera :

$$xy+2x^2+3y-8=0.$$

Et en effet, outre les deux hypothèses alternatives $x=0$ et $y=0$, qui donnent des résultats convenables, on tire de cette équation :

$$y=\frac{-2x^2+8}{x+3}=-x+6-\frac{10}{x+3}\ ,$$

résultat qui, dans le cas de $x=\infty$, se réduit à :

$$y=2x+6\ ;$$

qui est bien l'équation de l'asymptote OS ; pareillement, on aura $y=\infty$, si l'on fait $x=-3$, qui est l'équation de l'autre asymptote OZ.

7. Soit encore l'hyperbole de la fig. 11, dont l'asymptote OS est parallèle à l'axe AX, ce qui fera manquer, dans l'équation, le quarré de x; soient,

$$AD=AD'=AE=\frac{2}{3}, \quad AG=3;$$

l'asymptote OS aura pour équation,

$$y-\frac{2}{3}=0,$$

et celle de l'asymptote OZ, ordonnée relativement à l'axe AY, sera :

$$x+y+\frac{2}{3}=0.$$

Multipliant ces deux équations par ordre, on obtiendra pour celle du système asymptotique :

$$3xy+3y^2-2x-\frac{4}{3}=0.$$

Mais, à cause de $AG=3$, on voit que l'hypothèse de $y=0$ entraînera la condition $x=3$, d'où :

$$-2x+6=0;$$

ce qui fait voir que le terme indépendant des variables doit être $+6$, et qu'ainsi l'équation cherchée sera :

$$3xy+3y^2-2x+6=0;$$

ce qui se vérifiera aisément par la discussion.

8. 3.° *Pour la parabole.* En revenant à l'équation générale (1) et laissant d'abord la valeur de y sous cette forme :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)};$$

on voit que la condition attachée à la parabole,

$$B^2-4AC=0,$$

réduit cette valeur à ce qui suit :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)};$$

valeur qui peut se mettre sous cette forme :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}(x-x')}\,,$$

x' représentant l'abscisse de la limite unique de la courbe dans le sens des x.

Il faut, en outre, se rappeler que, si l'on remplace x, sous le radical, par l'abscisse relative au paramètre, ce radical exprime alors la moitié du paramètre.

9. Cela posé, soit la parabole NIN' (fig. 12) dont le paramètre NN' soit égal à $4\sqrt{2}$; soient en outre :

$$AB=2\,,\quad BI=2\,,\qquad \text{d'où}\qquad IO=\sqrt{2}\,,\quad AC=3.$$

Le diamètre AO a pour équation :

$$y=x\,;$$

on aura donc, pour la courbe, à cause de $x'=AB=2$,

$$y=\pm\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}(x-2)}.$$

Faisant donc $x=AC=3$, on posera (8) :

$$\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}\times 1}=ON=2\sqrt{2}\,,$$

d'où :

$$\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}=8\,;$$

ainsi, l'équation cherchée sera :

$$y=x\pm\sqrt{8(x-2)}\,,$$

ou

$$y^2-2xy+x^2-8x+16=0.$$

P. S. Permettez-moi, MM., de saisir cette occasion pour indiquer, en passant, une forme assez élégante à laquelle on peut ramener l'expression du volume d'une portion d'hyperboloïde de révolution terminée par un plan perpendiculaire à l'axe.

Ce volume étant équivalent, comme l'on sait, au volume du tronc de cône engendré par le trapèze asymptotique correspondant, moins le volume du cylindre de même hauteur et d'un diamètre égal au second axe de la courbe ; si l'on fait (fig. 13) $IX=x$, $OI=a$, $IB=b$, l'expression analitique du volume engendré par le segment hyperbolique ICX, sera :

$$\frac{\varpi b^2x^3+3\varpi ab^2x^2}{3a^2} \; (*) \; ;$$

quantité qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{3}x.\frac{\varpi b^2x^2}{a^2}+a.\frac{\varpi b^2x^2}{a^2} \; (A).$$

Or, si l'on mène IE parallèle à l'asymptote OD, les triangles semblables OBI et IEX donnent :

$$EX=\frac{bx}{a} \; ;$$

et ainsi $\frac{\varpi b^2x^2}{a^2}$ exprime l'aire du cercle décrit par XE ; d'où il suit que l'expression (A) représente un cône ayant pour base le cercle décrit par XE, et pour hauteur l'abscisse IX, plus un cylindre de même base que ce cône et d'une hauteur $XG=OI=a$.

Par conséquent, le volume de l'hyperboloïde engendré par le segment ICX sera *équivalent au volume engendré par la révolution du trapèze* IEFG *autour de* IG.

Cet énoncé me paraît utile, dans les élémens, comme réunissant, à la fois, la commodité pour la mémoire, la simplicité de l'expression et la facilité du calcul.

J'ai l'honneur d'être, etc.

G. M. RAYMOND.

(*) Ce que l'on vérifie aisément, au surplus, en substituant, dans la formule ϖy^2dx, la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe, intégrant et déterminant la constante pour le sommet I de l'hyperboloïde.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de l'aire d'un polygone, en fonction des coordonnées de ses sommets ;

Par M. de Stainville (*), répétiteur à l'école impériale polytechnique.

Soient C, C′, C″, C‴, ..., les côtés successifs d'un polygone ; α, β, α', β', α'', β'', α''', β''', ..., les coordonnées de ses sommets. Si d'un point pris dans l'intérieur du polygone, et dont les coordonnées sont x' et y', on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, leurs expressions seront respectivement :

$$\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}\,,\qquad \frac{y'-a'x'-b'}{\sqrt{1+a'^2}}\,,\qquad \frac{y'-a''x'-b''}{\sqrt{1+a''^2}}\,,\ldots\ldots\ldots$$

a, a', a'', a''', ..., désignant respectivement les tangentes trigonométriques des angles que font les côtés c, c', c'', c''', ..., avec l'axe des abscisses, et b, b', b'', b''', ..., les ordonnées de ces côtés qui répondent à l'origine (**). Si l'on multiplie la première par

(*) M. de Stainville a adressé aux rédacteurs une solution du problème 1.er de la page 17 de ce volume, semblable en tout à celle qui a été donnée par M. Encontre. Ils regrettent de ne l'avoir pas reçue assez tôt pour la mentionner en son lieu. Ils croient devoir indiquer, parmi les ouvrages où se trouve résolu le problème auquel celui-là se réduit, celui qui a pour titre : *Recueil de problèmes résolus par des considérations purement géométriques* ; à Paris, chez Courcier.

(*Note des éditeurs.*)

(**) Soient x' et y' les coordonnées du point M (fig. 14) ; si de ce point on abaisse deux perpendiculaires MP et MQ, l'une à la droite BP, dont l'équation est $y=ax+b$, et l'autre à l'axe BX des abscisses, on aura un triangle MOP, rectangle en P, qui donnera MP$=$MO Sin. MOP$=$MO Cos. γ ; or MO est égal à l'ordonnée du point M, diminuée de l'ordonnée de la droite BP qui correspond à l'abscisse AQ$=x'$; ainsi, cette ordonnée $=ax'+b$; donc MO$=y'-ax'-b$; si donc on désigne par p la perpendiculaire

c, la seconde par c', la troisième par c'', et ainsi de suite, on aura évidemment le double de l'aire du polygone; de sorte qu'en désignant ce polygone par P, il viendra :

$$2P = c.\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}} + c'.\frac{y'-a'x'-b'}{\sqrt{1+a'^2}} + c''.\frac{y'-a''x'-b''}{\sqrt{1+a''^2}} + \ldots = Ay'-Bx'-C;$$

mais, l'aire du polygone est indépendante des coordonnées x' et y'; ainsi, $A=0$, $B=0$ et $2P=-C$; c'est-à-dire :

$$2P = -\frac{bc}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{b'c'}{\sqrt{1+a'^2}} - \frac{b''c''}{\sqrt{1+a''^2}} - \ldots\ldots$$

or :
$$b = \beta - \alpha.\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'} = \frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\alpha-\alpha'},$$

et:
$$\frac{c}{\sqrt{1+a^2}} = c\,\text{Cos.}\,\gamma = \alpha'-\alpha;$$

donc :
$$-\frac{bc}{\sqrt{1+a^2}} = \alpha\beta'-\beta\alpha';$$

et par conséquent :

$$2P = \alpha\beta'-\beta\alpha'+\alpha'\beta''-\beta'\alpha''+\alpha''\beta'''-\beta''\alpha'''+\ldots\ldots\ldots,$$

formule élégante et à laquelle on peut arriver facilement, par la géométrie ordinaire. En effet un polygone, dont toutes les parties sont situées dans l'un des angles que forment les axes auxquels on rapporte les coordonnées des sommets, peut être considéré comme étant la différence de deux polygones qui auraient pour base commune la partie de l'axe des abscisses comprise entre celles des perpendiculaires abaissées des sommets sur cet axe, qui sont les plus distantes, et pour côtés adjacens ces mêmes perpendiculaires; or, si on évalue les trapèzes dans lesquels se décomposent les polygones, lorsque de chacun de leurs angles on abaisse des perpendiculaires sur la base, il est évident que l'excès du double du polygone convexe sur le double du polygone concave, c'est-à-dire, le double du polygone dont il s'agit, aura pour expression :

MP, on aura $p=(y'-ax'-b)\,\text{Cos.}\,\gamma$; or $\text{Cos.}\,\gamma = \frac{1}{\text{Sec.}\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$;

donc enfin $p = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$.

$$2P=(\alpha-\alpha')(\beta+\beta')+(\alpha'-\alpha'')(\beta'+\beta'')+(\alpha''-\alpha''')(\beta''+\beta''')+\ldots\ldots;$$

or, le dernier terme de chaque produit est détruit par le premier terme du produit suivant, à l'exception de celui du dernier produit qui est détruit par le premier terme du premier produit, il ne reste donc de chaque produit que les termes dans lesquels les deux facteurs n'ont pas les mêmes accens; on a donc, comme précédemment :

$$2P=\alpha\beta'-\beta\alpha'+\alpha'\beta''-\beta'\alpha''+\alpha''\beta'''-\beta''\alpha'''+\ldots\ldots.$$

C'est encore ce qu'on peut obtenir autrement, en remarquant que le double de l'aire du polygone peut être mis également sous ces deux formes :

$$2P=(\alpha-\alpha')(\beta+\beta')+(\alpha'-\alpha'')(\beta'+\beta'')+\ldots\ldots$$
$$2P=(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+(\alpha'-\alpha'')(\beta'-\beta'')+\ldots\ldots$$

ce qui donne, en prenant la demi-somme des deux expressions, le même résultat que ci-dessus.

On peut remarquer, en passant, que la quantité $A=0$ ayant pour expression :

$$\frac{c}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{c'}{\sqrt{1+a'^2}}+\frac{c''}{\sqrt{1+a''^2}}+\ldots\ldots,$$

il en résulte que la somme des produits des côtés d'un polygone, soit par les sinus, soit par les cosinus des angles qu'ils font respectivement avec une droite tracée d'une manière quelconque sur un plan, est égale à zéro; ce qu'on peut d'ailleurs démontrer directement d'une manière fort simple (*).

On pourrait aussi trouver, pour les polyèdres, des formules analogues aux précédentes et démontrer, par des considérations pareilles à celles dont nous venons de faire usage, que la somme des produits des aires des faces d'un polyèdre par les sinus ou cosinus des angles qu'elles font respectivement avec un plan quelconque est zéro; et qu'il en est de même de la somme des produits des côtés d'un polygone rectiligne, plan ou gauche, par les sinus ou cosinus des angles qu'ils forment avec une droite située d'une manière quelconque dans l'espace.

(*) Voyez l'ouvrage déjà cité.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Solution analitique d'un problème de géométrie ;

Par M. SCHUMACHER, professeur extraordinaire en astronomie, à l'université de Copenhague.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

MESSIEURS,

QUOIQUE votre journal ne me soit connu que par le récit que mon illustre ami, le professeur Gauss, m'en vient de faire, dans une de ses lettres ; ce qu'il m'en dit suffit cependant pour me former une idée du mérite de votre travail. L'utilité d'une pareille entreprise ne saurait être contestée que par ceux qui ne savent pas combien de petits mémoires, de théorèmes, problèmes, etc. périssent, parce que l'occasion de les publier manque à leurs auteurs.

Je ne sais pas si vous verrez avec plaisir, de temps en temps, quelques bagatelles de ma façon ; j'en ferai cependant l'essai, en vous envoyant un petit problème de géométrie.

Un de mes amis, très-versé dans la méthode des anciens géomètres, me parla d'un problème dont il avait une solution synthétique, et qu'il était tenté de croire très-difficile, ou au moins très-compliqué, par l'analise ; le voici :

PROBLÈME. Un point étant donné de position par rapport à un angle connu, et dans un même plan avec lui, trouver sur ce plan deux autres points par lesquels menant, dans une direction arbitraire, deux droites parallèles coupant les deux côtés de l'angle, le point donné se trouve constamment sur la direction de l'une des diagonales du trapèze intercepté entre les parallèles et les deux côtés de l'angle donné ?

Soient C et C′ les deux côtés de l'angle, S son sommet, O le point donné, P et P′ les deux points cherchés, D et D′ les deux parallèles conduites respectivement par ces points, et enfin K et K′ leurs intersections respectives avec C et C′ ; il s'agit de déterminer les points P et P′ de manière que, quelle que soit d'ailleurs la direction commune des deux parallèles D et D′, le point O soit toujours en ligne droite avec les points K et K′.

Solution. Soit pris le sommet S de l'angle donné pour origine des coordonnées, son côté C pour axe des x, et son côté C′ pour axe des y ; désignons les coordonnées

du point donné O, par.... α, β,
du point cherché P, par.... x', y',
du point cherché P′, par.... x'', y''.

Les équations des deux parallèles arbitraires D et D′, conduites par P et P′, seront de la forme :

$$y-y'=\mathrm{N}(x-x')\,,\qquad y-y''=\mathrm{N}(x-x'')\ :$$

où N demeurera indéterminée.

On trouvera, d'après cela, pour les coordonnées

$$\text{de K}\ \ldots\ldots\ \frac{\mathrm{N}x'-y'}{\mathrm{N}}\,,\qquad o\ ;$$
$$\text{de K}'\ \ldots\ldots\ o\,,\qquad y''-\mathrm{N}x''.$$

L'équation de condition, pour que trois points (x',y'), (x'',y''), (x''',y'''), soient en ligne droite, étant :

$$x'(y''-y''')+x''(y'''-y')+x'''(y'-y'')=o\,,$$

donne, appliquée aux points O, K, K′,

$$\alpha(\mathrm{N}x''-y'')+\frac{\mathrm{N}x'-y'}{\mathrm{N}}\Big\{(y''-\mathrm{N}x'')-\beta\Big\}=o\,,$$

ou; $$x''(x-\alpha)\mathrm{N}^2-\{y''(x'-\alpha)+x''y'-\beta x'\}\mathrm{N}+y'(y''-\beta)=o\ ;$$

équation qui, à raison de l'indétermination de N, se partage dans les trois suivantes :

$$(\mathrm{A})\ \left\{\begin{array}{l} x''(x'-\alpha)=o\,,\qquad y'(y''-\beta)=o\,,\\ \quad y''(x'-\alpha)+x''y'-\beta x'=o\ ;\end{array}\right.$$

le problème est donc indéterminé, puisqu'il ne fournit que trois équations seulement entre les quatre coordonnées x', y', x'', y'' des deux points cherchés P et P'.

Les deux premières équations ne peuvent être satisfaites que par l'un des quatre systèmes de valeurs.

$$\left\{\begin{array}{l} x''=0\,, \\ y'=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x''=0\,, \\ y''=\beta\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x'=\alpha\,, \\ y'=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x'=\alpha\,, \\ y''=\beta\,; \end{array}\right.$$

de ces quatre systèmes, il n'y a que le premier et le dernier qui puissent s'accorder avec la troisième équation, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

Le premier, qui exprime que le point P est sur l'axe des x, et le point P' sur l'axe des y, change la troisième équation en celle-ci :

$$x'(y''-\beta)-\alpha y''=0\;;$$

qui exprime que les deux points P et P' sont en ligne droite avec le point O ; ainsi, de cette manière, les points cherchés seront les intersections des deux côtés de l'angle donné avec une droite menée, d'une manière quelconque, par le point donné.

Quant au dernier système, qui exprime que les points cherchés sont sur des parallèles menées aux deux axes par le point O, il réduit la troisième équation à

$$x''y'-\beta x'=0\,, \qquad \text{ou} \qquad x''x'-y''x'=0\,,$$

qui exprime que les points P et P' sont en ligne droite avec l'origine ; en sorte que, pour ce second cas, les points cherchés seront les intersections d'une droite menée d'une manière quelconque, par le sommet de l'angle donné, avec des parallèles à ses deux côtés passant par le point donné.

Il me serait très-agréable, MM., si vous trouviez dans ma solution une nouvelle preuve que l'analise parvient aux résultats de la synthèse, toujours avec une égale élégance, mais très-souvent avec une élégance et une généralité supérieures à celles dont la synthèse est capable.

Altona, ce 8 novembre 1810.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

Un ingénieur veut établir une communication entre trois villes, non situées en ligne droite, au moyen d'une route composée de trois branches aboutissant d'une part aux trois villes, et se réunissant de l'autre en un même point entre ces trois villes. On demande comment il doit établir le point de concours des trois branches de route, pour que leur longueur totale soit la moindre possible (*)?

II.

A un triangle donné quelconque, inscrire trois cercles, de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle (**)?

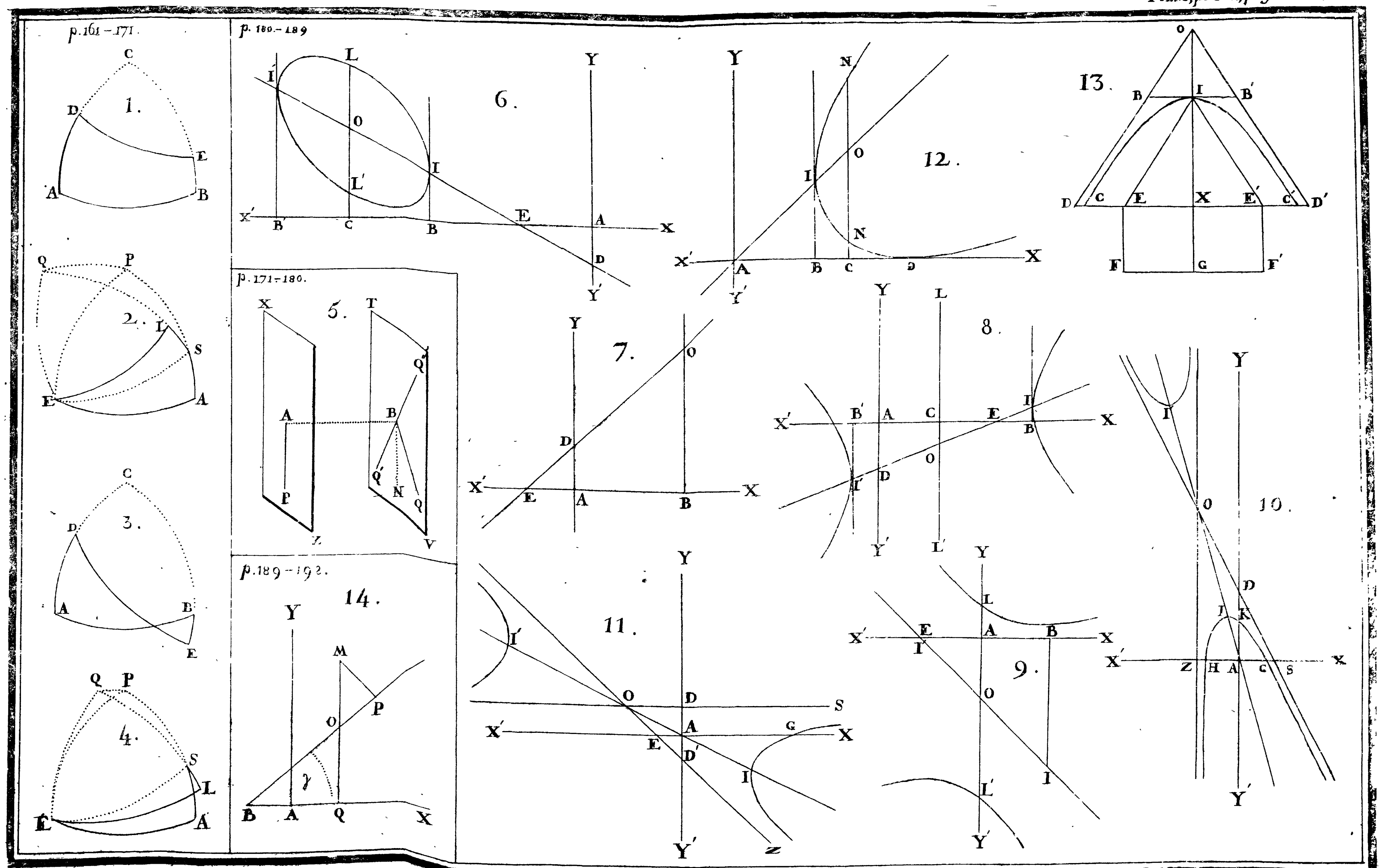
(*) On peut généraliser ce problème, en demandant de déterminer, sur un plan, un point dont la somme des distances à un nombre de points quelconques situés sur ce plan soit un *minimum*. On peut même l'étendre à des points situés d'une manière quelconque dans l'espace.

(**) Ce problème ne présente aucune difficulté, lorsque le triangle est équilatéral. Jacques Bernoulli l'a résolu pour le triangle isocèle (*Voyez ses œuvres*, *tome I*, *page* 303, *Genève*, 1744); mais sa solution est beaucoup moins simple que ne le comporte ce cas particulier.

On pourrait, au lieu de trois cercles, proposer d'en inscrire un nombre de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$; alors trois seulement toucheraient à la fois deux côtés du triangle, les autres cercles extérieurs en toucheraient quatre et un côté du triangle, et chaque cercle intérieur devrait être touché par six autres.

Ou bien, on pourrait proposer d'inscrire à un polygone de m côtés, m cercles de telle manière que chacun d'eux en touchât deux autres et deux côtés du polygone; mais il paraît qu'alors le problème serait indéterminé.

Enfin, on peut proposer d'*Inscrire à un tétraèdre donné quelconque quatre sphères, de manière que chacune d'elles touche les trois autres, et trois faces du tétraèdre?*



J. D. G. fecit.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Analogies entre les triangles rectangles rectilignes et sphériques ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

On connaît, depuis long-temps, plusieurs analogies entre les triangles rectilignes et les triangles sphériques ; mais ces analogies sont purement relatives aux différens cas que présente leur résolution.

Je me propose ici de faire remarquer la correspondance qui a lieu entre les triangles rectilignes rectangles et les triangles sphériques rectangles, sous le rapport des propriétés fondamentales des premiers ; c'est une considération dont je ne crois pas que personne se soit occupé jusqu'ici.

Les propriétés fondamentales des triangles rectilignes rectangles sont les suivantes :

1.° Le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.

2.° Du sommet de l'angle droit, soit abaissé une perpendiculaire sur l'hypothénuse ; le quarré de chaque côté est égal au rectangle de l'hypothénuse par le segment adjacent.

3.° De là, les quarrés des côtés sont entre eux comme les segmens adjacens de l'hypothénuse.

4.° Le quarré de la hauteur est égal au rectangle des segmens de l'hypothénuse.

5.° L'hypothénuse, les côtés et la hauteur forment une proportion géométrique.

Je vais développer, sur les triangles sphériques des théorèmes correspondans à ceux que je viens d'énoncer sur les triangles rectilignes.

THÉORÈME I. Dans tout triangle sphérique rectangle, le quarré du sinus de la demi-hypothénuse est égal à la somme des produits des quarrés des sinus de chaque demi-côté par le quarré du cosinus de la moitié de l'autre.

Soient A, B, C, les côtés d'un triangle sphérique rectangle, dont A est l'hypothénuse.

J'affirme que $\text{Sin.}^2\frac{1}{2}A=\text{Sin.}^2\frac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\frac{1}{2}C+\text{Sin.}^2\frac{1}{2}C\,\text{Cos.}^2\frac{1}{2}B.$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\text{Cos.}A=\text{Cos.}B\,\text{Cos.}C&=(2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B-1)(2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-1)\\&=4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B-2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C+1\\&=1-2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B(1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C)-2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C(1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B)\\&=1-2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\ ;\end{aligned}$$

donc

$$1-\text{Cos.}A=2\{\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\}\ ;$$

mais

$$1-\text{Cos.}A=2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\ ;$$

donc, enfin,

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A=\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C.\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B.$$

C.Q.F.D.

Corollaire I. L'application aux triangles rectilignes a lieu en substituant aux sinus des demi-côtés ces demi-côtés eux-mêmes, et en substituant l'unité à leurs cosinus.

Corollaire II. Soit désigné par x l'angle formé par les chordes des jambes de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle. Les chordes des trois côtés étant les doubles des sinus des moitiés de ces côtés, on aura, par la trigonométrie rectiligne, l'équation suivante :

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A = \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B - 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}x + \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C\ ;$$

$$= \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C + \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\ \ (\textit{Théorème I.})\ ;$$

de là :

$$2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}x = \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B(1 - \text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C) + \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C(1 - \text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B)$$

$$= 2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C\ ;$$

donc $$\text{Cos.}x = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ .$$

Savoir, *Dans tout triangle sphérique rectangle, le produit du rayon par le cosinus de l'angle formé par les chordes des arcs qui sont les jambes de l'angle droit, est égal au produit des sinus des moitiés de ces arcs.*

Corollaire III. Dans un triangle sphérique dont un côté est un quadrans : le quarré du cosinus de la moitié de l'angle opposé au quadrans est égal à la somme des produits du quarré du sinus de chacun des demi-angles restans par le quarré du cosinus de la moitié de l'autre. Ce corollaire se déduit immédiatement du *Théorème I*, par la considération du triangle polaire ou supplémentaire.

THÉORÈME II. Dans tout triangle sphérique rectangle, le quarré du sinus d'un des côtés est au produit du sinus de l'hypothénuse par le sinus du segment adjacent à ce côté, comme le sinus total est au cosinus de l'autre segment de l'hypothénuse.

Soient B′ et C′ les segmens de l'hypothénuse faits par la hauteur, et adjacens aux côtés B et C respectivement.

J'affirme que $\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B : \text{Sin.}A\,\text{Sin.}B' = 1 : \text{Cos.}C'$.

Démonstration. Soit h la hauteur du triangle sphérique.

On a $$\text{Cos.}B = \text{Cos.}h\,\text{Cos.}B'\ ,$$

$$\text{Cos.}C = \text{Cos.}h\,\text{Cos.}C'\ ;$$

donc $$\text{Cos.}B : \text{Cos.}C = \text{Cos.}B' : \text{Cos.}C'\ ,$$

$$\text{Cos.}^2B : \text{Cos.}B\,\text{Cos.}C = \text{Cos.}B' : \text{Cos.}C'\ ,$$

ou $$\text{Cos.}^2B : \text{Cos.}A = \text{Cos.}B' : \text{Cos.}C'\ ;$$

donc $\quad \text{Cos.}^2\text{B} : \text{Cos.ACos.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$,

et $\quad 1 - \text{Cos.}^2\text{B} : \text{Cos.C}' - \text{Cos.ACos.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$,

ou $\quad \text{Sin.}^2\text{B} : \text{Cos.C}' - \text{Cos.ACos.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$,

or $\quad \text{C}' = \text{A} - \text{B}'$;

d'où $\quad \text{Cos.C}' - \text{Cos. ACos.B}' = \text{Sin.A Sin.B}'$;

donc, enfin , $\quad \text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.A Sin.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$.

C. Q. F. D.

Corollaire. L'application aux triangles rectilignes a lieu en substituant aux sinus de A de B et de B′ ces quantités elles-mêmes ; et en substituant l'unité au cosinus de C′.

THÉORÈME III. Dans tout triangle sphérique rectangle , les quarrés des sinus des côtés sont entre eux comme les sinus des doubles des segmens adjacens.

Tout étant comme précédemment ,

J'affirme que $\text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.}^2\text{C} = \text{Sin.2B}' : \text{Sin.2C}'$.

Démonstration.

Puisque (*Théorème II.*) $\text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.A Sin.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$,

on doit avoir $\quad \text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin. A} = \text{Sin.B}' : \text{Cos.C}'$,

et pareillement $\quad \text{Sin. A} : \text{Sin.}^2\text{C} = \text{Cos.B}' : \text{Sin.C}'$;

donc $\quad \text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.}^2\text{C} = \text{Sin.B}'\text{Cos.B}' : \text{Sin.C}'\text{Cos.C}'$,

ou enfin $\quad \text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.}^2\text{C} = \text{Sin.2B}' : \text{Sin.2C}'$.

C. Q. F. D.

Corollaire. L'application aux triangles rectilignes a lieu, en substituant aux sinus des côtés et des doubles segmens, les côtés et les doubles segmens eux-mêmes.

THÉORÈME IV. Dans tout triangle sphérique rectangle , le quarré du sinus de la hauteur est au produit des sinus des seg-

mens de l'hypothénuse, comme le quarré du rayon est au produit des cosinus de ces segmens.

Tout étant comme précédemment,

J'affirme que $\text{Sin.}^2 h : \text{Sin.B}'\text{Sin.C}' = 1 : \text{Cos.B}'\text{Cos.C}'$.

Démonstration.

Par le (*Théorème II*) $\text{Sin.}^2\text{B} : \text{Sin.ASin.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$;

mais $\text{Sin. B} : \text{Sin.A} = \text{Sin.}b : 1$,

d'où $\text{Sin. B} : \text{Sin.}b : \text{Sin.B}' = 1 : \text{Cos.C}'$;

et pareillement $\text{Sin.C Sin.}c : \text{Sin.C}' = 1 : \text{Cos.B}'$;

donc $\text{Sin.B Sin.}c\,\text{Sin. C Sin.}b : \text{Sin.B}'\text{Sin.C}' = 1 : \text{Cos.B}'\text{Cos.C}'$;

or $\text{Sin.B Sin.}c = \text{Sin.C Sin.}b = \text{Sin.}h$;

donc, enfin, $\text{Sin.}^2 h : \text{Sin.B}'\text{Sin.C}' = 1 : \text{Cos.B}'\text{Cos.C}'$.

C. Q. F. D.

Corollaire. La proposition correspondante sur les triangles rectilignes s'obtient, en substituant aux sinus de la hauteur et des segmens, ces quantités elles-mêmes, et en substituant l'unité à chacun des cosinus des segmens.

THÉORÈME V. Dans tout triangle sphérique rectangle, le sinus de l'hypothénuse, les sinus des côtés et le sinus de la hauteur, sont en proportion géométrique.

Tout étant comme précédemment,

J'affirme que $\text{Sin.A} : \text{Sin.B} = \text{Sin.C} : \text{Sin.}h$.

Démonstration.

on a $\text{Sin.A} : \text{Sin.B} = 1 : \text{Sin.}b$,

et $\text{Sin.C} : \text{Sin.}h = 1 : \text{Sin.}b$;

donc $\text{Sin.A} : \text{Sin.B} = \text{Sin.C} : \text{Sin.}h$.

C. Q. F. D.

Corollaire. La proposition correspondante, sur les triangles rectilignes, s'obtient en substituant aux sinus les quantités elles-mêmes.

DYNAMIQUE.

Démonstration élémentaire du principe fondamental de la théorie du mouvement uniformément accéléré ;

Par M. DE STAINVILLE, répétiteur à l'école impériale polytechnique.

THÉORÈME. *Dans le mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus par un mobile sont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir, en supposant que la force accélératrice constante agisse sur ce mobile à partir du repos.*

Démonstration. Soient E et E' les espaces que parcourrait un corps qui serait soumis pendant les temps t et t' à l'action d'une force accélératrice constante ; n et n' deux nombres entiers aussi grands qu'on voudra, et qui soient entre eux dans le rapport des temps t et t' ; c'est-à-dire, tels qu'ils puissent exprimer le nombre des intervalles de temps égaux contenus dans t et t'. Cela posé, si un corps est soumis à l'action d'une force accélératrice constante, il doit, par la nature de cette force, se trouver sollicité, au commencement de chaque instant de la même manière que lorsqu'il est sorti du repos, et par conséquent acquérir, en temps égaux, des degrés égaux de vitesse ; si donc on désigne par v l'espace parcouru par le mobile dans le premier instant et par e celui qu'il parcourrait dans le second, si à la fin du premier, la force accélératrice cessait d'agir sur lui, $e+v$ sera celui qu'il parcourra dans le second, $2e+v$ celui qu'il parcourra dans le troisième, et ainsi de suite ; par conséquent l'espace total, qui se compose des espaces partiels, sera la somme des deux suites,

$$o+e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots+(n-1)e\ ,$$

$$v+v+v+v+\ldots\ldots\ldots+\qquad v\ ;$$

or v, qui exprime l'espace que parcourrait le mobile pendant un instant, s'il était uniquement soumis à l'action de la force accélératrice, est nécessairement moindre que e, qui exprime celui qu'il parcourrait pendant le même temps, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse acquise à la fin du premier instant; donc nv est moindre que ne, d'où il suit que l'espace total E, parcouru pendant le temps t, sera plus grand que,

$$e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots+(n-1)e\ ,$$

mais plus petit que,

$$e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots+\qquad ne\ ;$$

c'est-a-dire, qu'on aura :

$$E>\frac{n(n-1)}{2}e \quad \text{et} \quad E<\frac{n(n+1)}{2}e\ ;$$

on aura de même :

$$E'>\frac{n'(n'-1)}{2}e \quad \text{et} \quad E'<\frac{n'(n'+1)}{2}e\ ;$$

on aura donc,

$$\frac{E}{E'}>\frac{n^2-n}{n'^2+n'} \quad \text{et} \quad \frac{E}{E'}<\frac{n^2+n}{n'^2-n'}\ .$$

Si l'on fait la division des seconds membres de ces inégalités et que, pour abréger, on représente la fraction $\frac{n}{n'}$ par x, on aura :

$$\frac{E}{E'}>x^2-\frac{x(x+1)}{n'+1} \quad \text{et} \quad \frac{E}{E'}<x^2+\frac{x(x+1)}{n'-1}\ ;$$

quelque grand d'ailleurs que soit n'; or, on peut toujours concevoir ce nombre assez grand pour que les seconds termes des seconds membres de ces inégalités soient aussi petits qu'on voudra. Ainsi, on peut conclure de la première inégalité que le rapport $\frac{E}{E'}$ est plus grand que toute quantité moindre que x^2, et de la seconde que ce même rapport est moindre que toute quantité plus grande que x^2; le rapport $\frac{E}{E'}$ ne pouvant ainsi être ni plus grand ni plus petit que x^2, il s'en suit qu'il doit lui être égal; et, comme on a $x^2=\frac{n^2}{n'^2}=\frac{t^2}{t'^2}$, il en résulte qu'on a, en général,

$$\frac{E}{E'}=\frac{t^2}{t'^2};$$

ce qu'il fallait démontrer.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Examen des cas où un problème du premier degré est indéterminé, quoiqu'il y ait, pour le résoudre, autant d'équations que d'inconnues;

Par M. Suremain-de-Missery, ci-devant officier d'artillerie, membre de plusieurs sociétés savantes.

Peut-être le point d'analise que je vais examiner paraîtra-t-il, d'abord, un peu trop élémentaire; mais, comme dans les traités d'algèbre, même les plus étendus, il n'a été présenté que d'une manière très-incomplète; je crois devoir y suppléer, en faveur de ceux pour

pour qui ce qu'on en a écrit paraîtrait insuffisant; et je tâcherai de trouver grâce auprès des autres, soit par la manière dont je présenterai cette recherche, soit par les applications que j'en déduirai.

1. Soient en premier lieu, entre les deux inconnues x et y, les deux équations complètes du premier degré :

$$ax+by+c=0\ ,\qquad a'x+b'y+c'=0\ ;$$

on sait qu'elles donnent, étant résolues,

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ,\qquad y=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\ ;$$

et ce que nous proposons ici est de savoir dans quel cas le problème qui aura conduit à ces équations demeurera indéterminé.

2. Or, il est clair qu'il faut, pour cela, que les deux équations n'expriment pas deux conditions distinctes, c'est-à-dire, qu'il faut qu'elles n'équivalent qu'à une seulement, ou encore que le premier membre de l'une soit le produit du premier membre de l'autre par un certain multiplicateur (*). Désignant donc ce multiplicateur par m, il viendra :

$$a'x+b'y+c'=m(ax+by+c)=0\ ,$$

d'où on déduira les équations de condition :

$$ma=a'\ ,\qquad mb=b'\ ,\qquad mc=c'\ :$$

desquelles éliminant m, on aura,

$$ac'-ca'=0\ ,\qquad bc'-cb'=0\ ;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues a, b, c, a', b', c', pour que les deux équations proposées ne soient pas essentiellement différentes l'une de l'autre, et par conséquent se réduisent à une seule; ce qui rend le problème indéterminé.

(*) Ce cas répond, en géométrie, à celui où cherchant l'intersection de deux droites tracées sur un même plan, il arrive que ces droites se confondent.

Or, de ces relations on déduit encore celle-ci,

$$ab'-a'b=0\,,$$

qui peut remplacer une quelconque des deux premières; et, en vertu des unes et des autres, les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{0}{0}\,,\qquad y=\frac{0}{0}.$$

3. Réciproquement, si l'on a les deux relations

$$ac'-ca'=0\,,\qquad bc'-cb'=0\,;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent la suivante :

$$ab'-ba'\,,$$

et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une des équations sera le produit de l'autre par un certain multiplicateur, qu'on pourra supposer $\frac{c'}{c}$ pour la première et $\frac{c}{c'}$ pour la seconde; en effet, si l'on écrit l'équation

$$a'x+b'y+c'=\frac{c'}{c}\,(ax+by+c)\,,$$

elle deviendra, en chassant le dénominateur et transposant,

$$(ac'-ca')x+(bc'-cb')y=0\,;$$

équation qui, d'après les relations ci-dessus, se réduit à $0=0$.

Et, comme les valeurs de x et y ne peuvent prendre la forme $\frac{0}{0}$ qu'autant que ces relations existent, on doit en conclure que, lorsqu'elles prennent cette forme, on se trouve nécessairement dans le cas que nous venons d'examiner.

4. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda'a'=0\,,\qquad \lambda b+\lambda'b'=0\,,\qquad \lambda c+\lambda'c'=0\,;$$

et alors λ et λ' pourront tous deux être supposés entiers; on pourra, par exemple, faire

$$\lambda=\pm c' \quad , \qquad \lambda'=\mp c.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les équations proposées devient,

$$\lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c')=0 \;;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par l'autre; de manière qu'on peut supprimer indifféremment l'une ou l'autre.

5. Dans ce qui précède, nous avons tacitement supposé qu'aucune des deux équations proposées n'était dépourvue de son dernier terme; mais, lorsqu'au contraire on a $c=c'=0$, c'est-à-dire, lorsque les équations du problème sont,

$$ax+by=0 \quad , \qquad a'x+b'y=0 \;,$$

il y a alors à distinguer les deux cas que voici :

1.° Il peut se faire que les quantités connues a, b, a', b', ne soient pas assujéties à la relation,

$$ab'-ba'=0 \;;$$

alors la question est déterminée; et elle est résolue par les seules valeurs

$$x=0 \quad , \qquad y=0 \;;$$

car les valeurs générales des inconnues sont dans ce cas

$$x=\frac{0}{ab'-ba'} \;, \qquad y=\frac{0}{ab'-ba'} \;,$$

équivalentes à celles qui précèdent.

2.° Il peut se faire, au contraire, que les quantités connues soient assujéties à la relation

$$ab'-a'b=0 \;;$$

alors la question est indéterminée; et elle est résolue non-seulement par les valeurs

$$x=0 \;, \qquad y=0 \;;$$

mais encore par une infinité d'autres, représentées par les symboles

$$x=\frac{0}{0}\,, \qquad y=\frac{0}{0}\,;$$

ce dernier cas se rapporte toujours, au surplus, au cas unique examiné (art. 2) ; il est clair, en effet, qu'on a alors :

$$b'(ax+by)-b(a'x+b'y)=0 \ (*).$$

6. Soient maintenant, entre les trois inconnues x, y, z, les trois équations complètes du premier degré

$$\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z+d\,&=0\,,\\ a'x+b'y+c'z+d'&=0\,,\\ a''x+b''y+c''z+d''&=0\,; \end{aligned}$$

on sait qu'elles donnent, étant résolues,

$$x=-\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,,$$

$$y=-\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,,$$

$$z=-\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,;$$

et ce que nous nous proposons ici est de savoir dans quels cas le problème qui aura conduit à ces équations demeurera indéterminé.

7. Or, il est clair que, pour cela, il faut que les trois équations n'expriment pas trois conditions distinctes ; c'est-à-dire, qu'il faut qu'elles n'équivalent qu'à deux, ou à une seulement ; ce qui fait deux cas qu'il importe extrêmement de ne pas confondre.

Les trois équations peuvent se réduire à deux de deux manières, savoir : 1.° si l'une d'entre elles ne diffère de l'une des deux autres

---

(*) Ces deux cas répondent également, en géométrie, à celui où deux droites tracées sur un même plan passent l'une et l'autre par l'origine des coordonnées ; avec cette différence que, dans le premier elles ne se confondent pas, et que dans le second elles se confondent.

que par un certain multiplicateur ; en sorte qu'en désignant ce multiplicateur par m, on ait $a'x+b'y+c'z+d'=m(ax+by+cz+d)=0$; et encore faut-il alors, pour que le problème soit indéterminé, que la troisième équation ne soit contradictoire avec aucune des deux premières ; puisque, s'il en était ainsi, le problème, loin d'admettre une infinité de solutions, n'en admettrait aucune.

2. Les trois équations se réduiront encore à deux, si l'une d'elles est la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs ; en sorte qu'en désignant ces multiplicateurs par m et m', on ait $a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)+m'(a'x+b'y+c'z+d')$; et encore faut-il alors, pour que le problème soit indéterminé, que deux des trois équations ne soient pas contradictoires ; puisque, s'il en était ainsi, le problème, loin d'admettre une infinité de solutions n'en admettrait au contraire aucune.

Quant à la réduction des trois équations à une seule, elle ne peut avoir lieu que d'une manière unique ; et c'est lorsque l'une d'entre elles est à la fois égale à chacune des deux autres, multipliée par une certaine quantité ; en sorte qu'en désignant par m et m' les deux multiplicateurs, on a, en même temps,

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)=m'(a'x+b'y+c'z+d').$$

Dans ce cas, le problème est toujours possible et il est plus qu'indéterminé, c'est-à-dire, qu'il faut deux conditions nouvelles et distinctes pour en lever l'indétermination, tandis qu'une seule suffit dans le premier cas (*).

8. Soit en premier lieu :

$$a'x+b'y+c'z+d'=m(ax+by+cz+d)=0 ;$$

on aura les équations de condition,

(*) En géométrie, le premier cas répond à celui où, cherchant le point commun à trois plans, il arrive ou que deux de ces plans se confondent, ou que le troisième passe par la commune section des deux premiers. Quant au second cas, il répond à celui où, cherchant le point commun à trois plans, il arrive que ces trois plans se confondent.

$$ma=a', \quad mb=b', \quad mc=c', \quad md=d';$$

desquelles éliminant m, on aura :

$$ad'-da'=0, \quad bd'-db'=0, \quad cd'-dc'=0;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues $a, b, c, d, a', b', c', d'$, pour que les deux premières des trois équations proposées ne soient pas essentiellement différentes l'une de l'autre, et par conséquent n'équivalent qu'à une seule ; ce qui réduit les trois équations proposées à deux, savoir : la troisième et l'une quelconque des deux premières, et rend ainsi le problème indéterminé.

De ces relations on déduit aisément les trois suivantes :

$$ab'-ba'=0, \quad bc'-cb'=0, \quad ca'-ac'=0,$$

dont chacune peut remplacer une quelconque des trois premières ; et, comme les valeurs générales des inconnues x, y, z, peuvent être mises sous cette forme :

$$x=-\frac{(bc'-cb')d''+(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''},$$

$$y=-\frac{(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''+(ad'-da')c''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''},$$

$$z=-\frac{(bd'-db')a''+(da'-ad')b''+(ab'-ba')d''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''};$$

on voit qu'elles deviennent, dans ce cas,

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0}, \quad z=\frac{0}{0}.$$

9. Réciproquement, si l'on a les trois relations

$$ad'-da'=0, \quad bd'-db'=0, \quad cd'-dc'=0;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent les trois suivantes,

$$ab'-ba'=0, \quad bc'-cb'=0, \quad ca'-ac'=0;$$

et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une des deux premières équations sera le produit de l'autre par un certain multiplicateur, qu'on pourra suppposer $\frac{d'}{d}$ pour la première et $\frac{d}{d'}$ pour la seconde; si, en effet, l'on écrit l'équation :

$$a'x+b'y+c'z+d'=\frac{d'}{d}(ax+by+cz+d)\ ,$$

elle deviendra, en chassant le dénominateur et transposant,

$$(ad'-da')x+(bd'-db')y+(cd'-dc')z=0\ ;$$

équation qui, d'après les relations ci-dessus, se reduit à $0=0$.

10. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda' a'=0\ ,\quad \lambda b+\lambda' b'=0\ ,\quad \lambda c+\lambda' c'=0\ ,\quad \lambda d+\lambda' d'=0\ ;$$

et alors λ et λ' pourront tous deux être supposés entiers; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=\pm d'\ ,\qquad \lambda'=\mp d.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les deux premières équations devient :

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')=0\ ;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par l'autre; de manière qu'on peut supprimer indifféremment l'une ou l'autre.

11. Soit ensuite :

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)+m'(a'x+b'y+c'z+d')=0\ ;$$

on aura les équations de condition :

$$a''=ma+m'a'\ ,\quad b''=mb+m'b'\ ,\quad c''=mc+m'c'\ ,\quad d''=md+m'd'\ ;$$

desquelles éliminant d'abord m', il viendra :

$$(ad'-da')m+(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')m+(b'd''-d'b'')=0\ ,$$
$$(cd'-dc')m+(c'd''-d'c'')=0\ ;$$

éliminant ensuite m entre ces dernières, on aura :

$$(ad'-da')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(b'd''-d'b'')=0\ ;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues a, b, c, d, a', b', c', d', a'' b'', c'', d'', pour que chacune des équations proposées soit comportée par les deux autres ; c'est-à-dire, pour que chacune d'elles soit la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs ; ce qui, en permettant d'en supprimer une quelconque, réduit à deux le nombre des équations essentiellement différentes, et rend conséquemment le problème indéterminé.

De ces relations on déduit facilement, en transposant, multipliant et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation-produit,

$$(ad'-da')(b'd''-d'b'')-(bd'-db')(a'd''-d'a'')=0\ ;$$

relation nouvelle, qui peut remplacer une quelconque des deux premières ; en les développant toutes trois, elles deviennent, après les réductions,

$$(ad'-da')c''+(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''=0\ , \quad (1)$$
$$(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''+(bc'-cb')d''=0\ , \quad (2)$$
$$(bd'-db')a''+(da'-ad')b''+(ab'-ba')d''=0\ ; \quad (3)$$

multipliant respectivement ces équations par b, a, c, et prenant la somme des produits, il viendra, en réduisant et divisant par d,

$$(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''=0\ ; \quad (4)$$

relation

relation qu'on pourrait, au surplus, écrire sous cette forme

$$(ac'-ca')(b'c''-b''c')-(bc'-cb')(a'c''-a''c')=0\ ,$$

et qui peut, comme l'équation (3), remplacer une quelconque des deux premières.

Or, en vertu des équations (1), (2), (3), (4), on voit (art. 6) que les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{0}{0}\ ,\qquad y=\frac{0}{0}\ ,\qquad z=\frac{0}{0}.$$

12. Réciproquement, si l'on a les deux relations

$$(ad'-da')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(b'd''-d'b'')=0\ ;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent l'existence des équations (1), (2), (3), (4), et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une quelconque des trois équations proposées sera la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs; ainsi, par exemple, on pourra admettre que la troisième est la somme des produits de la première par $\frac{c'd''-d'c''}{dc'-cd'}$ et de la seconde par $\frac{dc''-cd''}{dc'-cd'}$; si, en effet, l'on écrit l'équation

$$(a''x+b''y+c''z+d'')=\frac{c'd''-d'c''}{dc'-cd'}(ax+by+cz+d)+\frac{dc''-cd''}{dc'-cd'}(a'x+b'y+c'z+d'),$$

elle deviendra, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$\{(c'd''-d'c'')a+(dc''-cd'')a'+(cd'-dc')a''\}x+\{(c'd''-d'c'')b+(dc''-cd'')b'+(cd'-dc')b''\}y=0$$

équation qui, en vertu des relations (1) et (2), se réduit à $0=0$.

13. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda''}$, $m'=-\frac{\lambda'}{\lambda''}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda'a'+\lambda''a''=0\ ,\quad \lambda b+\lambda'b'+\lambda''b''=0\ ,\quad \lambda c+\lambda'c'+\lambda''c''=0\ ,\quad \lambda d+\lambda'd'+\lambda''d''=0\ ;$$

et alors λ, λ', λ'', pourront, tous trois, être supposés entiers; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=c'd''-c''d', \qquad \lambda'=dc''-cd'', \qquad \lambda''=cd'-dc'.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les trois équations devient

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')+\lambda''(a''x+b''y+c''z+d'')=0\ ;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par les deux autres; de manière qu'on peut indifféremment en supprimer une quelconque.

14. Soit enfin

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)=m'(a'x+b'y+c'z+d')=0\ ;$$

on aura les équations de condition

$$a''=m\,a\ ,\quad b''=m\,b\ ,\quad c''=m\,c\ ,\quad d''=m\,d\ ;$$

$$a''=m'a'\ ,\quad b''=m'b'\ ,\quad c''=m'c'\ ,\quad d''=m'd'\ ;$$

desquelles éliminant m et m', il viendra

$$a\,d''-d\,a''=0\ ,\quad b\,d''-d\,b''=0\ ,\quad c\,d''-d\,c''=0\ ;$$

$$a'd''-d'a''=0\ ,\quad b'd''-d'b''=0\ ,\quad c'd''-d'c''=0\ ;$$

Et telles sont les relations nécessaires, entre les quantités connues a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'', pour que chacune des trois équations proposées résulte indifféremment de la multiplication de l'une ou de l'autre des deux restantes par une certaine quantité; c'est-à-dire, pour que chaque équation se trouve, à la fois, comportée par chacune des autres, prise isolément; ce qui, en permettant d'en supprimer deux quelconques, réduit le nombre des équations à une seule, et rend conséquemment le problème plus qu'indéterminé.

De ces relations on déduit facilement celles-ci

$$a\,b''-b\,a''=0\ ,\quad b\,c''-c\,b''=0\ ,\quad c\,a''-a\,c''=0\ ;$$

$$a'b''-b'a''=0\ ,\quad b'c''-c'b''=0\ ,\quad c'a''-a'c''=0\ ;$$

ce qui donne encore

$$ad'-da'=0\ ,\quad bd'-db'=0\ ,\quad cd'-dc'=0\ ;$$

$$ab'-ba'=0\ ,\quad bc'-cb'=0\ ,\quad ca'-ac'=0\ ;$$

et l'on voit qu'en vertu de ces dernières (art. 8), les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{o}{o}\ ,\qquad y=\frac{o}{o}\ ,\qquad z=\frac{o}{o}.$$

15. Réciproquement, si les relations

$$ad''-da''=o\ ,\quad bd''-db''=o\ ,\quad cd''-dc''=o\ ;$$
$$a'd''-d'a''=o\ ,\quad b'd''-d'b''=o\ ,\quad c'd''-d'c''=o\ ;$$

existent, ce qui emportera aussi l'existence des autres, et réduira conséquemment à $\frac{o}{o}$ les valeurs des inconnues ; il arrivera que chacune des trois équations proposée pourra s'obtenir, en multipliant l'une quelconque des deux autres par un multiplicateur convenable ; ainsi, par exemple, on pourra admettre que la troisième est le produit de la première par $\frac{d''}{d}$ et celui de la seconde par $\frac{d''}{d'}$; si, en effet, on écrit les équations

$$a''x+b''y+c''z+d''=\frac{d''}{d}(ax+by+cz+d)\ ,$$
$$a''x+b''y+c''z+d''=\frac{d''}{d'}(a'x+b'y+c'z+d')\ ,$$

elles deviendront, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$(ad''-da'')x+(bd''-db'')y+(cd''-dc'')z=o\ ,$$
$$(a'd''-d'a'')x+(b'd''-d'b'')y+(c'd''-d'c'')z=o\ ;$$

équation qui, en vertu des relations ci-dessus, se réduisent à $o=o$.

16. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda''}$ et $m'=-\frac{\lambda'}{\lambda''}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique

$$\lambda a+\lambda''a''=o\ ,\quad \lambda b+\lambda''b''=o\ ,\quad \lambda c+\lambda''c''=o\ ,\quad \lambda d+\lambda''d''=o\ ,$$
$$\lambda'a'+\lambda''a''=o\ ,\quad \lambda'b'+\lambda''b''=o\ ,\quad \lambda'c'+\lambda''c''=o\ ,\quad \lambda'd'+\lambda''d''=o\ ,$$

et alors λ, λ', λ'', pourront, tous trois, être supposés entiers ; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=\pm d'd''\ ,\qquad \lambda'=\pm d''d\ ,\qquad \lambda''=\mp dd'.$$

En adoptant cette notation, les relations entre les trois équations deviennent

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda''(a''x+b''y+c''z+c'')=o\ ;$$
$$\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')+\lambda''(a''x+b''y+c''z+d'')=o\ ;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune de ces équations se trouve comportée par chacune des autres, ce qui permet d'en supprimer indifféremment deux quelconques.

17. Dans ce qui précède, nous avons tacitement supposé qu'aucune des trois équations proposées n'était dépourvue de son dernier terme; mais lorsqu'au contraire on a $d=d'=d''=0$, c'est-à-dire, lorsque les équations du problème sont

$$ax+by+cz=0\ ,\quad a'x+b'y+c'z=0\ ,\quad a''x+b''y+c''z=0\ ;$$

il y a alors à distinguer les deux cas que voici :

1.° Il peut se faire que les quantités connues a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ne soient pas assujetties à la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

alors la question est déterminée, et elle est résolue par les seules valeurs

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ;$$

ce qui est évident (art. 6).

2.° Il peut se faire, au contraire, que les quantités connues soient assujetties à la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

alors la question est indéterminée, et elle est résolue, non seulement par les valeurs

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ,$$

mais encore par une infinité d'autres représentées par les symboles

$$x=\frac{0}{0}\ ,\quad y=\frac{0}{0}\ ,\quad z=\frac{0}{0}\ ;$$

18. Il est facile de voir (art. 8, 11, 14) 1.° que, si cette relation résulte de ce que

$$ab'-ba'=0\ ,\quad bc'-cb'=0\ ,\quad ca'-ac'=0\ ;$$

ce sera une preuve que les deux premières équations ne sont pas essentiellement différentes; et qu'on peut, en conséquence, supprimer l'une d'elles. Ce serait au contraire la première et la troisième qui seraient équivalentes, si l'on avait

$$ab''-ba''=0\ ,\quad bc''-cb''=0\ ,\quad ca''-ac''=0\ ;$$

enfin les deux dernières seulement seraient équivalentes, si l'on avait uniquement

$$a'b''-b'a''=0\ ,\quad b'c''-c'b''=0\ ,\quad c'a''-a'c''=0.$$

2.° Si, au contraire, cette relation existe sans qu'on ait

$$ab'-ba'=0\,,\ bc'-cb'=0\,,\ ca'-ac'=0\ ;$$

ni $$ab''-ba''=0\,,\ bc''-cb''=0\,,\ ca''-ac''=0\ ;$$

ni conséquemment $$a'b''-b'a''=0\,,\ b'c''-c'b''=0\,,\ c'a''-a'c''=0\ ;$$

on devra en conclure que chacune des équations proposées est comportée par les deux autres, et qu'ainsi on peut indifféremment en supprimer une quelconque des trois.

3.° Si, enfin, cette relation subsiste avec les six relations particulières qui viennent d'être indiquées, ce sera une preuve que toutes ces équations rentrent les unes dans les autres, et que conséquemment il suffit d'en conserver une quelconque.

On voit par là que, lorsque les équations tombent dans le cas du 2.° de l'article 17, elles se rapportent toujours à l'un des cas examinés (art. 8, 11, 14).

19. Nous venons de faire connaître les relations nécessaires et suffisantes entre les coefficiens des équations du premier degré à trois inconnues pour les différens cas d'indétermination dans lesquels ces équations peuvent se trouver; et nous avons fait voir que, dans tous, les valeurs des inconnues se présentaient également sous la forme $\frac{0}{0}$; il est aussi facile qu'important de s'assurer que, réciproquement, lorsque ces trois valeurs se présentent sous cette forme, les équations tombent nécessairement dans l'un des cas d'indétermination que nous avons discutés.

En effet, pour que les valeurs de x, y, z, se présentent toutes trois sous la forme $\frac{0}{0}$, il est nécessaire que les quatre fonctions des coefficiens desquelles elles se composent, soient également zéro, et nous savons (art. 11) qu'il suffit pour cela qu'on ait

$$(ad'-da')c''+(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''=0\,,$$
$$(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''+(bc'-cb')d''=0\,;$$

relations qu'on peut encore écrire ainsi

$$(da''-ad'')c'+(cd''-dc'')a'+(ac''-ca'')d'=0\,,$$
$$(dc''-cd'')b'+(bd''-db'')c'+(cb''-bc'')d'=0\,;$$

ou de cette autre manière

$$(a'd''-d'a'')c+(d'c''-c'd'')a+(c'a''-a'c'')d=0\,,$$
$$(c'd''-d'c'')b+(d'b''-b'd'')c+(b'c''-c'b'')d=0\,;$$

or, nous savons aussi (art. 11) qu'alors les équations proposées tombent au moins dans le cas d'indétermination où elles n'équivalent qu'à deux seulement; et, si l'on n'a uniquement que ces relations, chacune d'elles sera comportée par les deux autres; mais si l'on a

$$ad'-da'=0\,,\qquad bd'-db'=0\,,\qquad cd'-dc'=0\,,$$

ce qui emportera aussi

$$ab'-ba'=0\,,\qquad bc'-cb'=0\,,\qquad ca'-ac'=0\,;$$

ou si l'on a

$$ad''-da''=0\,,\qquad bd''-db''=0\,,\qquad cd''-dc''=0\,;$$

ce qui emportera aussi

$$ab''-ba''=0\,,\qquad bc''-cb''=0\,,\qquad ca''-ac''=0\,;$$

ou, enfin, si l'on a

$$a'd''-d'a''=0\,,\qquad b'd''-d'b''=0\,,\qquad c'd''-d'c''=0\,;$$

ce qui emportera aussi

$$a'b''-b'a''=0\,,\qquad b'c''-c'b''=0\,,\qquad c'a''-a'c''=0\,;$$

il arrivera que deux équations seulement seront équivalentes, savoir: la première et la seconde, dans le premier cas; la première et la troisième, dans le second; et la seconde et la troisième dans le dernier. Enfin, si l'on a, à la fois,

$$ad'-da'=0\,,\qquad bd'-db'=0\,,\qquad cd'-dc'=0\,,$$
$$ad''-da''=0\,,\qquad bd''-db''=0\,,\qquad cd''-dc''=0\,;$$

ce qui emportera aussi

$$a'd''-d'a''=0\,,\qquad b'd''-d'b''=0\,,\qquad c'd''-d'c''=0\,:$$

et, par suite,

$$ab'-ba'=0\,,\qquad bc'-cb'=0\,,\qquad ca'-ac'=0\,,$$
$$ab''-ba''=0\,,\qquad bc''-cb''=0\,,\qquad ca''-ac''=0\,,$$
$$a'b''-b'a''=0\,,\qquad b'c''-c'b''=0\,,\qquad c'a''-a'c''=0\,;$$

alors les trois équations n'équivaudront qu'à une seulement, et conséquemment le problème sera plus qu'indéterminé.

20. Nous n'étendrons pas ces recherches à quatre équations du premier degré renfermant quatre inconnues, ni à un plus grand nombre d'équations du premier degré entre un pareil nombre d'inconnues. Ce que nous venons de dire pour deux et pour trois équations de ce genre, doit mettre sur la voie pour continuer, ou du moins doit faire sentir comment on pourrait continuer. Le principal fruit qu'on peut retirer des recherches de cette nature est de se procurer des caractères pour reconnaître, dans les problèmes qui, bien que le nombre des équations y soit égal au nombre des inconnues, se présentent néanmoins sous une forme indéterminée ; combien il y a d'équations superflues, et quelles sont celles qu'il faut supprimer.

21. Lorsque les équations, toutes dépourvues de dernier terme, tombent dans le cas de simple indétermination, c'est-à-dire, dans le cas où il n'y en a qu'une seule de superflue ; on en peut déduire, si non les valeurs des inconnues, du moins les valeurs de leurs rapports.

Qu'on ait en effet les deux équations

$$ax+by=0\,,\qquad a'x+b'y=0\,,$$

avec la relation

$$ab'-ba'=0$$

elles n'équivaudront qu'à une seule (art. 5), et on en tirera

$$\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}\qquad\text{ou}\qquad\frac{x}{y}=-\frac{b'}{a'}\,;$$

valeurs égales, en vertu de la relation ci-dessus.

22. Pareillement, si l'on a les trois équations

$$ax+by+cz=0\,,\qquad a'x+b'y+c'z=0\,,\qquad a''x+b''y+c''z=0\,;$$

avec la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

ces équations n'équivaudront qu'à deux au plus (art. 17); divisant donc par z, on pourra déterminer $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et conséquemment aussi $\frac{x}{y}$, à l'aide de l'un des trois systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} a\,\frac{x}{z}+b\,\frac{y}{z}+c=0, \\ a'\,\frac{x}{z}+b'\,\frac{y}{z}+c'=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a'\,\frac{x}{z}+b'\,\frac{y}{z}+c'=0, \\ a''\,\frac{x}{z}+b''\,\frac{y}{z}+c''=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a''\,\frac{x}{z}+b''\,\frac{y}{z}+c''=0, \\ a\,\frac{x}{z}+b\,\frac{y}{z}+c=0\ ; \end{array}\right.$$

desquels on tirera :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{z}=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad \frac{y}{z}=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}, \\ \frac{x}{z}=-\frac{c'b''-b'c''}{a'b''-b'a''}, \quad \frac{y}{z}=-\frac{a'c''-c'a''}{a'b''-b'a''}, \\ \frac{x}{z}=-\frac{cb''-bc''}{ab''-ba''}\ ; \quad \frac{y}{z}=-\frac{ac''-ca''}{ab''-ba''}\ ; \end{array}\right\} \text{ et par suite } \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\frac{cb'-bc'}{ac'-ca'}, \\ \frac{x}{y}=\frac{c'b''-b'c''}{a'c''-c'a''}, \\ \frac{x}{y}=\frac{cb''-bc''}{ac''-ca''}\ ; \end{array}\right.$$

valeurs équivalentes, en vertu de la relation ci-dessus. Ces valeurs seront toutes déterminées, si chaque équation est comportée par les deux autres ; mais si, au contraire, deux des équations seulement reviennent l'une à l'autre, c'est-à-dire, si l'on se trouve dans le cas du 1.° de l'art. 18, on trouvera pour un des systèmes

$$\frac{x}{z}=\frac{0}{0}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{0}{0}, \qquad \frac{x}{y}=\frac{0}{0}.$$

Des circonstances analogues se présenteraient, si l'on avait un plus grand nombre d'équations entre un pareil nombre d'inconnues.

22. Lorsqu'on a à résoudre un problème du premier degré qui, bien que son énoncé fournisse autant d'équations que d'inconnues, est néanmoins indéterminé, à raison des relations qui existent entre ses données ; si, pour déterminer les valeurs des inconnues, on a immédiatement

diatement recours aux formules générales, on trouvera pour chacune d'elles, ainsi que nous venons de le voir $\frac{0}{0}$; mais si, au contraire, dans la vue d'obtenir une équation finale ne renfermant plus qu'une seule inconnue, on procède à l'élimination, on arrivera à l'équation finale $0=0$.

En effet, puisque des deux équations

$$ax+by+c=0\ ,\qquad a'x+b'y+c'=0\ ,$$

on déduit

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ;$$

il s'ensuit que l'équation finale x, résultant de l'élimination de y entre ces deux équations, est

$$(ab'-ba')x+(cb'-bc')=0\ ;$$

équation qui devient $0=0$, lorsqu'on a

$$ab'-ba'=0\ ,\qquad cb'-bc'=0\ ;$$

c'est-à-dire, lorsque le problème est indéterminé.

Pareillement, puisque des trois équations

$$ax+by+cz+d=0\ ,\qquad a'x+b'y+c'z+d'=0\ ,\qquad a''x+b''y+c''z+d''=0\ ;$$

on déduit

$$x=-\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\ ,$$

il s'ensuit que l'équation finale en x, résultant de l'élimination de y et z entre ces trois équations, est

$$(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')x+(db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd'')=0\ ;$$

équation qui devient aussi $0=0$, lorsqu'on a, à la fois,

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ,$$
$$db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''=0\ ;$$

c'est-à-dire, lorsque le problème est indéterminé.

Il en serait de même pour un plus grand nombre d'équations du premier degré, entre un nombre égal d'inconnues, et on pourrait prouver que le même caractère d'indétermination se manifeste aussi, dans les problèmes des degrés supérieurs au premier.

23. Nous allons maintenant appliquer les principes qui viennent d'être développés aux trois équations

$$x=bz+cy\ ,\qquad y=cx+az\ ,\qquad z=ay+bx\ ;$$

En les écrivant ainsi :

$$x-cy-bz=0\ ,\qquad -cx+y-az=0\ ,\qquad -bx-ay+z=0\ ;$$

et les comparant à celles de l'art. 6, on aura

$$\begin{array}{lll} a=\ 1\ , & b=-c\ , & c=-b\ , \\ a'=-c\ , & b'=\ 1\ , & c'=-a\ , \\ a''=-b\ , & b''=-a\ , & c''=\ 1\ ; \end{array}$$

en conséquence, la fonction

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$$

deviendra

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc\ ;$$

suivant donc que cette fonction sera ou ne sera pas zéro, le problème sera ou ne sera pas indéterminé.

Si cette fonction n'est zéro qu'à cause des relations particulières

$$a+bc=0\ ,\qquad b+ac=0\ ,\qquad 1-c^2=0\ ;$$

les deux premières équations seront équivalentes. Ce sera la première et la troisième qui le seront, si l'on a

$$c+ab=0\ ,\qquad a+bc=0\ ,\qquad 1-b^2=0\ ;$$

et ce sera la seconde et la troisième, si l'on a

$$b+ac=0\ ,\qquad c+ab=0\ ,\qquad 1-a^2=0\ ;$$

Si ces relations ont toutes lieu à la fois, les trois équations n'équivaudront qu'à une seulement; et si aucune d'elles n'a lieu, et que cependant on ait

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\ ,$$

chaque équation sera comportée par les deux autres, et deux quelconques pourront remplacer les trois.

24. Dans ce dernier cas, on pourra assigner les valeurs de $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, et, par suite, celle de $\frac{z}{x}$. En faisant les substitutions convenables dans les formules de l'art. 21, on trouvera :

$$\frac{x}{y}=\frac{b+ac}{a+bc}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{a+bc}{1-c^2}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{1-c^2}{b+ac};$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1-a^2}{c+ab}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{c+ab}{b+ac}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{b+ac}{1-a^2};$$

$$\frac{x}{y}=\frac{c+ab}{1-b^2}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{1-b^2}{a+bc}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{a+bc}{c+ab}.$$

De ces expressions on déduira encore les suivantes:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-c^2}}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-a^2}};$$

valeurs qui peuvent être exprimées rationnellement, au moyen des formules précédentes.

24. Soient A, B, C, trois angles; et, en supposant le rayon égal à l'unité, faisons

$$a=\text{Cos.A}, \qquad b=\text{Cos.B}, \qquad c=\text{Cos.C};$$

les équations du problème seront

$$(\text{T}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=y\text{Cos.C}+z\text{Cos.B}, \\ y=z\text{Cos.A}+x\text{Cos.C}, \\ z=x\text{Cos.B}+y\text{Cos.A}; \end{array} \right.$$

et on aura, d'après les dernières formules,

$$\frac{x}{y}=\frac{\text{Sin.A}}{\text{Sin.B}}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\text{Sin.B}}{\text{Sin.C}}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{\text{Sin.C}}{\text{Sin.A}};$$

on pourra donc admettre que x, y, z, sont les trois côtés d'un triangle rectiligne, et A, B, C, les angles qui leur sont respectivement opposés, et alors les équations (T) seront des équations de relation entre les uns et les autres.

25. Mais il ne faut pas perdre de vue, art. 22, que tout cela est subordonné à la condition.

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\ ,$$

laquelle devient, dans le cas actuel,

$$1-\text{Cos.}^2\text{A}-\text{Cos.}^2\text{B}-\text{Cos.}^2\text{C}-2\text{Cos.A Cos.B Cos.C}=0\ ;$$

il importe donc de s'assurer que cette condition se vérifie pour le triangle rectiligne; et il faut bien qu'elle se vérifie en effet, puisqu'autrement les équations (T) donneraient uniquement $x=0$, $y=0$, $z=0$; ce qui reviendrait à dire que, dans tout triangle, les trois côtés sont nécessairement nuls.

Or, cette condition peut être mise successivement sous les diverses formes que voici :

$$(1-\text{Cos.}^2\text{A})(1-\text{Cos.}^2\text{B})=(\text{Cos.C}+\text{Cos.A Cos.B})^2\ ,$$

$$\mp\text{Sin.A Sin.B}=\text{Cos.C}+\text{Cos.A Cos.B}\ ,$$

$$-(\text{Cos.A Cos.B}\pm\text{Sin.A Sin.B})=\text{Cos.C}\ ,$$

$$\text{Cos.C}=-\text{Cos.}(\text{A}\mp\text{B}).$$

Cette dernière équation ne peut être prise avec le signe supérieur; car, en supposant $\text{B}=\text{A}$, elle deviendrait $\text{Cos.C}=-\text{Cos.}0=-1$; d'où l'on tire en général $\text{C}=(2k+1)180^\circ$, $2k+1$ étant un nombre impair positif quelconque; mais on a $\text{C}<180^\circ$, on devrait donc avoir $2k+1<1$, tandis qu'il n'y a point de nombre impair positif plus petit que l'unité; on doit donc avoir simplement

$$\text{Cos.C}=-\text{Cos.}(\text{A}+\text{B}).$$

De cette dernière équation on tire, en général,

$$\text{C}=(2k+1)180^\circ-(\text{A}+\text{B})\ ,$$

ou

$$\text{A}+\text{B}+\text{C}=(2k+1)180^\circ\ ;$$

$2k+1$ étant toujours un nombre impair positif; mais, à cause de $A<180°$, $B<180°$, $C<180°$, on a $A+B+C<3.180°$, et conséquemment $2k+1<3$, d'où $k=0$ et, par suite,

$$A+B+C=180° \;;$$

il serait donc démontré par là, si déjà on ne le savait, que, dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles vaut deux angles droits, et est par conséquent une quantité constante; et c'est à cela, comme on le voit, que tient l'impossibilité de déterminer les côtés d'un tel triangle, par la seule connaissance des trois angles.

26. Si, comme il paraît plus naturel de le faire, on suppose antérieurement connu le théorème qui vient d'être démontré, on pourra, en le combinant avec l'équation de relation, en déduire une autre proposition beaucoup moins élémentaire. De l'équation

$$A+B+C=180° \;,$$

on tire, en effet,

$$C=180°-(A+B) \qquad \text{d'où} \qquad \text{Cos.}C=-\text{Cos.}(A+B) \;;$$

mais on a (art. 25)

$$\text{Cos.}C=-(\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\pm\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B) \;;$$

donc

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\pm\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \;;$$

or, on ne peut avoir

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B+\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \;,$$

puisqu'en faisant $A=90°$, et supposant $B<90°$, il viendrait

$$\text{Cos.}(90°+B)=\text{Sin.}B \;,$$

équation qui ne peut être admise, puisque $\text{Cos.}(90°+B)$ doit être négatif, et que $\text{Sin.}B$ ne l'est pas; on a donc uniquement

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B-\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B.$$

De là on conclura facilement

$$\text{Cos.}(A-B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B+\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \;;$$

et, par suite,

$$\mathrm{Sin.}(A \pm B) = \mathrm{Sin.}A\,\mathrm{Cos.}B \pm \mathrm{Cos.}A\,\mathrm{Sin.}B.$$

27. En étendant la remarque qui termine l'art. 25, il est aisé de sentir qu'en général, toutes les fois que la solution d'un problème dépend d'un nombre déterminé de données indépendantes les unes des autres, si l'on choisit des données telles qu'il y ait entre elles une ou plusieurs relations nécessaires, le problème demeurera indéterminé, puisqu'on sera dans le même cas que si l'on avait moins de données que ne le comporte la nature du problème.

Ainsi, parce que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est une quantité connue et constante, lorsqu'on donne ces trois angles, on n'en donne réellement que deux, et le triangle demeure indéterminé. Au contraire, cette somme étant variable, dans le triangle sphérique, ses trois angles lorsqu'ils sont connus, sont trois données indépendantes qui rendent ce triangle absolument déterminé.

28. En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on a, pour le triangle sphérique, ainsi que je l'ai démontré, dans ma *Trigonométrie sphérique analitique*,

$$1-\mathrm{Cos.}^2A-\mathrm{Cos.}^2B-\mathrm{Cos.}^2C-2\mathrm{Cos.}A\,\mathrm{Cos.}B\,\mathrm{Cos.}C=\mathrm{Sin.}^2z\,\mathrm{Sin.}^2A\,\mathrm{Sin}^2B \quad (*)$$

et, comme on a évidemment

$$\mathrm{Sin.}^2z\,\mathrm{Sin.}^2A\,\mathrm{Sin.}^2B>0\ ;$$

on aura, semblablement,

$$1-\mathrm{Cos.}^2A-\mathrm{Cos.}^2B-\mathrm{Cos.}^2C-2\mathrm{Cos.}A\,\mathrm{Cos.}B\,\mathrm{Cos.}C>0$$

(*) On a en effet, (*Voyez page* 103 *de ce volume*),

$$1-\mathrm{Cos.}^2x-\mathrm{Cos.}^2y-\mathrm{Cos.}^2z+2\mathrm{Cos.}x\,\mathrm{Cos.}y\,\mathrm{Cos.}z=\mathrm{Sin.}^2C\,\mathrm{Sin.}^2x\,\mathrm{Sin.}^2y$$

ce qui, en passant au triangle polaire ou supplémentaire, donne l'équation ci-dessus.

ce qui, en procédant comme en l'art. 26, donnera, en premier lieu,

$$A+B+C>180^\circ\,;$$

on aura ensuite, comme dans le triangle rectiligne, $A+B+C<3.180^\circ$. Ce qui prouve, comme nous l'avons annoncé, que, dans le triangle sphérique, la somme des trois angles n'est pas une quantité constante, comme dans le triangle rectiligne.

29. Lorsqu'un problème est indéterminé ou plus qu'indéterminé, il est évident qu'on en peut lever l'indétermination, en se donnant, à volonté, une ou plusieurs inconnues.

Mais, en même temps, il faut avoir soin de prendre, pour les connues, des quantités qui satisfassent aux relations qu'on sait devoir alors subsister entre elles.

30. Appliquons ces principes à la résolution des équations ci-dessus

$$x=bz+cy\,,\qquad y=cx+az\,,\qquad z=ay+bx.$$

En supposant le problème indéterminé, il faut qu'on ait, comme nous l'avons dit (art. 23)

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\,;$$

équation qui, en supposant a et b quelconque, donne

$$c=-ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\,;$$

d'où l'on voit que, a et b étant donnés, c ne peut plus être pris arbitrairement.

Ces deux valeurs de c peuvent être également admises en général; mais si l'on suppose que a, b, c, soient les cosinus des trois angles d'un triangle rectiligne, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le signe inférieur du radical devra être rejeté, puisqu'il donnerait $\text{Cos.}C=-\text{Cos.}(A-B)$, au lieu de $\text{Cos}C=-\text{Cos.}(A+B)$ que l'on doit avoir; nous ne prendrons donc simplement que

$$c=-ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}.$$

31. Puisque c est donné par une fonction irrationnelle de a et b, supposés quelconques, on peut s'imposer la loi de ne prendre pour

c que des quantités rationnelles ; alors a et b devront être déterminés en conséquence de cette nouvelle condition, ensorte qu'ils ne pourront plus être quelconques.

Pour rendre rationnelle $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$ il faut rendre séparément rationnels $\sqrt{1-a^2}$ et $\sqrt{1-b^2}$; on y parvient en faisant

$$\sqrt{1-a^2}=\frac{m}{n}(1+a)\,,\qquad \sqrt{1-b^2}=\frac{p}{q}(1+b)\,;$$

on obtient ainsi

$$a=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\,,\qquad b=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}\,;$$

et, par suite,

$$c=-\frac{(n^2-m^2)(q^2-p^2)-4mnpq}{(n^2+m^2)(q^2+p^2)}\,;$$

formules dans lesquelles il suffit de prendre pour m, n, p, q, des nombres entiers quelconques.

Supposant donc que z est donné, on trouvera (art. 23),

$$x=\frac{c+ab}{a+bc}z\,,\qquad y=\frac{c+ab}{b+ac}z\,;$$

ce qui donnera, en substituant

$$x=\frac{mn(q^2+p^2)z}{pq(n^2-m^2)+mn(q^2-p^2)}\,,\qquad y=\frac{pq(n^2+m^2)z}{pq(n^2-m^2)+mn(q^2-p^2)}\,;$$

au surplus, pour éviter les fractions, on pourra faire

$$x=mn(q^2+p^2)\,,\qquad y=pq(n^2+m^2)\,,\qquad z=mn(q^2-p^2)+pq(n^2-m^2)\,;$$

telles sont donc les formules générales qu'il faut employer pour obtenir des triangles dont les trois côtés soient des nombres rationnels et entiers, et dont les angles se trouvent avoir, tant pour leurs sinus que pour leurs cosinus, des nombres rationnels.

Si, par exemple, on suppose, $n=2$, $m=1$, $q=3$, $p=2$, il viendra

$$x=26\,,\qquad y=30\,,\qquad z=28\,;$$

et

et ensuite

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos.}A=\dfrac{3}{5}\,, \\[2ex] \text{Cos.}B=\dfrac{5}{13}\,, \\[2ex] \text{Cos.}C=\dfrac{33}{65}\,; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} \text{Sin.}A=\dfrac{4}{5}=0{,}800\ 0000\,, \\[2ex] \text{Sin.}B=\dfrac{12}{13}=0{,}923\ 0715\,, \\[2ex] \text{Sin.}C=\dfrac{56}{65}=0{,}861\ 5384\,; \end{array}\right.$$

ce qui, en consultant les tables, donne

$$\left.\begin{array}{l} A=53^\circ\ \ 7'\ 48''\,, \\ B=67^\circ\ 22'\ 46''\,, \\ C=59^\circ\ 29'\ 24''\,; \end{array}\right\}\ \text{somme}=179^\circ\ 59'\ 58''\,;$$

c'est-à-dire, à $2''$ près, $A+B+C=180^\circ$. Cette légère différence tient, comme l'on sait, à ce que les valeurs des angles, déduites de leurs sinus, ne sont, en général, qu'approchées.

32. On pourrait, relativement aux problèmes des degrés supérieurs au premier, se livrer à des recherches analogues à celles qui viennent de nous occuper; mais l'étendue de ce mémoire, déjà peut-être trop long, nous force de terminer ici.

QUESTIONS RÉSOLUES. (*)

Solution du problème énoncé à la page 127 de ce volume.

Par M. *** GERGONNE

Enoncé. Partager un tétraèdre en deux parties équivalentes, par un plan qui coupe deux couples d'arêtes opposées, de manière que l'aire de la section soit un *minimum* ?

Solution. Soit partagé les quatre arêtes dont il s'agit en deux parties égales ; il est aisé de voir que leurs milieux seront les sommets des angles d'un parallélogramme, et seront conséquemment dans un même plan parallèle, à la fois, aux deux arêtes restantes ; d'où il résulte que ce plan partagera le tétraèdre en deux troncs de prismes triangulaires.

Or il arrivra, à la fois, 1.° que ce même plan partagera le tétraèdre en deux parties équivalentes ; 2.° que parmi tous les plans qui, coupant les mêmes arêtes, satisferont à cette condition, celui-là donnera une section dont l'aire sera un *minimum*. (**)

Si les arêtes sur lesquelles doivent être situés les sommets des angles de la section ne sont pas désignées, le problème sera susceptible de trois solutions, parce que, dans un tétraèdre, il y a trois manières de choisir deux couples d'arêtes opposées. (***)

(*) Les rédacteurs n'ont encore reçu aucune solution du problème énoncé à la page 126 de ce volume.

(**) On propose de démontrer ces deux théorèmes.

(***) On propose de déterminer quelle est celle des trois solutions qui répond au *minimum-minimorum*

Solution du problème énoncé à la page 128 *de ce volume.*

Par un Abonné. Gergonne

Énoncé. Deux points étant donnés, déterminer l'équation la plus générale des courbes planes qui, passant par ces deux points, sont telles que l'espace mixtiligne compris entre l'arc qui s'y termine et sa corde, soit équivalent à une surface donnée ?

Solution. Soit P et P′ ces deux points, et rapportons-les à deux axes rectangulaires ou obliques ; soit alors (a, b) les coordonnées du premier, et (α, β) celles du second.

On connaîtra ainsi le trapèze compris entre la droite qui joint ces deux points, leurs ordonnées et l'axe des x ; et l'aire de ce trapèze sera $\frac{1}{2}(b+\beta)(a-\alpha)$.

Puis donc que l'on connaît aussi l'aire du segment compris entre l'arc qui se termine à ces deux points et sa corde, on doit connaître également l'aire du quadrilatère mixtiligne compris par l'arc de courbe, les ordonnées des deux extrémités de cet arc et l'axe des abscisses : l'aire de ce quadrilatére étant la somme ou la différence de l'aire du trapèze et de celle du segment.

Soit donc représenté cette dernière quantité par k^2, et soit désigné par F, f, φ, trois fonctions absolument arbitraires, mais nécessairement différentes, de l'abscisse x ; soit enfin désigné par F', f', φ', les coefficiens différentiels ou *fonctions-primes* de ces fonctions, l'équation demandée sera :

$$\begin{aligned}
&\{(\mathrm{F}a-\mathrm{F}\alpha)(f'a\varphi'\alpha-f'\alpha\varphi'a)+(fa-f\alpha)(\varphi'a\mathrm{F}'\alpha-\varphi'\alpha\mathrm{F}'a)+(\varphi a-\varphi\alpha)(\mathrm{F}'af'\alpha-\mathrm{F}'\alpha f'a)\}y\\
&\quad=\{k^2(f'a\varphi'\alpha-f'\alpha\varphi'a)+(fa-f\alpha)(\beta\varphi'a-b\varphi'\alpha)+(\varphi a-\varphi\alpha)(bf'\alpha-\beta f'a)\}\mathrm{F}'x\\
&\quad+\{k^2(\varphi'a\mathrm{F}'\alpha-\varphi'\alpha\mathrm{F}'a)+(\varphi a-\varphi\alpha)(\beta\mathrm{F}'a-b\mathrm{F}'\alpha)+(\mathrm{F}a-\mathrm{F}\alpha)(b\varphi'\alpha-\beta\varphi'a)\}f'x\\
&\quad+\{k^2(\mathrm{F}'af'\alpha-\mathrm{F}'\alpha f'a)+(\mathrm{F}a-\mathrm{F}\alpha)(\beta f'a-bf'\alpha)+(fa-f\alpha)(b\mathrm{F}'\alpha-\beta\mathrm{F}'a)\}\varphi'x.
\end{aligned}$$ (*)

(*) On propose de couvrir l'analise qui a pu conduire à ce résultat.

En effet, 1.° il est facile de se convaincre que cette équation est également satisfaite par les valeurs $x=a$, $y=b$, et par les valeurs $x=\alpha$, $y=\beta$, et qu'ainsi la courbe qu'elle exprime passe par les deux points donnés.

2.° Il n'est pas plus difficile de se convaincre qu'en substituant la valeur de y, tirée de cette équation, dans la formule $\int y\,dx$, et intégrant, entre $x=a$ et $x=\alpha$, on obtiendra k^2 pour résultat, ainsi qu'il était encore exigé.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

DEUX canaux rectilignes se coupent sous une inclinaison déterminée, et une ville se trouve située, d'une manière connue, dans l'un des quatre angles formés par leur intersection.

On veut établir deux ponts sur ces canaux, et construire une route de communication de ces deux ponts à la ville pour l'usage de laquelle ils sont destinés.

Il s'agit de déterminer en quels lieux il faut établir ces deux ponts, et de quelle manière on doit diriger les branches de la route, pour que la longueur totale de celle-ci soit la moindre possible ? (*)

Théorème de Géométrie.

Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux des deux diagonales passe par l'intersection des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

(*) On peut généraliser ce problème, en supposant les deux canaux de figure quelconque.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Méthodes directes pour résoudre cette question : Étant donnée, d'espèce et de position dans l'espace, une surface du premier ou du second ordre, placée comme on voudra par rapport aux plans coordonnés, établir l'équation numérique de cette surface, relativement à sa situation actuelle ?

(Article faisant suite à la question traitée à la page 180 de ce volume.)

Par M. RAYMOND, Principal et Professeur de mathématiques du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

APRÈS avoir exposé le moyen d'établir les équations numériques des courbes du second degré, données sur un plan, il est naturel d'appliquer la même marche à l'espace, en traitant quelques exemples propres à mettre les élèves sur la voie. Ce n'est pas que cette recherche soit susceptible de difficultés ; mais il nous a paru convenable de compléter l'article que nous avons donné précédemment.

10. 1.° *Pour le plan.* L'équation générale du plan est, comme l'on sait,

$$Az+By+Cx+D=0.$$

Si l'on a un plan qui passe par les axes des x, des y, et des z, à des distances de l'origine des coordonnées, indiquées par les nombres respectifs 3, 2, 5, on aura, dans ce cas,

$$-\frac{D}{A}=5\,; \quad -\frac{D}{B}=2\,, \quad -\frac{D}{C}=3\,,$$

d'où l'on tire ces relations

$$5A=2B=3C=-D\;;$$

donnant donc à D la valeur que l'on voudra, on déterminera les quatre coefficiens de l'équation du plan. Faisant, par exemple, $D=1$, on aura

$$A=-\frac{1}{5}\,, \quad B=-\frac{1}{2}\,, \quad C=-\frac{1}{3}\,,$$

ce qui donnera

$$6z+15y+10x-30=0\,,$$

pour l'équation du plan proposé.

C'est avec la même facilité que l'on établirait l'équation, si l'on avait pour données les valeurs des angles respectifs du plan proposé avec les plans coordonnés.

Il est inutile de s'arrêter à des considérations de cette nature ; passons aux surfaces du second ordre.

11. On sait que l'équation générale des surfaces du second ordre, résolue par rapport à z, donne :

$$z=-\left\{\frac{By+B'x+C}{2A}\right\}$$
$$\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left\{y^2+\frac{2(BB'-2AB'')}{B^2-4AA'}xy+\frac{(B'^2-4AA'')}{B^2-4AA'}x^2+\frac{2(BC-2AC')}{B^2-4AA'}y+\frac{2(B'C-2AC'')}{B^2-4AA'}x+\frac{C^2-4AF}{B^2-4AA'}\right\}}$$

et que le plan-diamètre de la surface a ainsi pour équation

$$z=-\left\{\frac{By+B'x+C}{2A}\right\}.$$

L'intersection de ce plan avec la surface appartient également au cylindre tangent qui limite cette surface et qui la projète sur le plan des xy. On obtient l'équation de cette intersection, en égalant à zéro le polynome en xy qui est sous le signe radical de la valeur de z ; et l'équation résultante, indépendante de z, appartient, à la fois, à tout le cylindre projetant et à la projection même de la surface sur le plan des xy. Ces choses étant rappelées, nous pouvons passer aux exemples.

12. 2.° *Pour l'ellipsoïde.* Soit ILI'L' (fig. 1) la projection, sur le plan des xy, d'un ellipsoïde disposé de manière que son grand axe soit parallèle au plan des xy, et élevé au-dessus de ce plan d'une quantité égale à 4. Soient

$$AB=2\,,\quad AB'=4\,,\quad BI=1\,,\quad OL=1.$$

L'ellipse ILI'L' aura pour équation (2) :

$$y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8=0.$$

Le plan-diamètre, parallèle au plan des xy, aura pour équation (10) :

$$z=4\,,$$

en sorte que l'équation de la surface sera de la forme

$$z=4\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}.$$

Il ne restera donc plus qu'à déterminer le facteur $\frac{B^2-4AA'}{4A^2}$, ce qui se fera comme il suit.

Les coordonnées x et y, relatives au centre de l'ellipsoïde, sont ici

$$AC=3\,,\qquad CO=\tfrac{3}{2}\,;$$

faisant donc $x=3$, $y=\frac{3}{2}$, dans le polynome en xy ci-dessus, la valeur du radical deviendra alors celle du demi-second-axe de la surface. Exécutant donc la substitution, et supposant le demi-second-axe égal à l'unité, il faudra poser

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\times-1}=1\,,\quad \text{d'où}\quad \frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1\,;$$

au moyen de quoi l'équation de la surface deviendra

$$z=4\pm\sqrt{-(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8)}\,,$$

ou

$$4z^2-4xy+4y^2+5x^2-32z-24x+96=0\,;$$

équation cherchée, que l'on vérifiera aisément par la discussion.

On obtiendrait une équation toute differente, si, sous la même projection, on supposait, au second axe de l'ellipsoïde, une autre valeur que celle que nous lui avons assignée.

13. Supposons que la même projection de la figure 1.re appartienne à un ellipsoïde incliné sur les trois plans coordonnés, tel que son plan-diamètre, parallèle à l'axe des y, fasse, avec le plan des xy, un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$, et passe sur l'axe des z à une hauteur égale à l'unité, l'équation de ce plan sera :

$$z=\tfrac{1}{2}x+1 \;;$$

celle de la surface sera donc de la forme

$$z=\tfrac{1}{2}x+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8\right)} \;;$$

et, le second axe étant encore supposé égal à 2, on aura, comme précédemment

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1 \;,$$

ce qui donnera définitivement pour l'équation cherchée

$$z=\tfrac{1}{2}x+1\pm\sqrt{-\left(y^2-xy+\tfrac{5}{4}x^2-6x+8\right)} \;,$$

ou

$$4z^2-4zx-4xy+4y^2+6x^2-8z-20x+36=0.$$

14. Soit le point conjugué O (fig. 2), considéré comme le résultat de la contraction totale d'un ellipsoïde situé au-dessous du plan des xy, et projeté sur ce plan au point O'; soit le plan-diamètre passant par les points D, E, F, de telle sorte que l'on ait

$$AD=1 \;,\qquad AE=2 \;,\qquad AF=1 \;;$$

soient enfin

$$AC=2 \;,\qquad CO'=3 \;,$$

le plan-diamètre aura pour équation :

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1 \;;$$

l'équation de la projection O′ sera (3) :

$$y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4=0\ ,$$

de manière que celle de l'ellipsoïde O sera de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4)}.$$

Substituant donc, dans le polynome en xy, les valeurs de AC et CO′, et égalant le radical à zéro, à cause de l'évanouissement des axes de l'ellipsoïde, il viendra

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=\frac{0}{0}\ ;$$

en donnant donc à ce facteur une valeur arbitraire ; en le faisant, par exemple, et pour plus de simplicité, égal à -1, on aura

$$z=-\tfrac{1}{2}y-x+1\pm\sqrt{-(y^2-3xy+\tfrac{11}{4}x^2-4x+4)}\ ,$$

d'où

$$4z^2+4zy+8zx-8xy+5y^2+17x^2-8z-4y-24x+20=0\ ,$$

équation cherchée.

15. 3.° *Pour l'hyperboloïde.* Soit un hyperboloïde à deux nappes, projeté sur le plan des xy, comme on le voit (fig. 3) et de telle façon que l'on ait

$$AB=7\ ,\qquad AB'=1\ ,\qquad AD=AO=4\ ,\qquad OL=4.$$

L'équation de la projection sera

$$y^2+2xy+\tfrac{5}{9}x^2-8y-\tfrac{48}{9}x+\tfrac{116}{9}=0.$$

Supposons que le plan-diamètre, parallèle à l'axe des x, fasse avec le plan des xy un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$, qu'il s'élève du côté des y négatives et passe sur l'axe des z, au-dessus du point A, à une hauteur égale à 1 ; ce plan diamètre aura pour équation

$$z=-\tfrac{1}{2}y+1\ ;$$

l'équation de la surface sera donc de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y+1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left(y^2+2xy+\tfrac{5}{9}x^2-8y-\tfrac{40}{9}x+\tfrac{116}{9}\right)}\ ;$$

faisant, dans le polynome en xy, $x=AO=4$, $y=0$, et égalant le radical à la valeur du demi-second-axe, supposée égale à 4, et rendue imaginaire, on trouvera

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1\ ,$$

ce qui donnera, pour l'équation cherchée,

$$36z^2+36zy+72xy+45y^2+20x^2-72z-324y-160x+500=0.$$

16. Soient les deux droites OS et OR (fig. 4), considerées comme les traces, sur le plan des xy, d'un système de deux plans tangens à la surface d'un cône, et projetant cette surface sur ce plan ; soient

$$AD=3\ ,\qquad AE=6\ ,\qquad AC=\tfrac{3}{2}\ ,\qquad OC=3\ ;$$

les droites OS et OR auront respectivement pour équations

$$y+2x-6=0\ ,\qquad y-2x=0.$$

Multipliant ces deux équations par ordre, on aura pour équation de la projection

$$y^2-4x^2-6y+12x=0.$$

Si l'on suppose maintenant que le plan-diamètre, en vertu des données convenables, ait pour équation

$$z-4y-6x=0\ ,$$

l'équation de la surface conique sera de la forme

$$z=4y+6x\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}\left(y^2-4x^2-6y+12x\right)}\ ;$$

substituant, sous le radical, les valeurs de AC et CO, et égalant ce radical à zéro, on trouvera

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=\frac{0}{0}\ ;$$

faisant donc, pour plus de simplicité

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1 ,$$

l'équation cherchée deviendra

$$z=4y+6x\pm\sqrt{-(y^2-4x^2-6y+12x)} ,$$

ou

$$z^2-8zy-12zx+48xy+17y^2+32x^2-6y+12x=0.$$

17. 4.° *Pour le paraboloïde.* Soit NIN′ (fig. 5) la projection, sur le plan des xy, d'un paraboloïde tellement situé que l'on ait

$$AD=2 , \quad AB=5 , \quad AE=3 ;$$

et soit le paramètre $NN'=4\sqrt{13}$, d'où l'on déduira

$$AC=7 , \quad CO=\tfrac{11}{2}.$$

L'équation de la projection sera

$$y^2-3xy+\tfrac{2}{4}x^2+6y-35x+139=0.$$

Supposons que le plan-diamètre passant par l'axe des x fasse, avec le plan des xy, du côté des y négatives, un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $\frac{1}{2}$; l'équation de ce plan sera

$$z=-\tfrac{1}{2}y ,$$

et celle du paraboloïde sera de la forme

$$z=-\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AA')}{4A^2}(y^2-3xy+\tfrac{2}{4}x^2+6y-35x+139)}.$$

Substituant, dans le polynome en xy les valeurs de $AC=7$ et de $CO=\frac{11}{2}$, et égalant le radical à $2\sqrt{13}$, valeur supposée du demi-paramètre, on trouvera, toutes réductions faites,

$$\frac{B^2-4AA'}{4A^2}=-1 ,$$

ce qui donnera

$$z=-\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{-(y^2-3xy+\tfrac{9}{4}x^2+6y-35x+139)}\ ,$$

ou enfin

$$4z^2-4zy-12xy+5y^2+9x^2+24y-140x+556=0.$$

Nous laissons aux élèves le soin de varier davantage les données ; ils peuvent se proposer, par exemple, l'hyperboloïde à deux nappes, situé dans le sens des z, l'hyperboloïde à une seule nappe, le paraboloïde hyperbolique, etc.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes énoncés à la page 159 de ce volume;

Par M. Lhuilier, Professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Énoncé. Partager, *PAR LES ÉLÉMENS*, un cercle donné, en un nombre proposé quelconque de parties, égales entre elles, tant en surface qu'en contour ?

Solution. Le nombre des polygones réguliers qu'on peut inscrire au cercle, par la géométrie élémentaire, est très-limité (malgré la belle découverte de Gauss) ; donc aussi le nombre des manières de partager un cercle en secteurs égaux entre eux est fort borné, du moins tant qu'on ne voudra employer que les voies élémentaires, c'est-à-dire, la règle et le compas.

Que le rayon d'un cercle soit coupé en parties inégales entre elles, de manière que les quarrés des distances des points de division au centre croissent comme les nombres naturels. Soient ensuite décrits des cercles,

cercles, concentriques au cercle donné, dont les rayons soient les distances de son centre aux points de division ; les couronnes circulaires terminées par deux circonférences voisines seront toutes égales en surface, mais elles ne le seront pas en contour.

Comme la surface d'un segment de cercle est la moitié du rectangle du rayon par l'excès de l'arc sur son sinus, la section d'un cercle en parties égales en surface, par des chordes parallèles entre elles, est un problème transcendant dont on ne peut obtenir la solution que par des voies de tâtonnement et d'approximation. Il est aisé de voir d'ailleurs que les parties d'un cercle ainsi divisé ne sauraient être égales en contour.

Il en irait absolument de même si l'on voulait diviser le cercle en parties égales par des chordes partant du même point de sa circonférence, ou par des droites partant d'un point intérieur autre que son centre.

La solution élémentaire du problème proposé paraît donc ne pouvoir reposer que sur les seules considérations suivantes :

1.° Les circonférences des cercles (et partant aussi leurs demi-circonférences) croissent comme leurs rayons. Si donc les rayons d'une suite de cercles suivent une progression arithmétique, leurs demi-circonférences suivront aussi une progression arithmétique, et conséquemment la somme de deux demi-circonférences, également distantes des extrêmes, sera une quantité constante et égale à la somme des demi-circonférences extrêmes.

2.° Les surfaces des cercles (et partant aussi celles des demi-cercles) croissent comme les quarrés de leurs rayons. Si donc les rayons d'une suite de cercles croissent comme les nombres naturels, les différences consécutives des aires de ces cercles (et partant aussi celles des aires des moitiés de ces cercles) suivront la progression arithmétique des nombres impairs. Ainsi les sommes des différences également distantes du plus petit demi-cercle et de la différence des deux plus grands, seront une quantité constante et égale à cette différence des deux plus grands demi-cercles, augmentée du plus petit.

Ces principes établis, la construction du problème proposé se réduit à ce qui suit :

Construction. Soit mené un diamètre du cercle donné, et soit divisé ce diamètre en autant de parties égales qu'on veut obtenir de portions de cercles égales à la fois en surface et en contour.

Sur les distances des points de division à l'une des extrémités du diamètre, prises elles-mêmes pour diamètres, soient décris des demi-cercles, tous situés d'un même côté du diamètre divisé.

Soit fait la même opération de l'autre côté de ce diamètre, mais à partir de son autre extrémité, c'est-à-dire en sens inverse.

Il est d'abord clair que le cercle donné se trouvera partagé en autant de parties qu'on aura fait de divisions dans son diamètre, c'est-à-dire, en autant de parties qu'on s'était proposé d'en faire.

De plus, chacune des deux courbes qui termineront chaque partie, se trouvant être la somme de deux demi-circonférences également distantes des extrêmes, sera égale à la demi-circonférence du cercle donné, d'où il suit que le contour total de chaque partie sera égal à la circonférence même de ce cercle.

Enfin, chaque partie du cercle divisé étant la somme de deux différences de demi-cercles également distans des extrêmes, toutes ces parties seront égales en surface, ainsi qu'il était demandé.

L'inspection de la figure 6 où le cercle se trouve divisé, par ce procédé, en sept parties, égales à la fois en surface et en contour, mettra cette construction dans tout son jour.

Le même procédé s'applique à la division d'un polygone régulier d'un nombre de côtés pair, à celle de l'ellipse et, en général, de toute courbe fermée et convexe, symétrique par rapport à une droite.

Il peut aussi être appliqué à la division du cercle en parties dont les surfaces soient entre elles dans des rapports donnés ; mais les contours de ces parties ne seront plus alors dans le rapport de leurs surfaces.

Solution du deuxième problème de la page 159 de ce volume ;

Par un ABONNÉ. GERGONNE

ENONCÉ. Soient divisés les côtés d'un polygone rectiligne quelconque, chacun en m parties égales, m étant >2 ; soient prises, sur les deux côtés de l'un des angles du polygone, à partir du sommet de cet angle, n des divisions de ces côtés, n étant $<\frac{1}{2}m$; soient joints les deux points déterminés de cette manière par une droite, et soit fait la même opération sur tous les angles de ce polygone. Les droites déterminées de cette manière formeront, avec les portions de côtés du polygone primitif qu'elles intercepteront, un polygone d'un nombre de côtés double inscrit au premier.

Soit opéré sur ce nouveau polygone comme sur le polygone primitif, m et n demeurant toujours les mêmes ; on obtiendra ainsi un troisième polygone qui sera, à l'égard du second, ce que celui-ci est à l'égard du premier, et sur lequel on pourra encore opérer de la même manière ; de sorte qu'en poursuivant sans cesse le même procédé, on engendrera une suite de polygones, faisant tous partie les uns des autres et du polygone proposé, si celui-ci est convexe, et tels que le nombre des côtés de chacun sera double du nombre de ceux du précédent.

Tous les polygones ainsi formés seront évidemment circonscrits à une même courbe fermée, laquelle sera leur limite commune.

En supposant donc que le polygone primitif est donné, ainsi que les nombres m et n, on propose de déterminer la nature de cette courbe ?

Solution. Il n'est pas difficile d'apercevoir qu'en général la courbe cherchée ne saurait être une courbe continue ; mais qu'elle doit être formée d'autant de branches de courbes, tangentes les unes aux autres, à la manière des anses de paniers, qu'il y a d'angles dans le polygone proposé. Si, en effet, on conçoit que, sans changer la grandeur et l'inclinaison respective de deux côtés consécutifs de ce polygone, on altère d'ailleurs sa figure d'une manière quelconque, il n'y aura absolument rien de changé dans la portion de courbe inscrite à l'angle formé par ces deux côtés. Si donc le cours de la courbe pouvait être continu, il en résulterait que plusieurs courbes continues pourraient avoir une partie finie commune, ce qu'on sait être impossible.

Il n'est pas plus difficile d'apercevoir que les points de contacts de la courbe cherchée, tant avec les côtés du polygone primitif qu'avec les côtés des autres polygones dont elle est la limite commune, sont les milieux même de ces côtés.

D'après ces diverses observations, on voit qu'il suffira, pour notre but, de considérer ce qui se passe dans l'un des angles du polygone proposé.

Soit donc $P_1S_1Q_1$ l'angle dont il s'agit (fig. 7) ; soit M_1, le milieu de S_1P_1 ; soit fait $S_1P_2=\frac{n}{m}S_1P_1$, $S_1S_2=\frac{n}{m}S_1Q_1$ et soit mené P_2S_2 dont M_2 soit le milieu ; soit porté S_1S_2 de Q_1 en Q_2 ; soit fait $S_2P_3=\frac{n}{m}S_2P_2$, $S_2S_3=\frac{n}{m}S_2Q_2$ et soit mené P_3S_3 dont M_3 soit le milieu ; soit porté S_1S_3 de Q_1 en Q_3 ; soit fait $S_3P_4=\frac{n}{m}S_3P_3$, $S_3S_4=\frac{n}{m}S_3Q_3$ et soit mené P_4S_4 dont M_4 soit le milieu ; en poursuivant continuellement le même procédé P_1S_1, P_2S_2, P_3S_3, P_4S_4, ... seront des côtés de polygones et leurs milieux M_1, M_2, M_3, M_4, ... seront conséquemment des points de la courbe cherchée.

Cela posé, soit pris le point S_1 pour origine des coordonnées rectangulaires auxquelles, pour plus de symétrie, nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque ; soient a et b les coordonnées de P_1 et c et d celles de Q_1.

D'après la manière dont on vient de voir que se construisent les points S_1, S_2, S_3, ..., on trouvera facilement pour leurs équations, savoir :

$$\text{pour } S_1 \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^0\right\}c=0\,; \\ y=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^0\right\}d=0\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } S_2 \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^1\right\}c\,; \\ y=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^1\right\}d\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } S_3 \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^2\right\}c\,, \\ y=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^2\right\}d\,; \end{cases}$$

et en général

$$\text{pour } S_k \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^{k-1}\right\}c\,, \\ y=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{m-2n}{m}\right)^{k-1}\right\}d\,. \end{cases}$$

De même, d'après la manière dont a vu que se construisent les points P_1, P_2, P_3, ..., on trouvera facilement pour leurs équations, savoir :

$$\text{pour } P_1 \begin{cases} x=\left(\frac{n}{m}\right)^0 a+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^0-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^0\right\}c\,, \\ y=\left(\frac{n}{m}\right)^0 b+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^0-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^0\right\}d\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } P_2 \begin{cases} x=\left(\frac{n}{m}\right)^1 a+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^1-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^1\right\}c\,, \\ y=\left(\frac{n}{m}\right)^1 b+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^1-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^1\right\}d\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } P_3 \begin{cases} x=\left(\frac{n}{m}\right)^2 a+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^2-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^2\right\}c\,, \\ y=\left(\frac{n}{m}\right)^2 b+\frac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\frac{n}{m}\right)^2-(m-n)\left(\frac{m-2n}{m}\right)^2\right\}d\,; \end{cases}$$

et en général

$$\text{pour } P_k \begin{cases} x=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}a+\dfrac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}-(m-n)\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{k-1}\right\}c\,, \\ y=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}b+\dfrac{1}{2(m-3n)}\left\{(m-3n)+2n\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}-(m-n)\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{k-1}\right\}d\,. \end{cases}$$

D'après cela, on trouvera facilement pour les équations des milieux M_1, M_2, M_3, ... M_k, de S_1P_1, S_2P_2, S_3P_3, ... S_kP_k, savoir :

$$\text{pour } M_1 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\left\{a+\dfrac{n}{m-3n}c\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{0}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{0}c\,, \\ y=\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\left\{b+\dfrac{n}{m-3n}d\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{0}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{0}d\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } M_2 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\left\{a+\dfrac{n}{m-3n}c\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{1}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{1}c\,, \\ y=\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\left\{b+\dfrac{n}{m-3n}d\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{1}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{1}d\,; \end{cases}$$

$$\text{pour } M_3 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\left\{a+\dfrac{n}{m-3n}c\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{2}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{2}c\,, \\ y=\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\left\{b+\dfrac{n}{m-3n}d\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{2}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{2}d\,; \end{cases}$$

et en général

$$\text{pour } M_k \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\left\{a+\dfrac{n}{m-3n}c\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{k-1}c\,, \\ y=\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\left\{b+\dfrac{n}{m-3n}d\right\}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{k-1}-\tfrac{1}{2}\dfrac{m-2n}{m-3n}\left(\dfrac{m-2n}{m}\right)^{k-1}d\,. \end{cases}$$

Telles sont donc les équations générales d'un point de la courbe cherchée, et desquelles on déduirait tant de points qu'on voudrait de cette courbe, en donnant successivement diverses valeurs à k ; si donc on élimine k entre ces deux équations, l'équation résultante en x et y étant indifférente à toutes valeurs de k, sera l'équation de la courbe cherchée.

Pour parvenir à cette équation, soient considérés $\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}$ et $\left(\frac{m-2n}{m}\right)^{k-1}$, dans les équations ci-dessus, comme deux inconnues distinctes, on en tirera

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}=\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}\,,$$

$$\left(\frac{m-2n}{m}\right)^{k-1}=\frac{(m-3n)[a(2y-d)-b(2x-c)]+2n(cy-dx)}{(m-2n)(bc-ad)}\,;$$

en prenant les logarithmes des deux membres de ces deux équations, elles deviendront

$$(k-1)\log.\left(\frac{n}{m}\right)=\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}\,,$$

$$(k-1)\log.\left(\frac{m-2n}{m}\right)=\log.\frac{(m-3n)[a(2y-d)-b(2x-c)]+2n(cy-dx)}{(m-2n)(bc-ad)}\,;$$

ce qui donnera, en multipliant en croix,

$$\text{(A)}\quad \log.\left(\frac{m-2n}{m}\right).\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}=\log.\left(\frac{n}{m}\right).\log.\frac{(m-3n)[a(2y-d)-b(2x-c)]+2n(cy-dx)}{(m-2n)(bc-ad)}\,;$$

telle est l'équation de la courbe demandée.

Cette courbe est en général transcendante, mais elle peut devenir algébrique, dans des cas particuliers; c'est ce qui arrive, par exemple, si $m=4n$; l'équation devient alors, en effet,

$$\log.\tfrac{1}{2}.\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}=2\log.\tfrac{1}{2}.\log.\frac{(a+c)(2y+b)-(b+d)(2x+a)}{2(bc-ad)}$$

en divisant par $\log.\frac{1}{2}$, cette équation peut être écrite ainsi

$$\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}=\log.\left\{\frac{(a+c)(2y+b)-(b+d)(2x+a)}{2(bc-ad)}\right\}^2;$$

ou, en passant aux nombres,

$$\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}=\left\{\frac{(a+c)(2y+b)-(b+d)(2x+a)}{2(bc-ad)}\right\}^2;$$

équation qui devient, toutes réductions faites,

$$\{(b+d)x-(a+c)y\}^2=(bc-ad)\{(b-d)x-(a-c)y-\tfrac{1}{4}(bc-ad)\};$$

et qui appartient, évidemment à une parabole. Si, dans ce cas particulier, on suppose que l'angle $P_1S_1Q_1$ est droit, ou qu'on a pris cet angle pour celui des coordonnées, on aura $a=0$, $d=0$, et l'équation prendra cette forme très-simple

$$b^2x(x-c)-2bcxy+c^2y(y-b)+\tfrac{1}{4}b^2c^2=0.$$

Si l'on suppose de plus $c=b$, elle deviendra

$$x(x-b)-2xy+y(y-b)+\tfrac{1}{4}b^2=0.$$

L'équation (A) se réduisant à $0=0$, dans le cas où $m=3n$, il est nécessaire de traiter ce cas en particulier. Les équations des points S_1, S_2, S_3, ... S_k, sont alors, savoir :

$$\text{pour } S_1 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^0\}\,c=0\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^0\}\,d=0\ ; \end{cases}$$

$$\text{pour } S_2 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^1\}\,c\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^1\}\,d\ ; \end{cases}$$

$$\text{pour } S_3 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^2\}\,c\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^2\}\,d\ ; \end{cases}$$

....

$$\text{pour } S_k \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^{k-1}\}\,c\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{1-(\tfrac{1}{3})^{k-1}\}\,d\ . \end{cases}$$

On trouvera ensuite les équations des points P_1, P_2, P_3, ... P_{k-1}, ainsi qu'il suit, savoir :

$$\text{pour } P_1 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{c+[2a-\ c](\tfrac{1}{3})^0\}\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{d+[2b-\ d](\tfrac{1}{3})^0\}\ ; \end{cases}$$

$$\text{pour } P_2 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{c+[2a-3c](\tfrac{1}{3})^1\}\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{d+[2b-3d](\tfrac{1}{3})^1\}\ ; \end{cases}$$

$$\text{pour } P_3 \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\{c+[2a-5c](\tfrac{1}{3})^2\}\ , \\ y=\tfrac{1}{2}\{d+[2b-5d](\tfrac{1}{3})^2\}\ ; \end{cases}$$

....

pour

$$\text{pour } P_k \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\{c+[2a-(2k-1)c](\frac{1}{3})^{k-1}\} ; \\ y=\frac{1}{2}\{d+[2b-(2k-1)d](\frac{1}{3})^{k-1}\} . \end{array} \right.$$

En conséquence, les équations des points M_1, M_2, M_3, ... M_k, seront telles qu'il suit :

$$\text{pour } M_1 \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\{c+(a-c)(\frac{1}{3})^0\} , \\ y=\frac{1}{2}\{d+(b-d)(\frac{1}{3})^0\} ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } M_2 \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\{c+(a-2c)(\frac{1}{3})^1\} , \\ y=\frac{1}{2}\{d+(b-2d)(\frac{1}{3})^1\} ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } M_3 \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\{c+(a-3c)(\frac{1}{3})^2\} , \\ y=\frac{1}{2}\{d+(b-3d)(\frac{1}{3})^2\} ; \end{array} \right.$$

....

$$\text{pour } M_k \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\{c+(a-kc)(\frac{1}{3})^{k-1}\} , \\ y=\frac{1}{2}\{d+(b-kd)(\frac{1}{3})^{k-1}\} . \end{array} \right.$$

Il n'est donc plus question que d'éliminer k entre ces deux dernières équations pour obtenir celle de la courbe.

Pour cela, traitons-y d'abord k et $(\frac{1}{3})^{k-1}$ comme deux inconnues distinctes, il viendra ainsi :

$$k=\frac{a(2y-d)-b(2x-c)}{2(cy-dx)} ,$$

$$(\tfrac{1}{3})^{k-1}=\frac{2(cy-dx)}{bc-ad} .$$

De la première de ces deux expressions on déduira

$$k-1=\frac{(a-c)(2y-b)-(b-d)(2x-a)}{2(cy-dx)} ;$$

la seconde donnera, en passant aux logarithmes,

$$(k-1).\log.\tfrac{1}{3}=\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad} ;$$

multipliant, enfin, ces deux dernières équations en croix, il viendra, en transposant,

$$\frac{(a-c)(2y-b)-(b-d)(2x-a)}{2(cy-dx)}.\log.3+\log.\frac{2(cy-dx)}{bc-ad}=0\ ;$$

telle est alors l'équation de la courbe.

Voici une application de cette théorie. Soit SP et SQ (fig. 8) deux branches d'une même route qu'on veut raccorder par une ligne courbe, tangente à l'une et à l'autre; soit P' et Q' les points indiqués comme points de contact de la courbe avec les deux branches de route; soit pris P'P=P'S et Q'Q=Q'S; si, ayant choisi arbitrairement deux nombres entiers $m>2$ et $n<\frac{1}{2}m$, et considérant SP et SQ comme deux côtés d'un polygone, on opère comme il a été prescrit dans l'énoncé du problème qui vient d'être résolu, on obtiendra tant de points qu'on voudra de la courbe cherchée. La figure est construite pour le cas où l'on a $m=3$ et $n=1$.

M. Puissant a indiqué un autre procédé pour la résolution du même problème (*); mais, outre que ce procédé n'est susceptible que d'une forme unique, la courbe de raccordement qu'il fournit fait nécessairement des *jarets* avec les deux branches de route; ici, au contraire, elle leur est rigoureusement tangente; et, en variant le rapport $\frac{n}{m}$, on a la faculté de faire plus ou moins approcher cette courbe du sommet de l'angle; ce qui peut être utile, en permettant de varier la construction suivant les accidens et les obstacles que le terrain peut présenter. Au surplus, en faisant $m=4n$, on obtient, par une autre voie, la courbe de raccordement de M. Puissant, avec cette différence que les points déterminés sont des points d'une parabole tangente aux deux côtés de l'angle.

(*) Voyez *Recueil de diverses propositions de géométrie*, etc., 2.e édition, page 174. Voyez aussi *Traité de topographie*, etc., page 261.

Solution du problème de la page 160 de ce volume.

Par M. GERGONNE.

ENONCÉ. Déterminer ce qu'il faut substituer à la place des cinq coefficiens différentiels partiels

$$\frac{dz}{dx}=p\,,\qquad \frac{dz}{dy}=q\,,\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=r\,,\qquad \frac{d^2z}{dxdy}=s\,,\qquad \frac{d^2z}{dy^2}=t\,,$$

dans une fonction ou une équation qui les renferme, lorsqu'on passe de l'hypothèse où z est fonction de x et y, à celle où x, y, z, sont toutes trois fonctions de deux nouvelles variables indépendantes u et v ?

Solution. Les formules demandées sont plus compliquées que difficiles à construire, et c'est sans doute pour cette raison qu'aucun géomètre ne s'est occupé de leur recherche. Néanmoins, comme ces formules peuvent être utiles dans plusieurs rencontres, je vais suppléer, à leur égard, à l'espèce d'omission que présentent les traités de calcul différentiel.

Par l'intermédiaire de x et y, la variable subordonnée z pouvant tout aussi bien être considérée comme fonction de u et v que comme fonction de x et y, on doit avoir à la fois

$$dz=pdx+qdy\,,\qquad dz=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv\,;$$

et par conséquent,

$$pdx+qdy=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv\,;$$

mais, parce que x et y sont, l'un et l'autre, des fonctions de u et v, on doit avoir aussi

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v\,;$$

substituant donc dans l'équation précédente, elle deviendra

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}p+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}q-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right\}\mathrm{d}u+\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}p+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}q-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}\right\}\mathrm{d}v=0.$$

La différentielle complète de cette équation, par rapport à u et v, sera

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}q+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2r+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}s+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2t-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}u^2}\right\}\mathrm{d}u^2\\
+2&\left\{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}q+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}r+\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right]s+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}t-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
+&\left\{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}v^2}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}v^2}q+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\right)^2r+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}s+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right)^2t-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}v^2}\right\}\mathrm{d}v^2=0\,;
\end{aligned}\right.$$

or, à cause de l'indépendance des différentielles $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}v$, les équations (I) et (II) se partagent dans les cinq suivantes :

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}p+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}q=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}, \qquad (2)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}p+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}q=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v},$$

$$(3)\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}q+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2r+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}s+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2t=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}u^2},$$

$$(4)\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}q+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}r+\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right]s+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}t=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v},$$

$$(5)\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}v^2}p+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}v^2}q+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\right)^2r+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}s+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right)^2t=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}v^2}\ (*).$$

(*) Ces équations, en y changeant x et y en u et v, *et vice versâ*, rentrent dans celles qu'a données M. Lacroix, pour une transformation analogue à celle-ci ; mais

Si, dans ces équations, on considère p, q, r, s, t, comme inconnues, on tirera d'abord des deux premières

$$p=\frac{\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}-\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}, \qquad q=\frac{\frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}};$$

posant alors, pour abréger,

$$\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}-\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}=G, \quad \frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}=H, \quad \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}=K,$$

auquel cas les valeurs de p et q deviennent

$$p=\frac{G}{K}, \qquad q=\frac{H}{K},$$

on tirera des trois dernières équations

$$r=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{array}{l}-H\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\ +K\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\ -G\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2x}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{array}\right\},$$

$$s=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{array}{l}-H\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2y}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2y}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\ +K\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2z}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2z}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\ -G\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2x}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2x}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{array}\right\},$$

---

qui en diffère en ce que, dans la sienne, ce sont u et v qui sont considérés comme des fonctions de x et y, tandis qu'ici, au contraire, ce sont ces dernières variables que nous considérons comme des fonctions des premières. (Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*; tome II, pages 565 et 566.)

$$t=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{array}{l}-H\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2y}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\ +K\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2z}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\ -G\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2x}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{array}\right\}.$$

Telles sont les formules demandées.

Quoique le procédé que nous venons d'employer, pour parvenir au but, ne laisse rien à desirer du côté de la brièveté, on pourrait lui reprocher d'être basé sur la considération des quantités infiniment petites du et dv; mais on peut le présenter sous une forme analogue à celle que l'illustre auteur de la *Théorie des fonctions analitiques* (*) a indiquée pour le changement de la variable indépendante, dans les fonctions d'une seule variable; ne reposant alors que sur la série de Tailor, il pourra être traduit dans toutes les notations. Voici ce qu'il faut faire pour cela.

Concevons qu'on fasse subir à u et v des accroissemens arbitraires et indépendans, respectivement désignés par g et h, on pourra, par la série de Tailor, développer les valeurs correspondantes de x et y, et en posant, pour abréger,

$$G=\frac{dx}{du}\frac{g}{1}+\frac{dx}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots, \qquad H=\frac{dy}{du}\frac{g}{1}+\frac{dy}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots,$$

ces valeurs seront

$$x+G, \qquad\qquad y+H;$$

z, comme fonction de x et y, deviendra donc

$$z+p\frac{G}{1}+q\frac{H}{1}+\ldots\ldots;$$

(*) Voyez cet ouvrage, n.° 200.

mais comme, par l'intermédiaire de x et y, la variable subordonnée z est aussi fonction de u et v, on peut dire également qu'elle deviendra

$$z+\frac{dz}{du}\frac{g}{1}+\frac{dz}{dv}\frac{h}{1}+\dots\,;$$

on doit donc avoir

$$p\frac{G}{1}+q\frac{H}{1}+\dots=\frac{dz}{du}\frac{g}{1}+\frac{dz}{dv}\frac{h}{1}+\dots.$$

mettant, dans cette dernière équation, pour G et H leurs valeurs, et ordonnant l'équation résultante par rapport aux puissances et produits de puissances des accroissemens g et h, tous les termes de cette équation, en vertu de l'indépendance de ces accroissemens, devront séparément se détruire ; et, en exprimant qu'ils se détruisent en effet, on obtiendra une suite indéfinie d'équations, dont les cinq premières seront les mêmes que celles que nous avons obtenues ci-dessus, et donneront conséquemment les mêmes valeurs pour p, q, r, s, t.

Voici encore, pour parvenir au même but, une autre méthode qui, je crois, n'a été indiquée nulle part, et qui, sans être aussi laborieuse que la précédente, a, comme elle, l'avantage de ne dépendre aucunement de la considération des infiniment petits ; elle s'applique d'ailleurs, avec une extrême facilité, au changement de la variable indépendante, dans les fonctions d'une seule variable.

Soit l'équation $M=0$, dans laquelle M est supposée une fonction quelconque de x, y, z ; si l'on cherche ses dérivées successives, en considérant z comme une fonction de x et y, celles du premier ordre seront

$$\text{(A)}\quad \frac{dM}{dz}p+\frac{dM}{dx}=0\,,\qquad \text{(B)}\quad \frac{dM}{dz}q+\frac{dM}{dy}=0\,;$$

si, au contraire, dans la même équation $M=0$, on considère x, y, z, comme fonctions de deux nouvelles variables u et v, ses deux dérivées du premier ordre seront

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{dM}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{du}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{du}=0,$$

$$(\mathrm{B}') \qquad \frac{dM}{dx}\frac{dx}{dv}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dv}=0,$$

si maintenant, entre les quatre équations (A), (B), (A′), (B′), on élimine deux quelconques des trois fonctions $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, $\frac{dM}{dz}$, la troisième disparaîtra d'elle-même ; on obtiendra donc ainsi deux équations ne renfermant plus que $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dv}$, combinés avec p et q, et qui donneront, pour ces deux coefficiens différentiels, les valeurs que nous leur avons déjà assignées.

Soit maintenant formé les équations du second ordre, sous l'un et sous l'autre point de vue. En considérant d'abord z comme fonction de x et y, les équations (A) et (B) donneront

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{dM}{dz}r+\frac{d^2M}{dz^2}p^2+2\frac{d^2M}{dzdx}p+\frac{d^2M}{dx^2}=0,$$

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{dM}{dz}s+\frac{d^2M}{dz^2}pq+\frac{d^2M}{dzdy}p+\frac{d^2M}{dzdx}q+\frac{d^2M}{dxdy}=0,$$

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{dM}{dz}t+\frac{d^2M}{d^2z}q^2+2\frac{d^2M}{dzdy}q+\frac{d^2M}{dy^2}=0;$$

considérant ensuite x, y, z, comme fonctions de u et v, on déduira des équations (A′) et (B′)

(C′)

$$(C') \left\{\begin{aligned} &\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{d^2M}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{du}\frac{dz}{du}\\ +&\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{d^2M}{dy^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{du}\frac{dz}{du}\\ +&\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2M}{dz^2}\left(\frac{dz}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdy}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\end{aligned}\right\}=0,$$

$$(D') \left\{\begin{aligned} &\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dudv}+\frac{d^2M}{dx^2}\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{d^2M}{dydz}\left\{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right\}\\ +&\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dudv}+\frac{d^2M}{dy^2}\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{d^2M}{dxdz}\left\{\frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}\right\}\\ +&\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{dudv}+\frac{d^2M}{dz^2}\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{d^2M}{dxdy}\left\{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right\}\end{aligned}\right\}=0,$$

$$(E') \left\{\begin{aligned} &\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dv^2}+\frac{d^2M}{dx^2}\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dv}\\ +&\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dv^2}+\frac{d^2M}{dy^2}\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{dv}\frac{dz}{dv}\\ +&\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{dv^2}+\frac{d^2M}{dz^2}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdy}\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\end{aligned}\right\}=0.$$

Alors, si entre les dix équations (A), (B), (C), (D), (E), (A′), (B′), (C′), (D′), (E′), on élimine p et q, et en outre cinq des neuf fonctions

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dy},\ \frac{dM}{dz},\ \frac{d^2M}{dx^2},\ \frac{d^2M}{dy^2},\ \frac{d^2M}{dz^2},\ \frac{d^2M}{dydz},\ \frac{d^2M}{dxdz},\ \frac{d^2M}{dxdy},$$

les quatre autres disparaîtront d'elles-mêmes, et les valeurs de r, s, t, tirées des trois équations finales seront les mêmes que ci-dessus.

Le cas le plus simple que puisse présenter le problème général que nous venons de résoudre, est celui où l'on veut passer de l'hypothèse où z est fonction de x et y à celle où, par exemple, x est fonction de y et z; on peut poser alors

$$x=x\,,\quad y=u\,,\quad z=v\,;$$

d'où

$$\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dy}\,,\quad \frac{dx}{dv}=\frac{dx}{dz}\,,\quad \frac{d^2x}{du^2}=\frac{d^2x}{dy^2}\,,\quad \frac{d^2x}{dudv}=\frac{d^2x}{dydz}\,,\quad \frac{d^2x}{dv^2}=\frac{d^2x}{dz^2}\,,$$

$$\frac{dy}{du}=1\,,\quad \frac{dy}{dv}=0\,,\quad \frac{d^2y}{du^2}=0\,,\quad \frac{d^2y}{dudv}=0\,,\quad \frac{d^2y}{dv^2}=0\,,$$

$$\frac{dz}{du}=0\,,\quad \frac{dz}{dv}=1\,,\quad \frac{d^2z}{du^2}=0\,,\quad \frac{d^2z}{dudv}=0\,,\quad \frac{d^2z}{dv^2}=0\,;$$

par suite de quoi les valeurs générales de p, q, r, s, t, deviennent

$$p=\frac{1}{\frac{dx}{dz}}\,,\qquad q=-\frac{\frac{dx}{dy}}{\frac{dx}{dz}}\,,$$

$$r=-\frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3}\,,\qquad s=\frac{\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dydz}-\frac{dx}{dy}\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3}\,,$$

$$t=-\frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\frac{d^2x}{dy^2}-2\frac{dx}{dz}\frac{dx}{dy}\frac{d^2x}{dydz}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3}\,.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

TROIS droites indéfinies étant données de position par rapport à une courbe quelconque du second degré, et dans un même plan avec elle; on propose de construire, EN N'EMPLOYANT QUE LA RÈGLE SEULEMENT, un triangle dont les trois côtés soient des tangentes à la courbe et dont les sommets se trouvent sur les trois droites données (*)?

II.

On donne, sur un plan P, 1.° les traces a, b, c, de trois directrices α, β, γ, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et sur lesquelles une quatrième droite θ se meut et décrit une surface gauche (**); 2.° les traces d, e, de la génératrice, dans deux de ses positions δ, ε; 3.° enfin, une droite ap, menée par a, d'une manière quelconque, sur ce plan.

(*) Le problème dont il est question aux pages 17, 122 et 126 de ce volume, n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

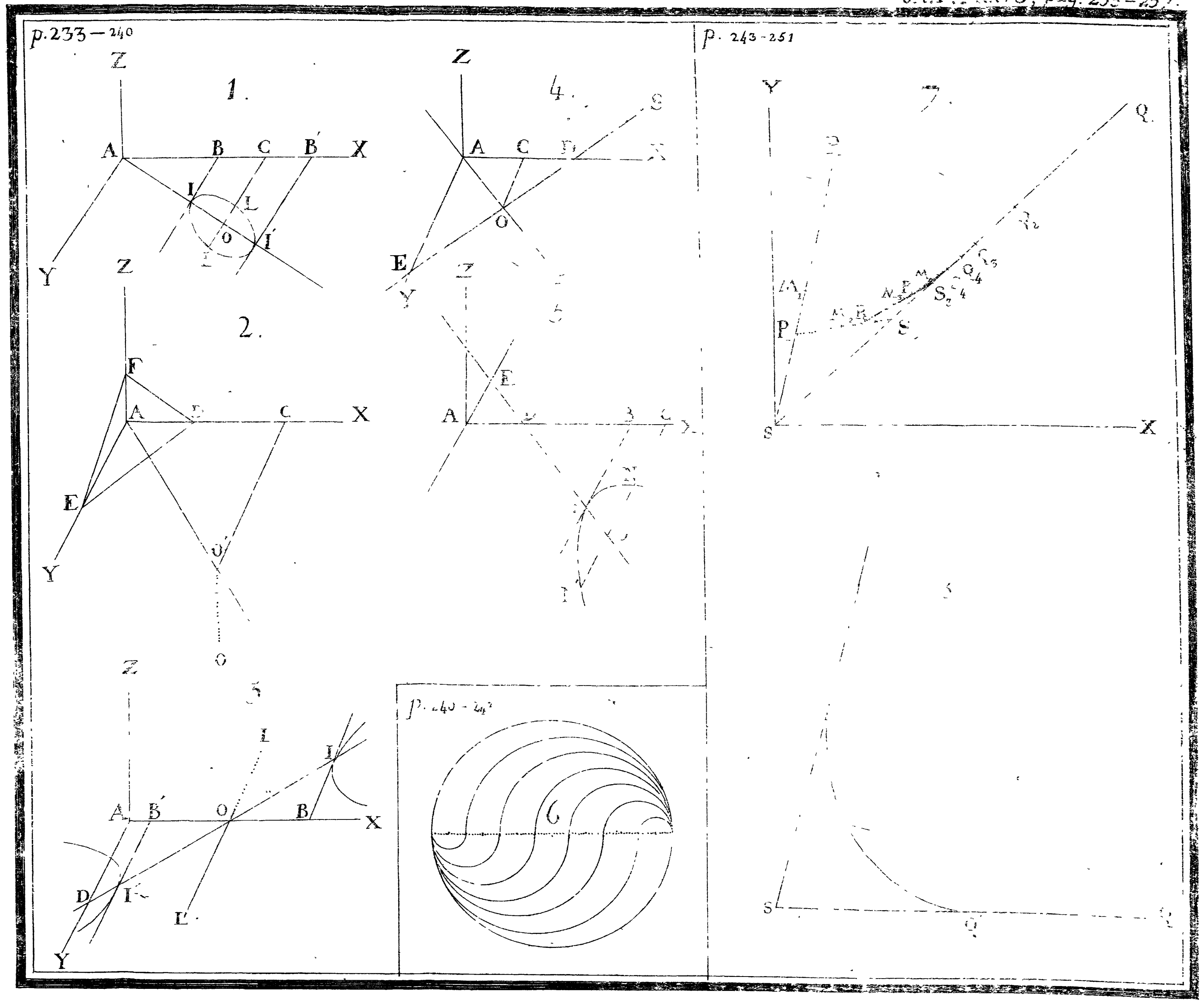
(**) C'est la surface gauche, du second degré, désignée par M. Monge sous la dénomination de *Paraboloïde hyperbolique*. Voyez son *Application de l'algèbre à la géométrie*, I.re partie, page 43. Voyez aussi sa *Géométrie descriptive*, page 130.

La trace de la surface gauche, sur le plan P, étant en général, une ligne courbe du second degré, passant par les points a, b, c; la droite ap doit couper cette trace non seulement en a, mais encore en quelque autre point s.

On propose de déterminer le point s, et de construire, en outre, la tangente menée, par ce point, à la trace de la surface gauche sur le plan P (*) ?

Les constructions que l'on assignera, pour la résolution de ce problème, devront être démontrées sans aucun calcul, et d'après les notions les plus élémentaires de la géométrie à trois dimensions.

(*) Comme on peut varier, à l'infini, la direction de la droite ap, il s'ensuit qu'au moyen de la solution de ce problème, on peut déterminer tant de points s qu'on voudra de la trace de la surface gauche sur le plan P, et construire, pour chacun de ces points, la tangente à cette trace.



J. D. G. fecit.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Recherches sur les fractions-continues périodiques ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Désignons par les lettres a, b, c, d, ..., qui sont supposées se succéder dans l'ordre alphabétique, soit directe soit rétrograde, et sans omission d'aucun intermédiaire, une série de nombres entièrement pris à volonté, et n'étant liés entre eux par aucune loi quelconque. Ces nombres étant donnés, formons la série qui suit :

$$1=1,\ P=a,\ Q=bP+1,\ R=cQ+P,\ S=dR+Q,\ S=eS+R, \ldots$$

D'après la marche de cette série, l'on voit que l'unité, quand même elle ne serait pas formellement exprimée, est cependant considérée comme en faisant partie et comme précédant tous ses autres termes. Cela étant, nous donnerons le nom de *médiateurs* aux fonctions littérales désignées par les lettres P, Q, R, S, T, ..., et nous nommerons *bases des médiateurs*, les nombres même que nous avons représentés par les lettres a, b, c, d, e, ... Nous aurons ainsi :

Le premier médiateur $P=a$,

Le second médiateur $Q=ab+1$,

Le troisième .... $R=abc+a+c$,

Le quatrième .... $S=abcd+ab+ad+cd+1$,

....

2. D'après cette convention, pour désigner un médiateur quelconque, il suffira d'indiquer, parmi ses bases, la première et la dernière, en sous-entendant les intermédiaires qui seront censées se succéder de l'une à l'autre, suivant l'ordre alphabétique, et sans omission d'aucune.

Ainsi, par exemple, pour désigner le médiateur qui a, pour les première et dernière de ses bases, celles qui sont marquées par les lettres h et m, nous écrirons simplement (HM), et cette notation sera équivalente à

$$hiklm+him+hlm+klm+hik+h+k+m.$$

Nous substituerons des lettres majuscules aux autres, pour prévenir l'équivoque, et nous enfermerons le tout entre deux parenthèses.

3. Tout médiateur, tel que (AN), sera donc déterminé par les deux (AM) et (AL) qui le précèdent, moyennant la formule suivante, que l'on peut regarder comme fondamentale, et tenant lieu de définition.

$$(AN)=n(AM)+(AL) \quad (*).$$

(*) Quelque facile qu'il puisse paraître, d'après ce principe, de déduire les uns des autres les médiateurs (AB), (AC), (AD), ...; cependant, lorsqu'on n'a besoin que du dernier, et que le nombre des bases est considérable, l'obligation d'écrire tous les médiateurs qui précèdent celui qu'on cherche, peut entraîner des longueurs, et doit faire désirer quelque méthode au moyen de laquelle on puisse directement écrire un médiateur quelconque, dont les bases sont données, sans que préalablement il soit nécessaire d'en former aucun autre; c'est à quoi l'on peut facilement parvenir, au moyen des observations suivantes:

1.° Tout médiateur ne doit renfermer que des termes de dimensions *paires* seulement ou des termes de dimensions *impaires* seulement, suivant que le nombre de ses bases est lui-même *pair* ou *impair*; de sorte qu'en général, n représentant le nombre de ces bases, les termes du médiateur seront successivement de n, $n-2$, $n-4$, ..., $n-2k$, ..., dimensions; cette suite se terminant à *zéro* dimensions ou à *une* dimension, suivant que n est *pair* ou *impair*.

2.° Tout médiateur n'a jamais qu'un terme unique de n dimensions, lequel est le produit de toutes ses bases. Si n est pair, le médiateur n'aura pareillement qu'un terme unique de zéro dimensions, et ce terme sera l'unité.

Si, l'on prend, au contraire, les bases dans un ordre rétrograde, on aura

$$(NA)=a(NB)+(NC).$$

3.° Les termes intermédiaires sont des produits des diverses bases multipliées $n-2$ à $n-2$, $n-4$ à $n-4$, ..., $n-2k$ à $n-2k$; mais ils ne sont pas tous les produits de cette nature, comme on va le dire tout-à-l'heure.

4.° Dans tout médiateur, les termes sont positifs et sans coefficiens ; et, comme jamais la même base n'entre deux fois dans un même terme, ces termes sont aussi sans exposant.

5.° Enfin on reconnaîtra qu'un produit de $n-2k$ facteurs, choisis parmi les n bases, doit ou ne doit pas faire partie du médiateur cherché, au moyen de la règle suivante :

Soient écrits les facteurs de ce produit suivant l'ordre de leur succession alphabétique ; soit aussi écrit le produit de toutes les bases suivant le même ordre, et soit divisé le second produit par le premier, en écrivant le quotient toujours de la même manière.

Suivant que, dans ce quotient, *il y aura* ou *il n'y aura pas* des facteurs, *en nombre impair*, se succédant sans interruption de la même manière qu'ils le font dans l'alphabet, le produit soumis à l'épreuve devra être *rejeté* ou *admis.*

Ainsi, par exemple, le produit *abcg ne peut* faire partie du médiateur (AH) ; car $\frac{abcdefgh}{abcg}=defh$, et l'on voit, dans ce quotient, les *trois* lettres consécutives *def*, et la lettre *unique h* ; au contraire, le produit *cdi doit* faire partie du médiateur (AI) ; car $\frac{abcdefghi}{cdi}=abefgh$, et l'on ne voit dans ce quotient que les *deux* lettres consécutives *ab* et les *quatre* lettres consécutives *efgh*.

D'après ces diverses observations, rien n'est plus aisé que de former immédiatement un médiateur dont les bases sont données, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant.

Exemple. Soit proposé de former le médiateur (AF) ?

Ce médiateur doit contenir des termes de 6, 4, 2, 0, dimensions, et son seul terme de six dimensions est, comme nous l'avons vu ci-dessus,

$$abcdef;$$

divisant ce premier terme successivement, et de toutes les manières possibles, par *un* produit de deux lettres consécutives, c'est-à-dire, par *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, et prenant la somme des quotiens, on formera la totalité des termes de *quatre* dimensions, lesquels seront ainsi

L'analise des médiateurs fournit plusieurs théorèmes intéressans que nous nous contenterons ici d'énoncer, attendu que nous en avons donné la démonstration ailleurs. (*Arith. univ. chap. VIII.*)

4. *Théorème I.* Un médiateur ne change pas de valeur, lorsqu'on renverse l'ordre de ses bases; ainsi, par exemple, les médiateurs (AN) et (NA) sont identiques entre eux.

5. *Théorème II.* Si la première ou la dernière base d'un média-

---

$$cdef+adef+abef+abcf+abcd\,;$$

divisant ensuite successivement le même premier terme, de toutes les manières possibles, par *deux* produits de deux lettres consécutives, c'est-à-dire, par ab et cd, ab et de, ab et ef, bc et de, bc et ef, cd et ef, et prenant la somme des quotiens, on formera la totalité des termes de *deux* dimensions, lesquels seront ainsi

$$ef+cf+cd+af+cd+ab\,;$$

divisant, enfin, le même premier terme par *trois* produits de deux lettres consécutives, ce qui ne pourra avoir lieu que d'une manière unique, savoir ab, cd, ef, le quotient 1 de cette division sera le terme de *zéro* dimensions, c'est-à-dire, le dernier terme du médiateur; en sorte qu'on aura

$$(\mathrm{AF})=\begin{cases} abcdef \\ +cdef+adef+abef+abcf+abcd \\ +ef+cf+cd+af+ad+ab \\ +1. \end{cases}$$

On peut désirer, comme moyen de vérification, de connaître, à l'avance, combien de termes de chaque sorte de dimensions un médiateur doit renfermer; ce nombre de termes est, pour n bases et $n-2k$ dimensions,

$$\frac{n-k}{1}\cdot\frac{n-k-1}{2}\cdot\frac{n-k-2}{3}\cdots\cdots\frac{n-2k+1}{k}.$$

Le nombre total des termes d'un médiateur de n bases, a donc pour expression

$$1+\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}+\cdots\cdots;$$

série qui se termine d'elle-même si, comme cela doit toujours être, n est entier et positif, et dont la somme des termes peut d'ailleurs être mise sous cette forme finie:

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

(*Note des éditeurs.*)

teur s'évanouit, il perdra, à la fois, ses deux premières bases dans le premier cas, et ses deux dernières dans le second; de sorte que le degré auquel il appartiendra, sera diminué de deux unités. Par exemple, le médiateur (AN) étant égal à n(AM)+(AL), aussi bien qu'à a(NB)+(NC), devient (AL) dans le cas de $n=0$, et (NC) dans le cas de $a=0$.

6. *Théorème III.* En quelque endroit qu'on partage en deux le médiateur donné (AN), comme, par exemple, entre les bases f et g, il sera égal au produit des deux médiateurs (AF) et (GN), *plus* le produit des deux médiateurs (AE) et (HN), qu'on obtient des deux précédens, en supprimant la dernière base de l'un et la première de l'autre. On aura donc généralement (AN)=(AF)(GN)+(AE)(HN).

7. *Théorème IV.* Si du médiateur (AN) on forme les trois médiateurs (AM), (BN), (BM); en supprimant pour l'un la première des bases, pour l'autre la seconde, et pour le troisième les deux bases extrêmes, à la fois; la différence de produits (AN)(BM)—(AM)(BN) sera constamment égale à l'unité; et cette unité sera *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases du médiateur proposé sera *pair* ou *impair*.

8. *Théorème V.* On peut donner au théorème précédent une généralité beaucoup plus grande, en l'énonçant comme il suit : soient les deux médiateurs (AV) et (HO), tels que les bases du dernier soient entièrement comprises parmi celles du premier, et qu'elles s'y succèdent dans le même ordre. Si du premier des deux on retranche les bases excédentes, depuis p jusqu'à v, et qu'on les ajoute à l'autre, il en résultera les deux nouveaux médiateurs (AO) et (HV), entièrement compris dans le premier, et comprenant le second. Alors, l'excès du produit des deux premiers médiateurs sur le produit des deux derniers, c'est-à-dire, (AV)(HO)—(AO)(HV), sera, dans tous les cas, égal au simple produit des deux médiateurs (AF)(QV), affecté du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que le nombre des bases du médiateur intermédiaire (HO) sera *pair* ou *impair*.

9. *Théorème VI.* La fraction-continue

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \ldots\ldots$$

reçoit successivement les expressions littérales qui suivent, selon qu'on s'arrête à la *première* base, à la *seconde*, à la *troisième*,...., savoir :

à la première .... a ou (A) : 1 ;
à la seconde .... (AB) : (B) ;
à la troisième .... (AC) : (BC) ;
à la quatrième .... (AD) : (BD) ;
à la cinquième .... (AE) : (BE) :

et ainsi des autres.

10. Nous appellerons *fractions-continues périodiques* celles dans lesquelles, après un certain nombre de bases initiales qui ne sont soumises à aucune loi, on remarque, parmi les suivantes, une périodicité constante, revenant sans cesse à l'infini : telle serait, par exemple, la fraction-continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots$$

Ici l'on remarque d'abord les bases α, β, γ, qui peuvent être des nombres quelconques; viennent ensuite les *bases périodiques* a et b, lesquelles sont supposées se reproduire constamment à l'infini. Nous nommerons *tête de la fraction*, la partie par laquelle elle commence, et qui fait exception à la loi de la période ; elle sera comptée inclusivement jusqu'à la base après laquelle la période devient sensible. Les bases qui composent la tête de la fraction seront nommées *bases initiales*, et nous les désignerons par les lettres de l'alphabet *grec*; tandis que les lettres de l'alphabet *latin* seront réservées pour désigner les *bases périodiques*.

11. Pour fixer les idées, supposons que les bases initiales aussi

bien que les bases périodiques de la fraction-continue soient au nombre de *six*. Les premières étant désignées par α, β, γ, δ, ε, ζ; et les dernières par les lettres a, b, c, d, e, f; la partie de la fraction qui s'étend à l'infini, depuis le commencement de la période, et que nous représenterons par x, sera

$$x=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{x}.$$

Et, si nous exprimons par y la fraction-continue entière, prolongée à l'infini, à partir de la tête, nous aurons

$$y=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{x}.$$

La partie de la fraction-continue x qui se termine à la base f sera égale à

$$\frac{(AF)}{(BF)}=\frac{f(AE)+(AD)}{f(BE)+(BD)}.$$

Pour avoir la valeur de la fraction-continue, prolongée à l'infini, il faudra remplacer, dans cette dernière expression, la lettre f par $f+\frac{1}{x}$ ce qui donnera, après les réductions,

$$x=\frac{(AE)+x(AF)}{(BE)+x(BF)};$$

ainsi, la valeur x de la fraction-continue sera l'une des deux racines de l'équation du second degré qui suit :

$$(BF)x^2-\{(AF)-(BE)\}x-(AE)=0.$$

Et, pour exprimer la fraction-continue entière, que nous avons désignée par y, on aura de même :

$$y=\frac{x(\alpha\zeta)+(\alpha\varepsilon)}{x(\beta\zeta)+(\beta\varepsilon)};$$

ce qui donne $$x=\frac{(\alpha\varepsilon)-(\beta\varepsilon)y}{(\beta\zeta)y-(\alpha\zeta)}.$$

12. Substituant cette dernière fraction littérale à la place de x, dans l'équation du second degré en x, la valeur totale de la fraction-continue se trouvera être encore racine d'une équation du second degré, mais beaucoup plus générale que la première.

Faisons, pour abréger,

$$\begin{array}{ll}(AE)=A\,, & (\alpha\varepsilon)=P\,,\\ (AF)=B\,, & (\alpha\zeta)=Q\,,\\ (BE)=C\,, & (\beta\varepsilon)=R\,,\\ (BF)=D\,, & (\beta\zeta)=S\,;\end{array}$$

et, de plus, désignons généralement l'unité par u pour les bases *initiales*, et par v pour les bases *périodiques*, ce qui donne (7)

$$QR-PS=u\,, \qquad BC-AD=v.$$

On aura donc, dans tous les cas, tant $u=1$ que $v=1$; et cette unité sera *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases sera *pair* ou *impair*.

On aura de même, $uv=1$, *positif*, si le nombre des bases initiales et celui des bases périodiques sont *tous deux pairs* ou *tous deux impairs*, et *négatif*, si l'un de ces nombres est *pair* et l'autre *impair*.

En employant ces notations, les deux équations précédemment obtenues deviendront :

$$Dx^2-(B-C)x-A=0\,,$$

et $$x=\frac{P-Ry}{Sy-Q}\,;$$

et, en substituant, dans la première, la valeur de x donnée par la seconde, elle deviendra

$$\begin{aligned}0=\ &(AQ+CP)Q-(BQ+DP)P\,,\\ &-(AQ+CP)Sy+(BQ+DP)Ry\,,\\ &-(AS+CR)Qy+(BS+DR)Py\,,\\ &+(AS+CR)Sy^2-(BS+DR)Ry^2\,;\end{aligned}$$

or,

or, comme (6)

$$\begin{aligned}
AQ+CP&=(\alpha\zeta)(AE)+(\alpha\varepsilon)(BE)=(\alpha E)\ ,\\
AS+CR&=(\beta\zeta)(AE)+(\beta\varepsilon)(BE)=(\beta E)\ ,\\
BQ+DP&=(\alpha\zeta)(AF)+(\alpha\varepsilon)(BF)=(\alpha F)\ ,\\
BS+DR&=(\beta\zeta)(AF)+(\beta\varepsilon)(BF)=(\beta F)\ ;
\end{aligned}$$

on voit que l'équation en y pourra être mise sous cette autre forme plus simple :

$$\begin{aligned}
o=&+(\alpha\varepsilon)(\alpha F)\quad-(\alpha\zeta)(\alpha E)\\
&-(\alpha\varepsilon)(\beta F)y+(\alpha\zeta)(\beta E)y\\
&-(\beta\varepsilon)(\alpha F)y+(\beta\zeta)(\alpha E)y\\
&+(\beta\varepsilon)(\beta F)y^2-(\beta\zeta)(\beta E)y^2\ ;
\end{aligned}$$

donc, si l'on fait, pour abréger

$$\begin{aligned}
L&=(\alpha\varepsilon)(\alpha F)-(\alpha\zeta)(\alpha E)\ ,\\
M&=(\alpha\varepsilon)(\beta F)-(\alpha\zeta)(\beta E)\ ,\\
N&=(\beta\varepsilon)(\alpha F)-(\beta\zeta)(\alpha E)\ ,\\
O&=(\beta\varepsilon)(\beta F)-(\beta\zeta)(\beta E)\ ;
\end{aligned}$$

il en résultera l'équation

$$o=L-(M+N)y+Oy^2.$$

13. Les quatre coefficiens de cette équation, savoir L, M, N, O, sont liés entre eux par quelques relations générales qu'il importe de connaître.

Examinons d'abord la différence des deux coefficiens du milieu, savoir $-M+N$; on a

$$-M+N=-(\alpha\varepsilon)(\beta F)+(\beta\varepsilon)(\alpha F)+(\alpha\zeta)(\beta E)-(\beta\zeta)(\alpha E)\ ;$$

$$\text{or}\ \left\{\begin{aligned}(\beta\varepsilon)(\alpha F)-(\alpha\varepsilon)(\beta F)&=\ \ (AF)u\\(\beta\zeta)(\alpha E)-(\alpha\zeta)(\beta E)&=-(BE)u\end{aligned}\right\}\ (7)\ ;$$

donc

$$-M+N=u\{(AF)-(BE)\}.$$

Ainsi, la différence $-M+N$ des deux coefficiens moyens est indépendante des bases initiales de la fraction et dépend simplement des bases périodiques; elle est égale, dans tous les cas, à $(AF)-(BE)$, affecté du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que le nombre des bases initiales est *pair* ou *impair*. La valeur *absolue* de cette différence dépend donc des bases périodiques, et son *signe* de la parité ou de l'imparité du nombre des bases initiales.

Examinant de même la différence de produits LO—MN, on la trouvera égale au produit des deux facteurs qui suivent :

$$(\alpha\zeta)(\beta\varepsilon)-(\alpha\varepsilon)(\beta\zeta)=+u\ ,$$

et

$$(\alpha F)(\beta E)-(\alpha E)(\beta F)=+uv.$$

Chacun de ces facteurs est, dans tous les cas, égal à l'unité. Cette unité, pour le premier facteur, est *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases initiales est *pair* ou *impair*. Et, pour le second facteur, cette même unité est *positive* ou *négative* suivant que le nombre total, tant des bases initiales que des bases périodiques, est *pair* ou *impair*. On voit par là que la différence LO—MN, toujours égale à l'unité, dépendra, quant à son signe, de la parité ou de l'imparité du nombre des bases *périodiques*; de manière que, dans le premier cas, on aura LO—MN$=+1$, tandis qu'on aura, dans le second, LO—MN$=-1$.

14. Dans la notation que nous avons employée, il ne faut pas perdre de vue que les lettres ε et ζ désignent toujours *l'avant-dernière* et la *dernière* des bases initiales, et que les lettres e et f désignent, de même, *l'avant-dernière* et la *dernière* des bases périodiques. Ainsi, l'application des notations $(\alpha\varepsilon)$, $(\alpha\zeta)$, $(\beta\varepsilon)$, $(\beta\zeta)$, n'aura jamais de difficulté, tant que le nombre des bases ne sera pas au-dessous de quatre.

Dans le cas de *trois* bases, désignées par les lettres α, β, γ, ou a, b, c, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=(\alpha\beta)\ ,\qquad (AE)=(AB)\ ,$$
$$(\alpha\zeta)=(\alpha\gamma)\ ,\qquad (AF)=(AC)\ ,$$
$$(\beta\varepsilon)=(\beta)\ ,\qquad (BE)=(B)\ ,$$
$$(\beta\zeta)=(\beta\gamma)\ ;\qquad (BF)=(BC)\ .$$

Dans le cas de *deux* bases, désignées par les lettres α, β, ou a, b, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=(\alpha)\ ,\qquad (AE)=(A)\ ,$$
$$(\alpha\zeta)=(\alpha\beta)\ ,\qquad (AF)=(AB)\ ,$$

$$(\beta\varepsilon)=1\,,\qquad (BE)=1\,,$$
$$(\beta\zeta)=(\beta)\,;\qquad (BF)=(B)\,.$$

Enfin, dans le cas *d'une* seule base, désignée par la lettre α ou a, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=1\,,\qquad (AE)=1\,,$$
$$(\alpha\zeta)=\alpha\,,\qquad (AF)=a\,,$$
$$(\beta\varepsilon)=0\,,\qquad (BE)=0\,,$$
$$(\beta\zeta)=1\,;\qquad (BF)=1\,.$$

Il peut importer encore d'examiner le cas d'une seule base initiale α, combinée avec un nombre quelconque de bases périodiques. On a alors

$$L=-\alpha^2(AE)+\alpha(AF)-\alpha(BE)+(BF)\,,$$
$$M=-\alpha\,(AE)+\,(AF)\,,$$
$$N=-\alpha\,(AE)-\,(BE)\,,$$
$$O=-\,(AE).$$

15. Étant donnée une équation quelconque du second degré

$$0=p-qy+ry^2\,,$$

on peut la comparer à

$$0=L-(M+N)y+Oy^2\,,$$

moyennant les deux proportions et l'équation qui suivent :

$$p:L=q:M+N\,,\qquad p:L=r:O\,,\qquad LO-MN=\varphi.$$

On en tire

$$\left.\begin{array}{l} pM^2-qLM+rL^2=p\varphi\,,\\ pN^2-qLN+rL^2=p\varphi\,,\\ rM^2-qOM+pO^2=r\varphi\,,\\ rN^2-qON+pO^2=r\varphi\,; \end{array}\right\}(*)$$

(*) Les deux proportions ci-dessus équivalent aux deux équations

$$p(M+N)=qL\,,\qquad pO=rL\,,$$

desquelles on déduit encore, par l'élimination de L,

$$r(M+N)=qO.$$

Si maintenant, au moyen de l'équation $pO=rL$, on élimine successivement O et L de l'équation $LO-MN=\varphi$, il viendra

$$(A)\qquad rL^2-pMN=p\varphi\,,\qquad\qquad (B)\qquad pO^2-rMN=r\varphi\,;$$

mais, en multipliant successivement par M et par N chacune des deux équations $p(M+N)=qL$ et $r(M+N)=qO$, elles deviendront, en transposant, d'où l'on déduit, en faisant, pour abréger, $h=q^2-4pr$,

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{hL^2+4p^2\varphi}=2pM-qL=qL-2pN\ ,\\ \sqrt{hO^2+4r^2\varphi}=2rM-qO=qO-2rN\ ,\\ \sqrt{hM^2+4pr\varphi}=qM-2rL=qM-2pO\ ,\\ \sqrt{hN^2+4pr\varphi}=2rL-qN=2pO-qN\ .\end{array}\right\}\ (*)$$

16. Les deux premières de ces formules servent à déterminer les valeurs entières des y qui peuvent rendre quarrée toute expression de la forme my^2+n^2, dans laquelle m et n sont supposés des nombres entiers quelconques. Comparant, en effet, cette expression à hO^2+4r^2 (**) ou $(q^2-4pr)O^2+4r^2$, on aura

$$\left.\begin{array}{r}q^2-4pr=m\ ,\\ 2r=n\ ;\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \ 2p=\frac{q^2-m}{n}$$

il en résultera l'équation

$$m=n^2y^2-2nqy+q^2\ (***)\ ,$$

qui donne

$$y=\frac{q+\sqrt{m}}{n}.$$

Ici, q pourra être pris à volonté, et la quantité $O=(\beta\varepsilon)(\beta F)-(\beta\zeta)(\beta E)$ qu'on obtient, en développant en fraction-continue la fraction $\frac{q+\sqrt{m}}{n}$,

---

$$(C)\quad pM^2+pMN-qLM=0\ ,\qquad (D)\quad rM^2+rMN-qOM=0\ ,$$
$$(E)\quad pM^2+pMN-qLN=0\ ,\qquad (F)\quad rN^2+rMN-qON=0\ ;$$

formant alors

$$(A)+(C)=0\ ,\quad (A)+(E)=0\ ,\quad (B)+(D)=0\ ,\quad (B)+(F)=0\ ,$$

on obtiendra, en réduisant, les quatre équations de M. Kramp.

(*) Ces résultats s'obtiennent en résolvant successivement chacune des quatre équations par rapport à chacune des deux lettres qui s'y trouvent au quarré.

(**) L'auteur suppose tacitement ici $\varphi=+1$ et conséquemment le nombre des bases périodiques *pair*.

(***) Cette équation s'obtient en substituant, dans l'équation $0=p-qy+ry^2$, les valeurs $p=\frac{q^2-m}{2n}$ et $r=\frac{n}{2}$.

(*Notes des éditeurs.*)

sera l'inconnue y qu'on demandait. Le radical, lui-même, sera

$$nM-qO=qO-nN.$$

17. Comme le coefficient q est entièrement arbitraire, on fera bien de supposer $q=0$; et, dans cette supposition, l'indéterminée y sera simplement égale à la fraction $\frac{\sqrt{m}}{n}$. Développant donc cette fraction en fraction-continue qui, dans tous les cas, sera périodique, on connaîtra ainsi les bases, tant initiales que périodiques; le coefficient $O=(\beta\varepsilon)(\beta F)-(\beta\zeta)(\beta E)$ fera connaître toutes les valeurs de y; et les racines correspondantes de my^2+n^2 seront comprises dans la formule nM ou $-nN$; qui revient à $n\{(\alpha\varepsilon)(\beta F)-(\alpha\zeta)(\beta E)\}$.

18. Dans le cas particulier, mais très-fréquent où $n=1$, on obtient, sur-le-champ et presque sans calcul, les valeurs entières de l'indéterminée y qui peuvent rendre l'expression my^2+1 un quarré parfait. Il suffit, pour cela, de développer en fraction-continue la racine quarrée du coefficient numérique m; et, comme on a $M+N=0$, la seule base initiale sera nécessairement (14)

$$\alpha=\frac{(AF)-(BE)}{2(AE)}\ (*).$$

On aura de plus $y=(AE)$; et la racine correspondante de my^2+1, sera $(AF)-\alpha(AE)$ ou $(BE)+\alpha(AE)$ ou, enfin, $\frac{1}{2}\{(AF)+(BE)\}$. Les exemples suivans éclairciront cette méthode, et nous apprendrons aussi à rendre quarrée la fonction my^2-1, du moins lorsque cela est possible.

19. *Exemple I.* Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $3y^2+1$?

On a ici $m=3$, d'où

$$\sqrt{m}=\sqrt{3}=1,7320508\ldots\ldots=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots;$$

(*) Dans le cas d'une seule base initiale, on a (14)

$$M=-\alpha(AE)+(AF),$$
$$N=-\alpha(AE)-(BE);$$

ainsi, $\alpha=1$, $a=1$, $b=2$; on aura donc les deux séries de médiateurs que voici :

$$
\begin{array}{ll}
(AE)=1, & (BE)=1, \\
(AF)=3, & (BF)=2, \\
\hline
(AE')=4, & (BE')=3, \\
(AF')=11, & (BF')=8, \\
\hline
(AE'')=15, & (BE'')=11, \\
(AF'')=41, & (BF'')=30, \\
\hline
(AE''')=56, & (BE''')=41, \\
(AF''')=153, & (BF''')=112 \text{ (*)};
\end{array}
$$

ainsi, les valeurs consécutives de y seront celles des médiateurs (AE), c'est-à-dire, 1, 4, 15, 56, ..., et les racines correspondantes de $3y^2+1$ seront (AF)—(AE) ou (AE)+(BE) ou, enfin, $\frac{1}{2}\{(AF)+(BE)\}$, c'est-à-dire, 2, 7, 26, 97, ...

Dans cet exemple, on pourrait aussi regarder les deux bases 1, 1, comme initiales; les bases périodiques seraient alors 2, 1. Ayant donc, dans ce cas,

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad a=2,\quad b=1,$$

on en déduirait les médiateurs que voici :

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha E)=1, & (\beta E)=0, \\
(\alpha F)=2, & (\beta F)=1, \\
\hline
(\alpha E')=5, & (\beta E')=3, \\
(\alpha F')=7, & (\beta F')=4, \\
\hline
(\alpha E'')=19, & (\beta E'')=11, \\
(\alpha F'')=26, & (\beta F'')=15,
\end{array}
$$

---

donc $$0=M+N=-2\alpha(AE)+(AF)-(BE),$$

d'où $$\alpha=\frac{(AF)-(BE)}{2(AE)}.$$

(*) L'auteur emploie ici des lettres accentuées, pour distinguer entre elles les diverses périodes.

(Notes des éditeurs.)

$$(\alpha E''') = 71\,, \qquad (\beta E''') = 41\,,$$
$$(\alpha F''') = 97\,, \qquad (\beta F''') = 56\,,$$

on aurait alors $y = O = (\beta F) - (\beta E)$; ce qui, appliqué aux cas particuliers, conduit aux nombres précédemment obtenus, savoir : 1, 4, 15, 56, ... Les racines correspondantes seraient comprises sous la formule générale $2(\beta E) - (\beta F)$; ce qui donnerait, comme ci-dessus, les nombres 2, 7, 26, 97, ...

Exemple II. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $7y^2+1$?

On a ici $m=7$, d'où

$$\sqrt{m} = \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots\ldots ;$$

ce qui donne

$$\alpha = 2\,, \quad a = 1\,, \quad b = 1\,, \quad c = 1\,, \quad d = 4\,;$$

en employant les formules du n.° 14, on trouve

$$M = -2(AE) + (AF)\,,$$
$$N = -2(AE) - (BE)\,,$$
$$O = -\ (AE).$$

On a, en outre, la suite des médiateurs

$(AE) = 0$,	$(BE) = 1$,
$(AF) = 1$,	$(BF) = 1$,
$(AE') = 3$,	$(BE') = 2$,
$(AF') = 14$,	$(BF') = 9$,
$(AE'') = 48$,	$(BE'') = 31$,
$(AF'') = 223$,	$(BF'') = 144$,
$(AE''') = 765$,	$(BE''') = 494$,
$(AF''') = 3554$,	$(BF''') = 2295$;

les valeurs consécutives de y sont celles de O, savoir : 1, 3, 48, 765, ..., et les valeurs correspondantes de la racine quarrée de $7y^2+1$ sont celles de M ou de $-$N, c'est-à-dire, 1, 8, 127, 2024....

En considérant comme initiales les bases 1, 1, la période serait 1, 1, 4, 1 ; on aurait donc

$$\alpha=2\ ,\quad \beta=1\ ,\quad a=1\ ,\quad b=1\ ,\quad c=4\ ,\quad d=1\ ;$$

de là résulterait

$$(\alpha\varepsilon)=2\ ,\quad (\alpha\zeta)=3\ ,\quad (\beta\varepsilon)=1\ ,\quad (\beta\zeta)=1\ ;$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} L&=2(\alpha F)-3(\alpha E)\ ,\\ M&=2(\beta F)-3(\beta E)\ ,\\ N&=\ (\alpha F)-\ (\alpha E)\ ,\\ O&=\ (\beta F)-\ (\beta E)\ .\end{aligned}$$

Les médiateurs seraient ici

$$\begin{array}{ll} (\alpha E)=\ \ 2\ , & (\beta E)=\ 1\ ,\\ (\alpha F)=\ \ 3\ , & (\beta F)=\ 1\ ,\\ \hline (\alpha E')=\ 37\ , & (\beta E')=\ 14\ ,\\ (\alpha F')=\ 45\ , & (\beta F')=\ 17\ ,\\ \hline (\alpha E'')=\ 590\ , & (\beta E'')=\ 223\ ,\\ (\alpha F'')=\ 717\ , & (\beta F'')=\ 271\ ,\\ \hline (\alpha E''')=\ 9413\ , & (\beta E''')=3554\ ,\\ (\alpha F''')=11427\ , & (\beta F''')=4319\ ,\end{array}$$

ce qui donnerait pour les valeurs de y, et pour les racines correspondantes de $7y^2+1$, les mêmes nombres que ci-dessus.

Exemple III. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $107y^2+1$?

En développant $\sqrt{107}$ en fraction-continue, on trouve d'abord la base initiale 10, puis les bases périodiques 2, 1, 9, 1, 2, 20 : d'après quoi on a

$$\begin{aligned} M&=-10(AE)+(AF)\ ,\\ N&=-10(AE)-(BE)\ ,\\ O&=-\quad (AE)\ ;\end{aligned}$$

les médiateurs sont

$$\begin{array}{ll} (AE)=0\ , & (BE)=1\ ,\\ (AF)=1\ , & (BF)=1\ ,\end{array}$$

(AE')

$$(AE')= 93\,, \quad (BE')= 32\,,$$
$$(AF')= 1892\,, \quad (BF')= 651\,,$$
$$(AE'')= 178932\,, \quad (BE'')= 31567\,,$$
$$(AF'')=3640207\,, \quad (BF'')=642524\,;$$

ce qui donne pour y les valeurs 0, 93, 178932,.... et, pour les racines correspondantes de $107y^2+1$, 1, 962, 1850887.

Exemple IV. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $41y^2+1$?

En développant en fraction-continue, la racine quarrée de 41, on trouve la base initiale 6, suivie des bases périodiques $2, 2, 12$; de manière qu'on a

$$\alpha=6\,,\quad a=2\,,\quad b=2\,,\quad c=12.$$

Le nombre des bases de cette période est *impair*, tandis que nos formules le supposent *pair* ; mais, comme cette période revient à l'infini, il est permis de doubler le nombre de ses bases; la période sera ainsi $2, 2, 12, 2, 2, 12$. Le nombre des bases se trouvant alors *pair*, l'application des formules précédentes pourra avoir lieu. En s'arrêtant, au contraire, à trois bases, on trouvera les valeurs de y qui rendent quarrée l'expression $41y^2-1$, puisque, dans ce cas, on a $\varphi=-1$.

Dans l'un et l'autre cas, a désignera toujours la première base périodique, c'est-à-dire, 2; mais, dans le premier, e et f auront les valeurs 2 et 12, tandis que, dans le second, ces lettres se trouveront remplacées par b et c.

Les valeurs de y qui rendront quarrée l'expression $41y^2-1$ seront celles des médiateurs (AE), (AE''), (AE'''')..., et les racines correspondantes seront

$$(AF)-6(AE)=(BE)+6(AE)\,,$$
ou
$$(AF'')-6(AE'')=(BE'')+6(AE'')\,,$$
ou
$$(AF'''')-6(AE'''')=(BE'''')+6(AE'''')\,,$$

et, ainsi des autres. Au contraire, les valeurs de y qui rendront quarrée l'expression $41y^2+1$ seront celles des médiateurs (AE'), (AE'''), ..., et les racines correspondantes seront

$$(AF')-6(AE')=(BE')+6(AE')\,,$$
ou
$$(AF''')-6(AE''')=(BE''')+6(AE''')\,,$$

et ainsi de autres. Les médiateurs sont ici

(AE) = 5,	(BE) = 2,
(AF) = 62,	(BF) = 25,
(AE′) = 320,	(BE′) = 129,
(AF′) = 3969,	(BF′) = 1600,
(AE″) = 20485,	(BE″) = 8258,
(AF″) = 254078,	(BF″) = 102428,
(AE‴) = 1311360,	(BE‴) = 528641,
(AF‴) = 16264961,	(BF‴) = 6556800.

Ainsi les nombres qui rendent quarrée l'expression $41y^2-1$ sont 5, 20485, ..., et les racines correspondantes sont 32, 131168, ... ; et ceux qui rendent quarrée l'expression $41y^2+1$ sont 320, 1311360,.., et les racines correspondantes sont 2049, 8396801, ...

Cette marche doit être suivie, toutes les fois que, dans le développement de la racine de m, on parvient à un nombre *impair* de bases périodiques ; et l'on voit que notre méthode donne, non-seulement la solution de l'équation $my^2+1=z^2$, mais encore celle de l'équation $my^2-1=z^2$, toutes les fois, du moins, que cette dernière est possible en nombres entiers.

Exemple V. Déterminer les valeurs de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $13y^2-1$?

On a ici

$$\alpha=3\ ,\quad a=1\ ,\quad b=1\ ,\quad c=1\ ,\quad d=1\ ,\quad e=6.$$

Le nombre des bases est ici *impair* ; mais, en le doublant, il devient pair, et on a alors

$$\begin{aligned}M&=-3(AE)+(AF)\ ,\\ N&=-3(AE)-(BE)\ ,\\ O&=-\ (AE)\ ;\end{aligned}$$

les médiateurs sont ensuite

(AE) = 5,	(BE) = 3,
(AF) = 33,	(BF) = 20,

$$\begin{array}{ll} (AE')= 180, & (BE')= 109, \\ (AF')= 1189, & (BF')= 720, \\ \hline (AE'')= 6485, & (BE'')= 3927, \\ (AF'')= 42837, & (BF'')= 25940, \\ \hline (AE''')= 233640, & (BE''')= 141481, \\ (AF''')= 1543321, & (BF''')= 934560. \end{array}$$

Ainsi, les nombres qui rendront quarrée l'expression $13y^2-1$ seront 5, 6485, ..., et les racines de ces quarrés seront 18, 23382, ...; ceux, au contraire, qui rendront quarrée l'expression $13y^2+1$ seront 180, 233640, ..., et les racines correspondantes seront 649, 842401, ...

Exemple VI. Déterminer les valeurs de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $17y^2+1$?

On a simplement ici $\alpha=4$, $a=8$;
la période entière ne consiste donc que dans une base unique. Les médiateurs sont

$$\begin{array}{l} (AF)=(B)= 8, \\ (AF')=(BF)= 65, \\ (AF'')=(BF')= 528, \\ (AF''')=(BF'')= 4289, \\ (AF'''')=(BF''')=34840. \end{array}$$

les valeurs de y qui rendent $17y^2-1$ un quarré parfait sont donc 65, 4289, ..., et les racines correspondantes sont

$$\begin{array}{l} (AF'')-4(AF')=(AF)+4(AF')= 268, \\ (AF'''')-4(AF''')=(AF'')+4(AF''')=34840, \end{array}$$

et ainsi des autres; celles qui rendent, au contraire, $17y^2+1$ un quarré parfait sont 8, 528, 34840, ..., et les racines correspondantes sont

$$\begin{array}{l} (AF')-4(AF)= 1+4(AF)= 33, \\ (AF''')-4(AF'')=(AF')+4(AF'')= 2177, \\ (AF^{V})-4(AF'''')=(AF''')+4(AF'''')=283009, \end{array}$$

et ainsi des autres.

20. L'équation générale du second degré

$$o=p-qy+ry^2$$

peut être ramenée à

$$o=L-(M+N)y+Oy^2 ,$$

en déterminant les coefficiens L, M, N, O, de manière à ce qu'ils satisfassent aux quatre équations suivantes

$$L=p , \quad M+N=q , \quad O=r , \quad LO-MN=\varrho ;$$

la lettre ϱ désignant toujours l'unité prise en *plus* ou en *moins*, suivant que le nombre des bases périodiques est *pair* ou *impair*. Il en résulte

$$L=p , \quad 2M=q+\sqrt{q^2-4pr+4\varrho} ,$$
$$O=r , \quad 2N=q-\sqrt{q^2-4pr+4\varrho} .$$

Ainsi, pour que l'équation $o=p-qy+ry^2$ soit réductible à $o=L-(M+N)y+Oy^2$, sans qu'on soit obligé de développer y en fraction-continue périodique, ce qui exige quelquefois qu'on l'évalue d'abord à 40 ou 50 décimales (*), il faudra que $q^2-4pr+4$ ou $q^2-4pr-4$ soit un quarré parfait.

C'est ainsi que l'équation $o=13-21y+3y^2$, dans laquelle on a $q^2-4pr+4=(17)^2$, devient $o=13-19y-2y+3y^2$; on a alors $L=13$, $M=19$, $N=2$, $O=3$; ainsi, dans cet exemple, $LO-MN=+1$. De même l'équation $o=17-19y+y^2$, dans laquelle on a $q^2-4pr-4=(17)^2$, devient $o=17-18y-y+y^2$; on a alors $L=17$, $M=18$, $N=1$, $O=1$; ainsi, dans cet exemple, $LO-MN=-1$.

21. Étant proposée l'équation générale du second degré $o=p-qy+ry^2$, on peut toujours déterminer un facteur k de manière que l'équation $o=kp-kqy+kry^2$ soit réductible à $o=L-(M+N)y+Oy^2$. Il faudra, pour cela que $(q^2-4pr)k^2+4\varrho$ soit un quarré parfait. k

(*) Il est même essentiel d'observer qu'à quelque nombre de chiffres décimaux que l'on pousse l'approximation, on ne saurait jamais avoir une entière confiance dans le résultat qu'on en déduit, si l'on n'a vérifié ce résultat, en remontant à l'équation du second degré dont il doit être une des racines; il peut arriver en effet que la suite, soit des bases initiales, soit des bases périodiques présente, dès les commencemens, une périodicité apparente qui fasse prendre le change sur la véritable loi de la fraction-continue. Au surplus, en procédant par la méthode d'approximation de M. Lagrange, on évite tout embarras sur ce point.

(*Note des éditeurs.*)

étant déterminée de manière à satisfaire à cette condition, on aura

$$L=kp\,,$$
$$2M=kq+\sqrt{(q^2-4pr)k+4\nu}\,,$$
$$2N=kq-\sqrt{(q^2-4pr)k+4\nu}\,;$$
$$O=kr.$$

Soit par exemple l'équation $o=7-14y+4y^2$, qui donne $p=7$, $q=14$, $r=4$, et $q^2-4pr=84$. Il faudra déterminer k de manière que $84k^2+4$, ou $21k^2+1$ soit un quarré parfait ; on trouvera d'après cela $k=12$, et l'équation sera $o=84-168y+48y^2$ ou $o=84-139y-29y+48y^2$, d'où $L=84$, $M=139$, $N=29$, $O=48$ et conséquemment $LO-MN=+1$.

22. Étant proposée cette même équation générale du second degré $o=p-qy+ry^2$, qui donne $2ry=q+\sqrt{q^2-4pr}$ aussi bien que $2ry=q-\sqrt{q^2-4pr}$, on en tirera facilement les bases initiales, en développant en fraction-continue la fraction

$$\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2r} \quad \text{ou} \quad \frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2r}.$$

Connaissant ces bases, et par conséquent les médiateurs L, M, N, O, on peut demander les médiateurs A, B, C, D, lesquels conduisent ensuite (11) aux bases périodiques $a, b, c, d, \ldots$; on aura :

$$\left.\begin{aligned} A&=pR^2-qPR+rP^2\,,\\ B-C&=2pRS-q(PS+QR)+2rPQ\,,\\ D&=-pS^2+qQS-rQ^2\,;\end{aligned}\right\}\ (*)$$

et de plus $\quad BC-AD=\nu$, c'est-à-dire $=+1$ ou $=-1$.

Il en résultera

$$A=pR^2-qPR+rP^2\,,$$

(*) La première équation en y du n.° 14 peut être écrite comme il suit :

$$\begin{aligned} o=&Q^2A-PQ(B-C)-P^2D\\ &-[2QSA-(PS+QR)(B-C)-2PRD]y\\ &+[S^2A-RS(B-C)-R^2D]y^2.\end{aligned}$$

En la comparant à $o=p-qy+ry^2$, il viendra

$$Q^2A-PQ(B-C)-P^2D=p\,,$$
$$2QSA-(PS+QR)(B-C)-2PRD=q\,,$$

$$2B = \ 2pRS - q(PS+QR) + 2rPQ + \sqrt{q^2-4pr+4},$$
$$2C = -2pRS + q(PS+QR) - 2rPQ + \sqrt{q^2-4pr+4},$$
$$D = -pS^2 + qQS - rQ^2.$$

Exemple. Soit proposée l'équation du second degré $0=7-14y+4y^2$. Il faudra déterminer le facteur numérique k de manière que $84k^2+4$ ou $4(21k^2+1)$ devienne un quarré parfait. On trouvera, par les méthodes qui ont été précédemment exposées, $k=12$; multipliant donc l'équation proposée par 12, ce qui donnera $0=84-168y+48y^2$, on aura

$$p=84, \qquad q=168, \qquad r=48;$$

développant alors en fraction-continue la valeur numérique de $y=\frac{1}{4}(7+\sqrt{21})=11{,}5825757\ldots$, on aura la base initiale $\alpha=2$; et, après elle, commencera la période. Cela donnera

$$P=1, \qquad Q=2, \qquad R=0, \qquad S=1;$$

d'où l'on conclura, par les formules précédentes,

$$A=48, \qquad B=67, \qquad C=43, \qquad D=60;$$

réduisant donc en fraction-continue le rapport $D:B$ ou $60:67$, on aura la suite des bases périodiques, savoir:

$$a=1, \quad b=8, \quad c=1; \quad d=1, \quad e=2, \quad f=1.$$

23. On a vu précédemment que, pour transformer en quarré parfait l'expression my^2+n^2, il faut, en prenant q à volonté, transformer en fraction-continue $y=\frac{q+\sqrt{m}}{n}$: le développement faisant connaître, tant les bases initiales α, β, γ, ..., que les bases périodiques, a, b, c, ..., et par conséquent les médiateurs

$$(\alpha\varepsilon), \qquad (\alpha\zeta), \qquad (\beta\varepsilon), \qquad (\beta\zeta),$$
$$(\alpha E), \qquad (\alpha F), \qquad (\beta E), \qquad (\beta F);$$

et que, déduisant de ces médiateurs les valeurs des coefficiens L, M, N, O, en vertu du N.° 12, les valeurs de y seront celles de O, tandis que les racines correspondantes seront

---

$$S^2A - RS(B-C) - R^2D = r;$$

considérant, dans ces équations, A, B—C, D, comme trois inconnues, et ayant égard à ce que $QR-PS=\pm1$, d'où résulte $(QS-PR)^2=1$, on obtiendra les trois équations de l'auteur; en y joignant ensuite l'équation $BC-AD=\pm1$, on en déduira les valeurs de A, B, C, D, données dans le texte. (*Note des éditeurs.*)

$$nM - qO = qO - nN.$$

Nous en avons fait jusqu'ici l'application au simple cas de $n=1$; voyons actuellement comment il faudra opérer lorsqu'on attribuera à n une valeur entière quelconque, différente de l'unité.

Exemple. Proposons-nous de déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $11y^2+49$?

On a ici $m=11$, $n=7$; ainsi il faudra développer en fraction-continue la fraction $\frac{q+\sqrt{11}}{7}$. La racine quarrée de 11 est 3,3166247903554.... Quant à la valeur de q, elle est arbitraire, pourvu que q soit entier. On voit, au reste, qu'il suffit de considérer les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; attendu que, passé *six*, les mêmes résultats doivent constamment revenir, et que la différence ne peut tomber que sur la première α des bases initiales, laquelle n'influe en rien sur les valeurs numériques des coefficiens O. Voici une table qui contient, tant les bases initiales que les bases périodiques qui résultent du développement des fractions $\frac{q+\sqrt{11}}{7}$, dans les différentes suppositions qu'on peut faire pour q:

q	α	β	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	2	9	23	9	4	»	»	»	»
1	0	1	1	1	1	1	1	4	46	4
2	0	1	3	6	»	»	»	»	»	»
3	0	1	9	4	9	23	»	»	»	»
4	1	22	9	4	9	23	»	»	»	»
5	1	5	3	6	»	»	»	»	»	»
6	1	3	46	4	1	1	1	1	1	4

Cette table nous apprend que, dans la recherche des valeurs de y qui peuvent faire devenir l'expression my^2+n^2 un quarré parfait, le choix du nombre arbitraire q n'est pas indifférent. Dans l'exemple actuel, où $m=11$ et $n=7$, les bases initiales sont partout au au nombre de deux ; la première α se reconnaît par la seule inspection des nombres m, n et q. Dans la colonne des secondes bases initiales, désignées par β, on trouve les nombres 1, 2, 3, 5, 22, qui ne paraissent être soumis à aucune loi connue jusqu'ici. Quant aux bases périodiques, les valeurs $q=3$ et $q=4$, dont la somme est 7, nous font connaître la période composée des nombres 9, 4, 9, 23. Ces mêmes bases, quoique disposées dans un ordre différent, sont encore fournies par les valeurs $q=0$, et conséquemment aussi $q=7$, dont la somme est encore 7. Les valeurs $q=1$ et $q=6$, dont la somme est aussi 7, fournissent la période composée des bases 1, 1, 1, 1, 1, 4, 46, 4, quoique disposées dans un ordre différent. Toutes ces périodes nous font connaître certaines valeurs de y, mais elles ne renferment pas la solution complète du problème.

La série complète des valeurs de y résulte des développemens que l'on obtient en supposant $q=2$ ou $q=5$, dont la somme est encore 7. Il en provient les deux bases 3, 6. En adoptant cette période, et la valeur 2 pour q, on a

$$\alpha=0,\qquad \beta=1,\qquad a=3,\qquad b=6,$$

ce qui donne $(\alpha\epsilon)=0$, $(\alpha\zeta)=1$, $(\beta\epsilon)=1$, $(\beta\zeta)=1$,

les médiateurs qui en proviennent sont

$$\begin{array}{ll}
(\alpha E)=0, & (\beta E)=1, \\
(\alpha F)=1, & (\beta F)=1, \\
\hline
(\alpha E')=3, & (\beta E')=4, \\
(\alpha F')=19, & (\beta F')=25, \\
\hline
(\alpha E'')=60, & (\beta E'')=79, \\
(\alpha F'')=379, & (\beta F'')=499, \\
\hline
(\alpha E''')=1197, & (\beta E''')=1576, \\
(\alpha F''')=7561, & (\beta F''')=9955.
\end{array}$$

En

En appliquant ensuite les formules du n.° 12, on trouve

$$L=-(\alpha E),$$
$$M=-(\beta E),$$
$$N=(\alpha F)-(\alpha E),$$
$$O=(\beta F)-(\beta E).$$

Les valeurs de y qui renferment la solution du problème sont celles de O, et les racines qui leur répondent sont $7M-2O=2O-7N$. On a donc ainsi;

valeurs de $y=0$, 21, 420, 8379,....
racines.....$=7$, 70, 1393, 27790,....

(*La suite incessamment.*)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 *de ce volume;*

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Problème général. Des points étant donnés, en nombre quelconque, sur un plan; déterminer, sur ce plan, un nouveau point dont la somme des distances aux points donnés soit un minimum ?

Solution. Ce problème peut être traité par plusieurs méthodes diverses, entre lesquelles nous choisirons seulement les deux suivantes:

Première méthode. Soient m, m', m'', ..., les points donnés, M le point cherché, et z, z', z'', ..., les distances respectives de ce dernier point à tous les autres.

Soit rapporté tout le système à deux axes rectangulaires, et soient alors les coordonnées, tant du point cherché que des points donnés, ainsi qu'il suit :

$$\text{pour M}\begin{cases}x\,,\\y\,;\end{cases}\quad\text{pour } m\begin{cases}\alpha\,,\\\beta\,;\end{cases}\quad\text{pour } m'\begin{cases}\alpha'\,,\\\beta'\,;\end{cases}\quad\text{pour } m''\begin{cases}\alpha''\,,\\\beta''\,;\end{cases}\ldots$$

on aura

$$z=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,,\quad z'=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}\,,\quad z''=\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}\,,\ldots$$

en désignant donc par S la somme des distances du point M aux points m, m', m'', ..., on aura

$$S=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}+\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}+\ldots\ldots;$$

or, par les conditions du problème, S doit être un *minimum*; d'où il suit qu'on doit avoir, à la fois,

$$\frac{dS}{dx}=0\,,\qquad\frac{dS}{dy}=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+\frac{x-\alpha'}{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}}+\frac{x-\alpha''}{\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}}+\ldots=0\,,$$

$$\frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+\frac{y-\beta'}{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}}+\frac{y-\beta''}{\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}}+\ldots=0\,.$$

Voilà donc deux équations entre les coordonnées x et y du point cherché M, ce qui, théoriquement parlant, suffit pour la détermination de ce point ; mais malheureusement ces équations, par leur extrême complication, ne peuvent être, dans le plus grand nombre des cas, d'un grand secours pour la résolution complète du problème.

Soient désignés respectivement par a, a', a'', ..., les angles que forment, avec l'axe des x, les droites z, z', z'', ... menées du point M aux points m, m', m'', ...; à l'aide de ces notations, les équations auxquelles nous venons de parvenir prendront cette forme très-simple

$$\text{Cos.}a+\text{Cos.}a'+\text{Cos.}a''+\text{Cos.}a'''+\ldots\ldots=0\,,$$

$$\text{Sin.}a+\text{Sin.}a'+\text{Sin.}''a+\text{Sin.}a'''+\ldots\ldots=0\,;$$

ce qui nous apprend que la somme des cosinus des angles formés sur une même droite quelconque, par les droites z, z', z'',...., doit être zéro.

De là il est facile de conclure (*) que les droites z, z', z'',...., doivent être respectivement parallèles aux côtés d'un certain polygone de m côtés, qui aurait tous ses côtés égaux entre eux; et, comme la somme des angles autour du point M doit être quatre angles droits, il en résulte que ces angles doivent être consécutivement égaux aux angles extérieurs consécutifs du polygone dont il vient d'être question.

D'après ces considérations on voit que le problème général que nous nous sommes proposé, dépend du suivant: n *points* m, m′, m″,.... *étant donnés de position sur un plan, et une droite étant donnée de longueur, construire sur ce plan un polygone de* n *côté, dont tous les côtés soient égaux entre eux et à la droite donnée, et qui, en outre soit tel que ses cotés, prolongés s'il est nécessaire, passent respectivement par les* n *points donnés* (**)*?* Il est clair, en effet, qu'en appliquant la solution générale de ce problème au cas particulier où la droite donnée sera nulle, le polygone cherché se réduira à un point unique, lequel ne sera autre chose que le point M (***).

Venons présentement aux applications. 1.° S'il y a trois points donnés m, m', m'', les trois angles formés par les droites z, z', z'', menées du point cherché M à ceux-là, devront être consécutivement égaux aux trois angles extérieurs d'un *triangle équilatéral*,

---

(*) Voyez la page 192 de ce volume.

(**) On propose de trouver une solution de ce problème?

(***) Le problème proposé peut aussi être réduit à ce problème de statique: n *cordons étant réunis à un même nœud et situés dans un même plan, et des puissances égales quelconques étant appliquées à l'extrémité de chacun d'eux, déterminer de quelle manière le système doit être disposé, dans le cas d'équilibre, pour que les directions des cordons passent respectivement par* n *points donnés sur leur plan?* Ou encore à cet autre: *Les sommets d'un polygone plan, de* n *côtés, jouissant d'une même puissance attractive quelconque, indépendante des distances; en quel point du plan de ce polygone faudrait-il placer un corps, pour qu'il demeurât en équilibre?*

(*Notes des éditeurs.*)

c'est-à-dire, qu'ils devront être égaux entre eux, et de 120° chacun. Ainsi, pour résoudre le problème, il suffira de construire, sur les deux distances mm' et mm'' prises pour cordes, et du côté de l'intérieur du triangle formé par les trois points m, m', m'', des arcs capables d'un angle de 120°; l'intersection de ces deux arcs sera le point cherché M. (*)

2.° S'il y a quatre points donnés m, m', m'', m''', les quatre angles formés consécutivement autour du point M, par les droites z, z', z'', z''', menées de ce point aux points donnés, devront être respectivement égaux aux quatre angles extérieurs consécutifs d'un *Rhombe*. Ainsi, de ces quatre angles, les opposés devront être égaux, tandis que ceux qui auront un côté commun devront être supplémens l'un de l'autre. Le point cherché M se trouvera donc à l'intersection des deux diagonales du quadrilatère qui aurait les sommets de ses angles aux points donnés.

Nous n'étendrons pas plus loin ces applications, dont la difficulté s'accroît d'une manière notable, dès que les points donnés sont au nombre de plus de quatre.

Deuxième méthode.

Soient a, b, c, d,...., les distances consécutives du point cherché aux points donnés, en sorte qu'on doive avoir

$$(1) \qquad a+b+c+d+\ldots\ldots = \text{minimum} ;$$

soient, en outre,

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \ldots\ldots$$

les angles formés respectivement par

$$a \text{ et } b, \quad b \text{ et } c, \quad c \text{ et } d, \quad d \text{ et } e, \ldots\ldots$$

de manière qu'on ait

$$(2) \qquad A+B+C+D+\ldots\ldots = 360° ;$$

(*) On peut, si l'on veut, ne décrire qu'un seul de ces arcs, et le point cherché sera déterminé par son intersection avec une droite menée du milieu du reste de la circonférence à celui des trois points donnés qui n'aura pas été employé.

(*Note des éditeurs.*)

soit, enfin, P l'aire du polygone dont les sommets des angles sont situés aux points donnés ; on aura

$$(3) \qquad ab\text{Sin.}A+bc\text{Sin.}B+cd\text{Sin.}C+de\text{Sin.}D+\dots\dots=2P.$$

Si le polygone est absolument donné, il y aura nécessairement, entre les distances a, b, c, d,......, des relations indépendantes des angles A, B, C, D,.......: attendu que, deux de ces distances étant données, toutes les autres peuvent en être déduites. Néanmoins, si l'on suppose que ce n'est pas proprement le polygone, mais seulement son aire P, qui est donnée, il sera alors permis de considérer a, b, c, d,......., comme des variables absolument indépendantes, et on déduira de l'équation (3)

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin.}A+c\,\text{Sin.}B)\,.\,\delta b+ab\text{Cos.}A\,.\,\delta A\\+(b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C)\,.\,\delta c+bc\text{Cos.}B\,.\,\delta B\\+(c\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D)\,.\,\delta d+cd\text{Cos.}C\,.\,\delta C\\+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}=0 \quad (4).$$

Mais l'équation (1) revient à

$$\delta a+\delta b+\delta c+\delta d+\dots\dots=0\,; \qquad (5)$$

et l'équation (2) donne

$$\delta A+\delta B+\delta C+\delta D+\dots\dots=0\,; \qquad (6)$$

ajoutant donc à l'équation (4) les produits des équations (5) et (6) par deux multiplicateurs indéterminés $-\lambda$ et $-\mu$, il viendra :

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin.}A+c\,\text{Sin.}B-\lambda)\,.\,\delta b+(ab\text{Cos.}A-\mu)\,.\,\delta A\\+(b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C-\lambda)\,.\,\delta c+(bc\text{Cos.}B-\mu)\,.\,\delta B\\+(c\,\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D-\lambda)\,.\,\delta d+(cd\text{Cos.}C-\mu)\,.\,\delta C\\+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}=0\,;$$

équation dans laquelle il sera permis de considérer les variations δa, δb, δc,....; δA, δB, δC,...., comme absolument indépendantes, et de laquelle on déduira conséquemment

$$a\text{Sin.}A+c\text{Sin.}B=\lambda\,,\quad b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C=\lambda\,,\quad c\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D=\lambda\,,\dots.$$

$$ab\text{Cos.}A=\mu\,,\qquad bc\text{Cos.}B=\mu\,.\qquad cd\text{Cos.}C=\mu\,,\dots.$$

Si les points donnés sont au nombre de n, il y aura n équations dans chaque ligne; on pourra donc tirer de celles de la première les valeurs des n distances a, b, c, d,...., lesquelles se trouveront toutes affectées du facteur λ, substituant ces valeurs dans les équations de la seconde ligne, et faisant, pour abréger, $\frac{\mu}{\lambda^2}=N$, on aura, entre les n angles inconnues A, B, C, D,...., et la constante N, n équations qui donneront les valeurs de ces angles en fonction de N qu'on déterminera ensuite, en exprimant que les valeurs obtenues satisfont à l'équation (3).

On voit par là que, bien que nous ayons supposé que c'était seulement l'aire P du polygone qui était donnée, les valeurs des angles A, B, C, D,...., se trouvant délivrées de P, ainsi que des distances a, b, c, d,...., nos résultats seront aussi exacts que s'ils eussent été déduits d'une analise en apparence plus rigoureuse.

Appliquons successivement ce procédé au triangle et au quadrilatère. On a 1.° pour le triangle, les six équations

$$a\mathrm{Sin.A}+c\mathrm{Sin.B}=\lambda\,,\quad b\mathrm{Sin.B}+a\mathrm{Sin.C}=\lambda\,,\quad c\mathrm{Sin.C}+b\mathrm{Sin.A}=\lambda\,,\ldots$$
$$ab\mathrm{Cos.A}=\mu\,,\qquad bc\mathrm{Cos.B}=\mu\,,\qquad ca\mathrm{Cos.C}=\mu\,,\ldots$$

Divisant les trois dernières deux à deux, il viendra

$$a\mathrm{Cos.A}-c\mathrm{Cos.B}=0\,,$$
$$b\mathrm{Cos.B}-a\mathrm{Cos.C}=0\,,$$
$$c\mathrm{Cos.C}-b\mathrm{Cos.A}=0\,.$$

Comparant chacune de celles-ci à sa correspondante dans la première ligne, on en déduira ces doubles valeurs :

$$a=\frac{\lambda\mathrm{Cos.B}}{\mathrm{Sin.(A+B)}}\,,\qquad b=\frac{\lambda\mathrm{Cos.C}}{\mathrm{Sin.(B+C)}}\,,\qquad c=\frac{\lambda\mathrm{Cos.A}}{\mathrm{Sin.(C+A)}}\ ;$$
$$a=\frac{\lambda\mathrm{Cos.B}}{\mathrm{Sin.(B+C)}}\,,\qquad b=\frac{\lambda\mathrm{Cos.C}}{\mathrm{Sin.(C+A)}}\,,\qquad c=\frac{\lambda\mathrm{Cos.A}}{\mathrm{Sin.(A+B)}}\ ;$$

lesquelles, étant égalées entre elles, donneront

$$\mathrm{Sin.(A+B)}=\mathrm{Sin.(B+C)}=\mathrm{Sin.(C+A)}$$

d'où, à cause de $A+B+C=360°$, on conclura

$$A=B=C\,,$$

comme ci-dessus.

2.° Pour le quadrilatère, on trouvera, en faisant absolument le même calcul,

$$a=\frac{\lambda\text{Cos.}B}{\text{Sin.}(A+B)}\,,\quad b=\frac{\lambda\text{Cos.}C}{\text{Sin.}(B+C)}\,,\quad c=\frac{\lambda\text{Cos.}D}{\text{Sin.}(C+D)}\,,\quad d=\frac{\lambda\text{Cos.}A}{\text{Sin.}(D+A)}\,;$$

$$a=\frac{\lambda\text{Cos.}C}{\text{Sin.}(C+D)}\,,\quad b=\frac{\lambda\text{Cos.}D}{\text{Sin.}(D+A)}\,,\quad c=\frac{\lambda\text{Cos.}A}{\text{Sin.}(A+B)}\,,\quad d=\frac{\lambda\text{Cos.}B}{\text{Sin.}(B+C)}\,;$$

d'où on conclura :

$$\text{Cos.}B\text{Sin.}(C+D)=\text{Cos.}C\text{Sin.}(A+B)\,,\qquad \text{Cos.}C\text{Sin.}(D+A)=\text{Cos.}D\text{Sin.}(B+C)\,,$$
$$\text{Cos.}D\text{Sin.}(A+B)=\text{Cos.}A\text{Sin.}(C+D)\,,\qquad \text{Cos.}A\text{Sin.}(B+C)=\text{Cos.}B\text{Sin.}(D+A)\,.$$

La condition

$$A+B+C+D=360°.$$

donne d'ailleurs

$$\text{Sin.}(C+D)=-\text{Sin.}(A+B)\,,\qquad \text{Sin.}(D+A)=-\text{Sin.}(B+C).$$

substituant donc, il viendra

$$\text{Cos.}B=-\text{Cos.}C,\ \text{Cos.}C=-\text{Cos.}D,\ \text{Cos.}D=-\text{Cos.}A,\ \text{Cos.}A=-\text{Cos.}B;$$

d'où

$$C=180°-B\,,\quad D=180°-C\,,\quad A=180°-D\,,\quad B=180°-A\,;$$

et encore

$$A=C\,,\qquad B=D\,;$$

mêmes relations que ci-dessus.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

DEUX villes se trouvent situées, d'une manière connue, d'un même côté d'un canal rectiligne (*).

On veut établir un pont sur ce canal, et construire une route de communication de ce pont aux deux villes pour l'usage desquelles il est destiné.

Il s'agit de déterminer en quel lieu il faut établir ce pont, et de quelle manière on doit diriger les branches de la route, pour que la longueur totale de celle-ci soit la moindre possible ?

II.

Des villes, en nombre quelconque, étant situées, d'une manière connue, dans une même plaine; on propose de les lier entre elles par un système de canaux dont la longueur totale soit la moindre possible (**) ?

(*) On peut, pour plus de généralité, supposer le canal curviligne.

(**) Il ne faut pas confondre ce problème avec celui qui se trouve énoncé à la page 285. Dans le premier, en effet, le nombre des branches de route doit être égal au nombre des villes auxquelles elles doivent aboutir d'une part, et il est de condition rigoureuse que, de l'autre, ces branches de route concourent en un même point: ici, au contraire, cette condition n'est pas imposée, et on ne doit pas même s'y assujétir si le *minimum* n'en résulte pas.

ANALISE.

Démonstration du théorème général de l'incommensurabilité ;

Par M. DE MAIZIÈRES, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Versailles.

TOUTES les questions où se présente le cas de l'incommensurabilité, c'est-à-dire, les questions où il s'agit de démontrer l'égalité de deux rapports dont l'un est incommensurable, ont les caractères communs que voici : 1.° elles supposent deux séries de quantités soumises, dans chaque série, à la loi de continuité (*) ; 2.° elles supposent de plus que les termes des deux séries sont liés les uns aux autres par une dépendance réciproque, en sorte que les deux séries se correspondent terme à terme (**) ; 3.° elles supposent enfin que, lorsque deux termes de l'une des séries sont commensurables, leurs correspondans dans l'autre série leur sont proportionnels (***). La difficulté de ces sortes de questions consiste alors à démontrer que la même proportionnalité a encore lieu pour des termes incommensurables ; et voici comment on peut y parvenir.

(*) C'est-à-dire que, dans chaque série, on peut concevoir deux termes aussi peu différens qu'on voudra.

(**) La loi de correspondance entre les deux séries peut d'ailleurs être quelconque ; elle peut même être inconnue, pourvu qu'on soit certain de son existence.

(***) L'ordre des rapports pouvant être indifféremment *direct* ou *inverse*, pourvu qu'il soit constant dans toute l'étendue des deux séries.

Soient les deux séries correspondantes

$$K_1, K_2, K_3, \ldots K_i, K_{i+1}, \ldots K_l, K_{l+1}, \ldots K_m, K_{m+1}, \ldots K_n, K_{n+1}, \ldots$$
$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_i, Q_{i+1}, \ldots Q_l, Q_{l+1}, \ldots Q_m, Q_{m+1}, \ldots Q_n, Q_{n+1}, \ldots$$

assujéties aux conditions qui viennent d'être exposées.

On suppose reconnue que, si deux termes K_i, K_l, de l'une quelconque des séries, sont commensurables entre eux, ils ont, avec leurs correspondans dans l'autre série, la relation

$$(1) \qquad \frac{K_i}{K_l} = \frac{Q_i}{Q_l};$$

et il s'agit de démontrer que, si deux autres termes K_m, K_n, de l'une quelconque des séries sont incommensurables, ils auront également, avec leurs correspondans dans l'autre série, la relation

$$(2) \qquad \frac{K_m}{K_n} = \frac{Q_m}{Q_n}.$$

La proposition sera vraie, si l'on prouve généralement qu'on ne peut avoir un quelconque des deux rapports supérieur à l'autre; par exemple,

$$(3) \qquad \frac{K_m}{K_n} > \frac{Q_m}{Q_n}.$$

Si, en effet, la relation (3) pouvait exister, on devrait avoir

$$(4) \qquad \frac{K_m}{K_n} = \frac{Q_m}{Q_{n'}};$$

$Q_{n'}$ étant un terme choisi convenablement dans la seconde série et $< Q_n$; or, quelque petite que puisse être d'ailleurs la différence $(Q_n - Q_{n'})$, on peut concevoir, dans le numérateur Q_m, des parties égales encore plus petites; et, en mesurant Q_n avec une de ces parties, on pourra former une quantité

$$(5) \qquad Q_{n''} \begin{cases} < Q_n \\ > Q_{n'} \end{cases}$$

c'est-à-dire, comprise entre Q_n et $Q_{n'}$, et commensurable avec Q_m, laquelle devant nécessairement faire partie de la seconde série, aura conséquemment, dans la première, un terme correspondant

$$(6)\quad K_{n''} < K_n.$$

Maintenant, $Q_{n''}$ étant commensurable avec Q_m, on aura, d'après l'hypothèse (1),

$$(7)\qquad \frac{K_{n''}}{K_m}=\frac{Q_{n''}}{Q_m}.$$

La relation (7) étant démontrée vraie, tandis que la relation (4) est douteuse, leur combinaison est propre à fixer notre jugement sur cette relation (4). Multiplions donc par ordre les relations (4), (7); il viendra, en réduisant,

$$(8)\qquad \frac{K_{n''}}{K_n}=\frac{Q_{n''}}{Q_{n'}}.$$

Or, cette relation (8) est absurde; car (6) son premier rapport est <1, tandis (5) que son second rapport est au contraire >1; donc la relation (4) est impossible; et, attendu qu'elle est une conséquence inévitable de la relation (3), il en résulte que cette dernière ne peut être admise; et comme, d'un autre côté, on ne peut la rejeter sans admettre la relation (2), il s'ensuit que cette relation a lieu en effet, malgré l'incommensurabilité supposée entre K_m et K_n.

La proportionnalité entre *tous* les termes correspondans des deux séries est donc une suite nécessaire de la proportionnalité entre ceux de ces termes qui sont commensurables.

Ce mode de raisonnement, qui ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur, nous semble présenter deux avantages principaux sur celui qu'il est d'usage d'employer dans tous les cas de cette nature. 1.° Ce que nous disons d'un rapport pouvant être également appliqué à l'autre, nous nous trouvons dispensés de la contre-épreuve à laquelle on est explicitement ou implicitement assujéti dans l'application des méthodes usitées; 2.° notre théorème général, une fois démontré, s'applique avec la plus grande facilité aux lignes proportionnelles, aux angles comparés aux arcs, aux aires des rectangles de même base, aux angles dièdres comparés aux angles plans, aux volumes des parallélipipèdes de même base, aux fuseaux sphériques comparés soit entre eux soit avec la sphère, et généralement à tous les cas de l'incommensurabilité, tant en géométrie qu'en arithmétique et en statique, sans qu'on soit obligé de faire une démonstration pour chaque cas. La seule attention à avoir est de bien s'assurer, avant d'appliquer le théorème général, que les deux séries de quantités auxquelles on en veut faire l'application, sont exactement soumises aux lois que nous avons supposé exister dans celles que nous venons de considérer.

Il est essentiel de remarquer que notre démonstration n'exige pas que les deux séries de quantités, admises comme proportionnelles, dans le cas de la commensurabilité, soient exclusivement croissantes ou décroissantes dans le même sens. L'une de ces séries peut croître tandis que l'autre décroît : comme il arriverait, par exemple, si l'une des séries était formée de multiplicandes et l'autre de multiplicateurs de nature à donner une suite de produits égaux. Dans ce cas, si l'on prend dans la première série deux multiplicandes M et M_i, il faudra leur comparer respectivement dans la seconde les multiplicateurs m_i et m_h; car on doit avoir $\frac{M_h}{M_i}=\frac{m_i}{m_h}$. Ainsi, dans le second rapport de chaque proportion, l'ordre des termes est *inverse* de celui des termes du premier.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Analise d'une solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

N. B. Cette solution, parvenue trop tard pour pouvoir être jointe à celle fournie par M. Tédenat, page 285, ayant avec cette dernière plusieurs points de ressemblance, les rédacteurs des *Annales* se trouvent, à regret, contraints de n'en donner ici qu'une courte analise.

M. Lhuilier commence par rappeler ce principe connu ; que *le point de la circonférence d'un cercle dont la somme des distances à deux points pris hors du cercle, est la moindre possible, est celui dont la tangente ou la normale fait des angles égaux avec les droites menées du même point aux deux points dont il s'agit.* Il en conclut de suite que le point du plan d'un triangle dont la somme des distances à ses trois sommets est la plus petite, est un point tel que les droites qui le joignent à ces sommets, font, deux à deux, des angles égaux entre eux et au tiers de quatre angles droits. Il observe, à ce sujet, que, si l'un des angles du triangle vaut le tiers de quatre angles droits, son sommet sera le point cherché ; et que, si l'angle excède cette grandeur, le problème sera insoluble.

M. Lhuilier se propose ensuite de déterminer, lorsque le problème est possible, les longueurs des droites menées du point cherché aux sommets du triangle, ainsi que les angles que font ces droites avec ses côtés ; voici, à peu près de quelle manière il y parvient.

Soient $AA'A''$ (fig. 1) le triangle donné, et P le point cherché ; soit circonscrit un cercle au triangle et soient prolongés PA, PA', PA'', jusqu'à ce qu'elles rencontrent de nouveau la circonférence en B, B', B'' ; soit enfin formé le triangle $BB'B''$.

L'angle B ayant pour mesure la moitié de l'arc $B'B''$, et l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc $A'A''$, il s'ensuit que la somme des angles A, B, a pour mesure la demi-somme des arcs $A'A''$, $B'B''$, laquelle est aussi la mesure de l'angle $A'PA''$ ou $\frac{2}{3}\varpi$; et, comme il en irait de même pour les angles B', B'', comparés aux angles A', A'', on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\frac{2}{3}\varpi\,, \\ A'+B'=\frac{2}{3}\varpi\,, \\ A''+B''=\frac{2}{3}\varpi\,; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} B=\frac{2}{3}\varpi-A\,, \\ B'=\frac{2}{3}\varpi-A'\,, \\ B''=\frac{2}{3}\varpi-A''\,. \end{array}\right.$$

La similitude des triangles APA'', $B''PB$, d'une part, et celle des triangles $A'PA''$, $B''PB'$ de l'autre, donnent les deux équations

$$AP\times BB''=B''P\times AA''\,,\qquad A'P\times B'B''=B''P\times A'A''\,;$$

d'où on déduit, en divisant et réduisant,

$$\frac{AP}{A'P}\times\frac{BB''}{B'B''}=\frac{AA''}{A'A''}\quad \text{ou}\quad \frac{AP}{A'P}=\frac{AA''}{A'A''}\times\frac{\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi-A)}{\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi-A')}\,;$$

c'est-à-dire,

$$A'A''\times AP\times \text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi-A')=AA''\times A'P\times \text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi-A)\,;$$

enfin le triangle APA' donne, à cause de $\text{Cos.}P=-\frac{1}{2}$,

$$AP^2+AP\times A'P+A'P^2=AA'^2.$$

La combinaison de ces deux équations fera donc connaître AP et AP' ; et on déterminera ensuite chacun des deux angles $PA'A$ et PAA', par les divers procédés connus de la trigonométrie.

Après cette digression, M. Lhuilier, revenant à la question principale, annonce que le point du plan d'un quadrilatère dont la somme des distances à ses sommets est la plus petite, est le point d'intersection des deux diagonales de ce quadrilatère. Il ne démontre pas cette proposition, mais sa démonstration résulte immédiatement de ce que la ligne brisée est plus longue que la ligne droite avec laquelle elle a ses extrémités communes. On sent, d'après cela, que le problème ne peut être résolu, pour le quadrilatère, qu'autant que ce quadrilatère est convexe.

Après avoir observé que, dans tout polygone qui a un centre de figure, ce centre est le point dont la somme des distances aux sommets du polygone est la plus petite, M. Lhuilier passe au problème général, non dans la vue de le résoudre, mais afin de découvrir, au moins, quelques propriétés du point cherché. Par les mêmes moyens qu'avait employé M. Tédenat, il parvient à cette proposition, savoir : que *le point cherché doit être tellement situé que la somme des cosinus des angles que formeront les droites qui le joindront aux points donnés, avec un axe quelconque situé dans leur plan, soit constamment zéro.*

Les rédacteurs des *Annales*, en publiant la solution de M. Tédenat, ont négligé de faire voir comment ce principe seul pouvait être employé à obtenir, entre les angles autour du point cherché, des équations en nombre égal à celui de ces angles ; ils croient devoir ici réparer cette omission.

Soient A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1}, A_n les angles consécutifs autour du point cherché ; si l'on prend successivement pour axe chacune des droites menées de ce point aux points donnés, l'angle que formera cette droite avec elle-même étant zéro, aura son cosinus $=+1$; il faudra donc que la somme des cosinus des angles que les autres formeront avec elle soit $=-1$; on aura ainsi

$$\begin{aligned}
0&=1+\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}(A_1+A_2+A_3)+\ldots+\text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}),\\
0&=1+\text{Cos.}A_2+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}(A_2+A_3+A_4)+\ldots+\text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_n\phantom{{}_{-1}}),\\
0&=1+\text{Cos.}A_3+\text{Cos.}(A_3+A_4)+\text{Cos.}(A_3+A_4+A_5)+\ldots+\text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_1\phantom{{}_{-1}}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0&=1+\text{Cos.}A_n+\text{Cos.}(A_n+A_1)+\text{Cos.}(A_n+A_1+A_2)+\ldots+\text{Cos.}(A_n+A_1+\ldots+A_{n-2});
\end{aligned}$$

on pourra, au surplus, simplifier ces équations en observant qu'on a :

$$\begin{array}{ll}
\text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1})=\text{Cos.}A_n\,, & \text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-2})=\text{Cos.}(A_{n-1}+A_n)\,,\ \ldots.\,, \\
\text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_n)=\text{Cos.}A_1\,, & \text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_{n-1})=\text{Cos.}(A_n+A_1)\,,\ \ldots.\,, \\
\text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_1)=\text{Cos.}A_2\,, & \text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_n)=\text{Cos.}(A_1+A_2)\,,\ \ldots.\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \ldots.\,;
\end{array}$$

on pourra aussi, si l'on veut, employer l'équation

$$A_1+A_2+A_3+\ldots.+A_n=2\varpi\,;$$

mais en se rappelant qu'elle se trouve comportée par les n équations ci-dessus.

Si, par exemple, on n'a que trois points donnés, il viendra

$$\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}A_3=-1\,,\ \text{Cos.}A_2+\text{Cos.}A_1=-1\,,\ \text{Cos.}A_3-\text{Cos.}A_2=-1\,;$$

d'où
$$\text{Cos.}A_1=\text{Cos.}A_2=\text{Cos.}A_3=-\tfrac{1}{2}\,;$$

et partant,
$$A_1=A_2=A_3=\tfrac{2}{3}\varpi.$$

Si l'on a quatre points, les équations seront

$$\begin{array}{l}
\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}A_4=-1\,, \\
\text{Cos.}A_2+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}A_1=-1\,, \\
\text{Cos.}A_3+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}A_2=-1\,, \\
\text{Cos.}A_4+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}A_3=-1\,;
\end{array}$$

équations entre lesquelles éliminant les deux quantités $\text{Cos.}(A_1+A_2)$ et $\text{Cos.}(A_2+A_3)$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}A_1=\text{Cos.}A_3\,, \\ \text{Cos.}A_2=\text{Cos.}A_4\,;\end{array}\right\}\quad\text{d'où}\quad\left\{\begin{array}{l}A_1=A_3\,, \\ A_2=A_4\,;\end{array}\right.$$

M. Lhuilier, étendant les procédés du calcul différentiel à des points situés d'une manière quelconque dans l'espace, parvient, à leur égard, au même principe général, c'est-à-dire, qu'il prouve que *le point dont la somme des distances à des points donnés dans l'espace est la plus petite, doit être tellement située que la somme des cosinus des angles que formeront, avec une droite quelconque, les droites menées de ce point aux points donnés soit zéro.*

M. Lhuilier confirme ces résultats du calcul différentiel, tant pour des points compris dans un même plan, que pour des points situés d'une manière quelconque dans l'espace, par des considérations fort simples que voici :

Par le point cherché soit fait passer une droite quelconque PP' (fig. 2) ; que A soit un des points donnés, et que P et P' soient deux points pour lesquels les sommes des distances aux points donnés soient égales ; il est clair que, si le point P devient le point cherché, le point P' devra se confondre avec lui.

Cela posé, des points A comme centres, et avec les distances AP pour rayons, soient décrits des arcs Pp, rencontrant en p les droites AP'.

Puisque $\Sigma(AP)=\Sigma(AP')$, il s'ensuit que $\Sigma(P'p)=0$; donc aussi

$$\frac{\Sigma(P'p)}{PP'} \quad \text{ou} \quad \Sigma\left(\frac{P'p}{PP'}\right)=0\ ;$$

mais

$$\text{limite}\,\frac{P'p}{PP'}=\text{Cos.}AP'P\ ;\ \text{donc}\ \Sigma(\text{Cos.}AP'P)=0\ ,$$

ce qui ramène à la proposition déjà énoncée.

M. Lhuilier termine par observer que la méthode différentielle, ainsi que cette dernière, s'appliquent également au cas où ce ne serait pas précisément la somme des distances du point cherché aux points donnés qui devrait être la plus petite, mais la somme des produits de ces distances par des nombres donnés, ou la somme de leurs puissances ayant le même exposant, ou enfin la somme des produits de ces puissances par des nombres donnés.

Solution du problème proposé à la page 232 de ce volume ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

ENONCÉ. *Deux canaux rectilignes se coupent, sous une inclinaison déterminée, et une ville se trouve située, d'une manière connue, dans l'un des quatre angles formés par leur intersection.*

On veut établir deux ponts sur ces canaux, et construire une route de communication de ces deux ponts à la ville pour l'usage de laquelle ils sont destinés.

Il s'agit de déterminer en quels lieux il faut établir ces deux ponts, et de quelle manière on doit diriger les branches de la route, pour que la longueur totale de celle-ci soit la moindre possible.

Considérations préliminaires. L'énoncé du problème ne statuant en aucune manière sur la disposition des diverses parties de la route à construire; il faut, pour le résoudre complètement, ne s'assujétir à aucune condition qui ne soit rigoureusement nécessaire pour parvenir au *minimum* auquel on veut atteindre.

Or, comme il n'y a que trois points à unir, il ne peut y avoir au plus que trois branches de route, lesquelles doivent être rectilignes, et dont celles qui se terminent aux ponts doivent être respectivement perpendiculaires aux directions des canaux ; et, puisque ces branches de route doivent lier entre eux les points où elles aboutissent d'une part, il faut que de l'autre elles concourent en un même point.

A la vérité, il pourrait bien se faire, du moins dans certain cas, qu'il fallût moins de trois branches de route, pour obtenir un *minimum* de longueur totale; mais c'est ce que le calcul doit indiquer, de soi-même, en donnant zéro pour la longueur de chacune des branches de route qui ne devront pas exister.

On voit, par ce qui précède, que tout se réduit à déterminer le point de concours des trois branches de route; les ponts devant se trouver aux extrémités des perpendiculaires abaissées de ce point sur les directions des deux canaux. Occupons-nous donc du problème suivant :

PROBLÈME. Un point étant donné de position entre les côtés d'un angle connu ; déterminer, dans cet angle, un nouveau point dont la somme des distances à ses deux côtés et au point donné soit un minimum.

Soient BAC (fig. 3) l'angle donné, et O le point donné; il s'agit de déterminer dans cet angle un point Z tellement situé qu'en abaisssant de ce point sur AB et AC les perpendiculaires ZN et ZM, et en joignant le même point au point donné, par la droite ZO, on ait ZN+ZM+ZO= *minimum.*

Solution. Soient pris le sommet A de l'angle donné pour origine des coordonnées rectangulaires, et le côté AC pour axe des x; désignons par γ l'angle BAC, par a et b les coordonnées du point O, et par x et y celles du point Z; nous aurons alors

$$ZM=y\ ,\qquad ZN=x\mathrm{Sin}.\gamma-y\mathrm{Cos}.\gamma\ ,\qquad ZO=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\ ;$$

désignant donc par S la somme des trois distances ZN, ZM, ZO, nous aurons

$$S=x\mathrm{Sin}.\gamma+y(1-\mathrm{Cos}.\gamma)+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\,.$$

Les variables x et y de cette équation étant absolument indépendantes, il faudra, pour obtenir les conditions du *minimum*, égaler séparément à zéro $\frac{dS}{dx}$ et $\frac{dS}{dy}$, ce qui donnera

$$(G)\left\{\begin{aligned}\mathrm{Sin}.\gamma&=\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+(v-y)^2}}\ ,\\ 1-\mathrm{Cos}.\gamma&=\frac{b-y}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}\ ;\end{aligned}\right.$$

et telles sont les équations qui devraient donner les valeurs particulières des coordonnées x et y du point Z qui répondent au *minimum*.

Mais il est facile de voir qu'en général ces deux équations ne peuvent subsister à la fois, attendu qu'on en peut déduire, entre les seules données du problème, une équation de relation qui peut fort bien ne pas se vérifier. Si, en effet, on prend la somme de leurs quarrés, on obtiendra, toutes réductions faites,

$$\text{Cos.}\gamma=\tfrac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \gamma=60^\circ\ .$$

Ainsi, si l'angle donné n'est pas de 60°, il n'y aura, à proprement parler, ni *maximum* ni *minimum*; c'est-à-dire, qu'en variant la position du point Z, la longueur S croîtra ou décroîtra continuellement et pourra acquérir toutes les valeurs possibles depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif (*).

Si, au contraire, l'angle donné ASB est de 60°, les deux équations (G) étant alors équivalentes, on n'a, entre les coordonnées x et y du point Z, qu'une simple relation exprimée soit par l'une ou par l'autre de ces deux équations, soit par une équation résultant de leur combinaison; il y a donc, dans ce cas, une infinité de points qui résolvent le problème.

Cherchons le lieu géométrique de tous ces points; soient, pour cela, divisées l'une par l'autre les équations (G); on aura ainsi

$$\frac{b-y}{a-x} \quad \text{ou} \quad \frac{y-b}{x-a}=\frac{1-\text{Cos.}\gamma}{\text{Sin.}\gamma}=\frac{2\text{Sin.}^2\frac{1}{2}\gamma}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}\gamma\text{Cos.}\frac{1}{2}\gamma}=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma\ ;$$

c'est-à-dire,

$$y-b=(x-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma\ ;$$

telle est donc l'équation du lieu géométrique de tous les points qui résolvent alors le problème; et l'on voit que ce lieu n'est autre chose qu'une parallèle, menée par le point donné, à la droite qui divise l'angle donné en deux parties égales.

(*) Il n'en serait pas ainsi, si l'angle donné, au lieu d'être *rectiligne*, était *mixtiligne* ou *curviligne*. Le problème, envisagé sous ce point de vue, reste encore à résoudre.
(*Note des éditeurs.*)

Ainsi

Ainsi l'angle donné BAC (fig. 4) étant de 60°, et la droite AD le divisant en deux parties égales ; si, par le point donné O, on mène à AD une parallèle indéfinie OK ; en quelque lieu qu'on établisse le point Z sur cette parallèle, la somme des trois distances ZN, ZM, ZO, sera toujours la même et moindre que si le point Z était hors de cette direction.

Il faut pourtant observer que comme, hors des limites O et K, le *minimum* n'a plus lieu que eu égard au changement du signe de quelqu'une des trois distances ZN, ZM, ZO, il est nécessaire que le point Z ne sorte pas de ces limites, si l'on veut, comme l'exige la question, que ce soit la somme de leurs valeurs *absolues* qui soit un *minimum*.

Si, analitiquement parlant, il ne peut y avoir de *minimum*, lorsque l'angle donné est différent de 60° ; c'est uniquement parce que l'analise suppose que le point cherché peut être quelconque sur le plan de l'angle donné, et qu'elle est obligée de faire entrer en considération les changemens qu'entraînent, dans les signes des distances, leurs changemens de situation ; c'est parce qu'elle ne peut exprimer, ni que le point cherché ne doit point sortir de l'angle donné, ni que la somme des trois distances doit être prise indépendamment du signe qui peut affecter chacune d'elles. On conçoit en effet que, eu égard à ces limitations, cette somme ne peut plus décroître indéfiniment ; et comme, d'un autre côté, elle ne saurait être constante pour toutes les situations que peut prendre le point cherché sans sortir des limites qui lui sont assignées, elle doit alors être susceptible d'un *minimum*. Essayons de déterminer à quelle situation du point cherché il peut répondre.

Pour cela supposons d'abord que le point Z (fig. 3), au lieu d'être absolument indéterminé, soit assujéti, dans ses variations, à être constamment à une même distance connue $ZO=r$ du point donné, ou, ce qui revient au même, à être toujours sur la circonférence d'un cercle ayant le point O pour centre et r pour rayon ; la valeur générale de S deviendra alors

$$S=x\mathrm{Sin}.\gamma+y(1-\mathrm{Cos}.\gamma)+r\ ;$$

et l'on aura en outre

$$(a-x)^2+(b-y)^2=r^2$$

les conditions du *minimum* seront donc

$$\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.\gamma+\mathrm{d}y(1-\mathrm{Cos}.\gamma)=0 \ ;$$

$$(a-x)\mathrm{d}x+(b-y)\mathrm{d}y=0 \ ;$$

équations entre lesquelles éliminant $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, on se trouvera avoir, pour déterminer le point Z, les deux équations

$$(a-x)^2+(b-y)^2=r^2 \ , \qquad b-y=(a-x)\mathrm{Tang}.\tfrac{1}{2}\gamma \ .$$

Ainsi, le point Z se trouvera à l'intersection du cercle décrit du point O comme centre, avec r pour rayon, et de la parallèle menée, par son centre, à la droite qui divise l'angle donné en deux parties égales; le problème aura donc analitiquement deux solutions; mais la situation du point Z la plus voisine du sommet de l'angle donné sera la seule admissible, dans l'hypothèse que nous considerons ici.

Cherchons, dans cette hypothèse, ce que devient l'expression de S. Les deux équations qui doivent déterminer le point Z donnent, pour ce point

$$x=a-r\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\gamma \ , \quad y=b-r\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\gamma \ ;$$

d'un autre côté, la valeur de S peut être écrite ainsi:

$$S=r+2x\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\gamma\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\gamma+2y\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}\gamma \ ;$$

on aura donc, en substituant et réduisant,

$$S=2\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\gamma(a\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}\gamma^2+b\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\gamma^2)+r(1-2\mathrm{Sin}.\gamma) \ .$$

Si actuellement nous supposons qu'on rende à r son indétermination primitive, nous remarquerons que, la première partie de la valeur de S étant constante, cette somme décroîtra dans le même sens que r ou en sens inverse, suivant que $1-2\text{Sin}.\gamma$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire, suivant qu'on aura

$$\gamma<60^\circ \quad \text{ou} \quad \gamma>60^\circ.$$

Ainsi, suivant que l'angle donné sera *plus petit* ou *plus grand* que 60°, il y aura de l'avantage à *approcher* ou à *éloigner* le point cherché du point donné; d'où on peut déjà conclure que, lorsque l'angle donné est moindre que 60°, il faut que le point cherché se confonde avec le point donné, ce qui réduit la branche de route ZO à zéro, comme on le voit (fig. 5).

Mais il faudrait bien se garder de conclure de ce qui précède que, lorsque l'angle donné est plus grand que 60°, il faut que le point Z se confonde avec le point K (fig. 6) où AC est coupée par la parallèle menée du point O à la droite AD qui divise l'angle donné en deux parties égales. Tout ceci, en effet, est subordonné à la supposition que le point cherché doit être établi sur OK; et, s'il est vrai qu'il serait plus avantageux de le mettre en K qu'en tout autre point entre O et K, s'il est vrai aussi qu'il convienne mieux de le placer sur OK que hors de sa direction à une pareille distance de O; on conçoit qu'il pourrait bien y avoir, entre K et A, une situation du point cherché où le désavantage résultant de sa déviation de la direction OK se trouverait plus que compensé par une plus grande distance du point O. Pour lever cette difficulté, proposons-nous le problème suivant :

PROBLÈME. Un point étant donné entre les côtés d'un angle connu; déterminer, sur l'un des côtés de cet angle, un nouveau point dont la somme des distances à l'autre côté et au point donné soit un minimum?

Soit BAC (fig. 7) un angle donné, et O un point donné entre les côtés de cet angle, il s'agit de trouver, sur le côté AC, un point

Z tel qu'en le joignant au point O par la droite ZO et au côté AB par la perpendiculaire ZN, on ait ZO+ZN=*minimum*.

Solution. En adoptant les mêmes conventions et dénominations que ci-dessus, et faisant S=ZO+ZN, la valeur de S particulière à la question présente se déduira de sa valeur générale en y faisant $y=0$; on aura donc

$$S=x\mathrm{Sin}.\gamma+\sqrt{(a-x)^2+b^2}\ ;$$

égalant ensuite $\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}x}$ à zéro, il viendra

$$\mathrm{Sin}.\gamma=\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}\ ,$$

d'où

$$a-x=b\mathrm{Tang}.\gamma$$

équation qui, combinée avec l'équation $y=0$ qui convient au point Z, peut prendre cette forme

$$y+b=-\frac{1}{\mathrm{Tang}.\gamma}(x-a)\ ;$$

le point Z n'est donc autre chose que l'intersection de AC avec une perpendiculaire abaissée sur AB d'un point dont les coordonnées sont a et $-b$.

On construira donc comme il suit ; on abaissera du point O sur AC la perpendiculaire OE que l'on prolongera au-delà du point E d'une quantité EF=EO ; abaissant alors du point F sur AB la perpendiculaire FN coupant AC en Z, on aura ZO+ZN=*minimum*, comme il est facile de s'en assurer par des considérations géométriques ; de manière que le point Z sera le point cherché.

Toutes les fois donc (fig. 6) qu'on aura Ang.OKC>Ang.NKA (et cela arrivera toujours lorsqu'on aura Ang.BAC>60°), le point cherché devra être situé entre K et A, et construit comme il vient d'être expliqué (fig. 7), en sorte que ZM sera zéro. Il y a cependant des exceptions que nous allons expliquer.

Soient toujours BAC (fig. 8) l'angle donné, et O le point donné, et soit mené AO; si l'on a Ang.BAC$+$Ang.OAC$=90^\circ$, la construction expliquée (fig. 7) fera tomber le point cherché en A; de manière que les deux distances ZM et ZN s'évanouiront.

Si l'on a (fig. 8) Ang.BAC$+$Ang.OAC$>90^\circ$, la construction expliquée (fig. 7) fera tomber le point cherché sur le prolongement de AC au-delà de A; mais, comme alors la distance ZN deviendra négative, cette solution ne pourra être admise; il faudra donc, comme dans le cas précédent, laisser le point cherché en A.

Si cependant, dans ce cas, l'angle OAB est obtus (fig. 9), le point Z devra être établi à l'intersection de AC avec la perpendiculaire ON abaissée du point O sur le prolongement de AB au-delà de A. Alors, ZM seulement sera nul, et ZN tombera hors de l'angle BAC.

Résumons présentement les différens cas que nous venons d'analiser.

1.° Si l'angle BAC, formé par les deux canaux, est moindre que 60° (fig. 5), les deux ponts devront être les pieds M et N des perpendiculaires OM et ON abaissées de la ville sur leurs directions; ces perpendiculaires elles-mêmes seront les directions des routes qui devront unir la ville aux deux ponts, et dont la longueur totale sera

$$2(a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\gamma+b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

2.° Si l'angle BAC, formé par les directions des deux canaux, est de 60° (fig. 4); en faisant passer par la ville une parallèle OK à la droite AD qui divise cet angle en deux parties égales, et prenant arbitrairement sur cette droite un point Z entre O et K, les ponts pourront être établis aux pieds M et N des perpendiculaires abaissées du point Z sur les directions des canaux, et ces perpendiculaires avec la droite ZO seront les directions des branches de route qui joindront la ville aux deux ponts. La longueur totale de la route à construire aura encore ici pour expression, comme dans le premier cas,

$$2(a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\gamma+b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma\ ;$$

et, comme on pourra établir le point Z en O ou en K, on pourra rendre nulle l'une des deux branches de route ZO et ZM.

3.° L'angle BAC, formé par les directions des canaux, étant plus grand que 60°; si la situation O de la ville est telle (fig. 8) que l'on ait Ang.BAC+Ang.OAC$<$90° (*); il faudra (fig. 7) abaisser du point O sur AC la perpendiculaire OE que l'on prolongera d'une quantité EF=EO; abaissant alors du point F sur AB la perpendiculaire FN, coupant AC en Z, les ponts devront être établis en N et Z, et on communiquera de la ville à l'un et à l'autre, par les routes OZ et ZN, dont la longueur totale sera

$$a\text{Sin.}\gamma+b\text{Cos.}\gamma\ ;$$

de manière que ZM sera nulle.

4.° L'angle BAC étant toujours plus grand que 60°; si la ville est tellement située (fig. 10) que l'angle BAO soit droit, il ne faudra qu'un pont unique, lequel devra être établi à l'intersection A des deux canaux, ou, si cela est impraticable, les deux ponts devront être établis le plus proche de A qu'il se pourra. ZM et ZN seront alors nuls, et la longueur de la route unique OA sera

$$\sqrt{a^2+b^2}.$$

5.° Enfin, si la ville est tellement située (fig. 9) que l'angle BAO soit obtus, en abaissant du point O sur le prolongement de AB la perpendiculaire ON, coupant AC en Z; les points Z et N seront ceux où il faudra établir les deux ponts; ZM sera alors nulle, et ZO et ZN ne formeront qu'une droite unique ON dont la longueur totale sera

(*) On suppose, dans ceci, que le côté AC de l'angle BAC est celui duquel le point O se trouve le plus voisin.

$$a\text{Sin}.y - b\text{Cos}.y.$$

Au surplus si, dans ce cas, on ne trouvait pas convenable d'établir un pont sur le prolongement du canal AB au-delà de A, on se conformerait alors à la solution du cas précédent (*).

Démonstration du théorème énoncé à la page 232 de ce volume, et de quelques autres propriétés du quadrilatère;

Par MM. ROCHAT, DE STAINVILLE, LHUILIER, VECTEN, TÉDENAT, LEGRAND, FAUQUIER, etc., etc.

LA vérité de ce théorème s'aperçoit sur-le-champ, en considérant que, si l'on imagine quatre masses égales situées aux quatre sommets d'un quadrilatère, les trois droites qui joindront les milieux des côtés opposés et des deux diagonales, devant également contenir le centre de gravité de tout le système, devront nécessairement se couper au même

---

(*) Tout ce qui vient d'être dit prouve qu'un problème simple, en théorie, peut souvent se compliquer, lorsqu'il s'agit d'en obtenir une solution applicable à la pratique; et ce, à raison de certaines conditions et limitations qu'on pourrait appeler en quelque sorte, *extra-analitique*, parce quelles ne peuvent être exprimées par des formules d'algèbre: conditions qui s'opposent à ce que les quantités cherchées soient soumises à la loi de continuité.

Ceux qui écrivent pour les jeunes-gens, toujours portés à envisager les questions de géométrie et d'analise d'une manière trop abstraite, feraient sans doute une chose utile, en leur offrant quelquefois des modèles de solutions de ce genre.

(*Note des éditeurs.*)

point. C'est par cette considération que les rédacteurs des *Annales* avaient été conduits à la proposition dont il s'agit ici, et elle prouve en même temps que le point d'intersection des trois droites est leur milieu commun ; on peut aussi parvenir à un semblable résultat, en considérant le quadrilatère comme la projection d'un tétraèdre (*). On voit de plus, par là, que le théorème s'applique au quadrilatère gauche comme au quadrilatère plan ; on voit enfin qu'on pourrait lui donner une beaucoup plus grande généralité, en supposant appliquées aux quatre sommets des masses inégales de signes quelconques.

MM. *de Stainville* et *Lhuilier* sont parvenus à démontrer le théorème par des considérations à peu près semblables. M. *de Stainville* a supposé quatre forces égales et parallèles, de directions quelconques, appliquées aux quatre sommets du quadrilatère, et il a observé que le centre des forces parallèles se trouvant à la fois sur les milieux des droites qui joignent les milieux des côtés opposés et sur le milieu de celle qui joint les milieux des diagonales, ces trois milieux doivent nécessairement coïncider. . . . .

Quant à M. *Lhuilier*, sa démonstration ne diffère uniquement de celle de M. *de Stainville* que par les termes dans lesquels il l'exprime ; c'est-à-dire, qu'il substitue au *centre des forces parallèles* le *centre des moyennes distances* des sommets du quadrilatère. Il ajoute au surplus à sa démonstration cette remarque générale que, dans tout polygone d'un nombre pair de côtés, les centres des moyennes distances des côtés alternatifs et le centre des moyennes distances de tous les sommets coïncident. Il remarque encore qu'en général, toutes les manières de déterminer le centre des moyennes distances d'un système de points, compris dans un même plan ou situés d'une manière quelconque dans l'espace, doivent conduire à un seul et unique point, soit qu'on prenne les points du système deux à deux ou trois à trois ou quatre à quatre ou ...., ou de plusieurs de ces manières combinées

(*) Voyez, sur cela, la *Correspondance sur l'école polytechnique*, 2.e vol. n.o 11, pag. 96.

entre

entre elles, en sorte cependant que ces points soient pris chacun une seule fois ou un même nombre de fois.

M. *Tédenat*, qui n'a pas jugé ce théorème indigne de son attention, en a donné une démonstration purement géométrique, dans laquelle il s'est exactement rencontré avec M. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes; M. *de Stainville* s'est aussi rencontré avec M. *Legrand*, professeur de mathématiques à St-Brieux, et M. *Fauquier*, élève du lycée de Nismes, dans une autre démonstration qui, en changeant les diagonales en côtés, *et vice versâ*, rentre dans celle de MM. *Tédenat* et *Vecten*.

Voici à quoi se réduisent, pour le fond, ces diverses démonstrations.

Soient AB, BC, CD, DA, (fig. 11, 12, 13) les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère, plan ou gauche, et soient G, H, I, K, leurs milieux respectifs. Soient de plus AC et BD les deux diagonales du quadrilatère; soient E, F leurs milieux; soient joints ces milieux par une droite EF; et, sur cette droite, comme base commune, soient construits des triangles ayant leurs sommets en G, H, I, K. Il est aisé de voir que ceux de ces triangles qui auront leurs sommets aux milieux de deux côtés opposés, auront leurs côtés adjacens à la base parallèles, chacun à chacun, comme parallèles à un même côté du quadrilatère; ces triangles seront donc semblables, et de plus égaux, comme ayant base commune; les figures GI et HK seront donc des parallèlogrammes ayant EF pour diagonale commune; les diagonales GI et HK (*) devront donc avoir leurs milieux sur EF et couper celle-ci à son milieu; les trois droites EF, GI, HK auront donc leurs milieux au même point; ce qui est le théorème proposé.

Un *Abonné* est parvenu à la démonstration du théorème, d'une manière fort simple, en considérant (fig. 14, 15, 16) que les milieux consécutifs E, G, H, F, I, K, tant des côtés que des diagonales, sont les sommets des angles d'un hexagone de la nature des poly-

(*) On n'a point mené ces diagonales, dans la crainte de rendre les figures trop confuses.

gones appelés *symétriques* par quelques auteurs (*), c'est-à-dire, des polygones dont le nombre des côtés est pair, et les côtés opposés, égaux et parallèles. On sait en effet que, dans de tels polygones, les diagonales qui joignent les sommets des angles opposés, lesquelles, dans le cas présent, ne sont autres que les trois droites du théorème, ont toutes leurs milieux au même point.

Enfin M. *Rochat*, professeur de navigation à St-Brieux, en traitant la question par l'analise, et en considérant un quadrilatère complet, est parvenu à un théorème assez remarquable que nous allons faire connaître, et que nous démontrerons ensuite brièvement.

Rappelons-nous auparavant que tout *quadrilatère complet*, qui n'a point de côtés parallèles, ayant trois diagonales qui peuvent être prises deux à deux de trois manières différentes, il s'ensuit qu'un tel quadrilatère est toujours formé de trois *quadrilatères simples*.

Ainsi, par exemple, dans le quadrilatère complet de la figure 17, on trouve les quadrilatères simples

$A''B'B''A'A''$, dont les diagonales sont $A'B'$, $A''B''$,

$AB''BA''A$, dont les diagonales sont $A''B''$, AB,

$A'BB'AA'$, dont les diagonales sont AB, $A'B'$.

Cela posé, en appelant *centre* d'un quadrilatère simple, le centre des moyennes distances de ses sommets, voici le théorème de M. *Rochat*.

THÉORÈME. Dans tout quadrilatère complet,

1.° *Les milieux des diagonales sont tous trois sur une même ligne droite.*

2.° *La droite qui contient les milieux des diagonales contient aussi les centres des trois quadrilatères simples, en sorte que ces six points sont sur une même ligne droite.*

3.° *Enfin, la distance entre les milieux de deux quelconques des*

(*) Voyez les *Élémens* de Lacaille, éditions de *Marie*.

diagonales est double de la distance entre les centres des deux quadrilatères simples auxquels ces diagonales appartiennent.

Démonstration. Soient faits (fig. 17)

$$A''A=a\ ,\qquad A''A'=a'\ ,\qquad A''B=b\ ,\qquad A''B'=b'.$$

Soient M, M′ les milieux respectifs des diagonales AB, A′B′; par ces deux points soit menée une droite coupant A″B″ en M″.

Soient pris le point A″ pour origine des coordonnées, la droite A″A pour axe des x et la droite A″B pour axe des y.

L'équation de BA′ est $\quad bx+a'y=a'b\ ,$

L'équation de B′A est $\quad b'x+ay=ab'\ ;$

les équations du point B″ sont donc

$$x=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}\ ,\qquad y=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

On a ainsi

pour l'équation de A″B″, $\quad aa'(b-b')y=bb'(a-a')x.$

Les équations de M sont $\quad x=\frac{1}{2}a\ ,\quad y=\frac{1}{2}b\ ,$

Les équations de M′ sont $\quad x=\frac{1}{2}a'\ ,\quad y=\frac{1}{2}b'\ ;$

on a donc

pour l'équation de MM′, $\quad 2(a-a')y-2(b-b')x=ab'-ba'.$

Combinée avec celle de A″B″, elle donne pour les équations de M″

$$x=\frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}\ ,\qquad y=\frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}\ ;$$

les coordonnées de M″ sont donc respectivement moitiés de celles de B″; le point M″ est donc le milieu de A″B″; ainsi 1.° les milieux des trois diagonales sont sur une même ligne droite.

Soient C, C′, C″ les milieux respectifs des trois distances M′M″,

$M''M$, MM'; ces points C, C', C'' seront, d'après ce qui a été dit précédemment, les centres des trois quadrilatères simples; donc 2.° *ces trois centres sont en ligne droite avec les milieux des trois diagonales.*

On a

$$M'M''=M\,M''-M\,M'=2M\,C'-2M\,C''=2(M\,C'-M\,C'')=2C'C'',$$

$$M''M=M'M+M'M''=2M'C''+2M'C=2(M'C''+M'C)=2C''C,$$

$$M\,M'=M''M-M''M'=2M''C'-2M''C=2(M''C'-M''C)=2C\,C'.$$

Donc 3.° *la distance entre les milieux de deux quelconques des diagonales est double de la distance entre les centres des quadrilatères simples auxquels la troisième diagonale est commune.*

Dès que M. *Vecten* a eu connaissance du théorème de M. *Rochat*, il en a démontré la première partie comme il suit :

Soient AC, BD, FE, (fig. 18) les trois diagonales d'un quadrilatère complet, et G, H, I leurs milieux respectifs. Soient joints ces milieux par les droites GH, HI. Par les points G, H, I, C, soient menées à AF des parallèles se terminant à AE en G', H', I', C'; soit enfin menée à AE, par G, une parallèle se terminant à II' en K et coupant HH' en L.

Cela posé, on a, à cause des parallèles,

$$AF:CC'::AD:DC',\qquad AB:CC'::AE:EC';$$

donc

$$AF-CC':AD-DC'::CC':DC',\quad AB-CC':AE-EC'::CC':EC';$$

ou encore

$$(1)\quad AF-CC':AC'::CC':DC',\qquad AB-CC':AC'::CC':EC';$$

or on a

$$2(II'-GG')=AF-CC', \qquad 2(HH'-GG')=AB-CC',$$

$$2(AI'-AG')=AE-AC', \qquad 2(AH'-AG')=AD-AC';$$

ou encore

$$2\,IK=AF-CC', \qquad 2HL=AB-CC'$$

$$2GK=EC', \qquad 2GL=DC'$$

donc

$$\text{(II)} \qquad IK:GK::AF-CC':EC', \qquad HL:GL::AB-CC':DC'$$

Multipliant les proportions (I) par les proportions (II), en supprimant les facteurs communs aux antécédens, il viendra

$$IK:AC'\times GK::CC':DC'\times EC',\ HL:AC'\times GL::CC':DC'\times EC';$$

d'où on conclura, à cause du rapport commun,

$$IK:AC'\times GK::HL:AC'\times GL\ ;$$

ou simplement

$$IK:GK::HL:GL\ ;$$

ce qui démontre que les trois points G, H, I, sont sur une même ligne droite.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I.

CONSTRUIRE un triangle qui soit égal à un triangle donné, et dont les côtés, prolongés, s'il le faut, passent respectivement par trois points donnés ?

II.

Construire un triangle qui soit égal à un triangle donné et dont les sommets soient respectivement sur trois droites données (*) ?

(*) Ces problèmes, qu'on peut généraliser en substituant à un triangle un polygone quelconque, peuvent être renfermés dans ce seul énoncé : *Construire un polygone de* m *côtés, dont les côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent respectivement par* m *points donnés ou dont les sommets soient respectivement sur* m *droites données ?*

LETTRE

De M. Kramp, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg, aux rédacteurs des Annales.

Messieurs,

Je m'empresse de relever une fausse assertion que, par inadvertance, j'ai laissé subsister dans mon mémoire sur les *fractions-continues périodiques*, et dont, toutefois, je ne crois pas devoir rougir, parce qu'elle n'a point été aperçue, même par vous.

Je me suis occupé (page 283) de la solution en nombres entiers de l'équation $11y^2+49=x^2$. J'ai trouvé pour y les valeurs $0, 21, 420, 8379, \ldots$ et j'ai donné cette série pour *complette*.

Elle est prodigieusement loin de l'être. Le fait est qu'il existe, pour les valeurs de y et les valeurs correspondantes de x, les *trois* séries qui suivent, et qui sont *parfaitement indépendantes* entre elles :

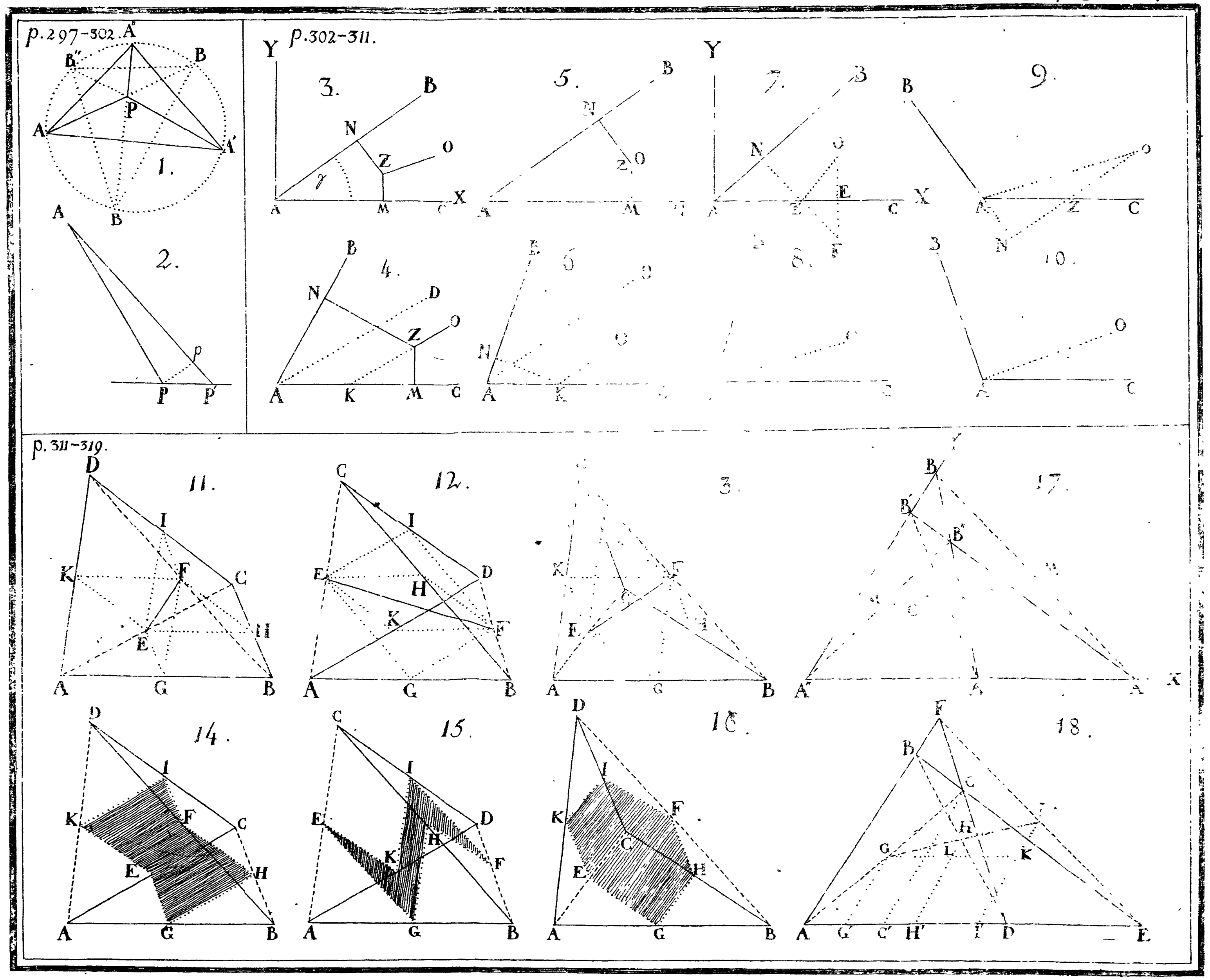
première série de y :	4,	85,	1696,	.....
première série de x :	15,	282,	5625,	.....
seconde série de y :	5,	104,	2075,	.....
seconde série de x :	18,	345,	6882,	.....
troisième série de y :	21,	420,	8379,	.....
troisième série de x :	70,	1393,	27790,	.....

La suite de mon mémoire répandra du jour sur cette matière elle levera les doutes qui pourraient subsister ; elle donnera à ma méthode une généralité dont elle a été dépourvue jusqu'ici , aussi bien que la plupart des méthodes connues ; elles n'ont ordinairement donné que des séries fort *incomplettes* , et que cependant on avait regardé comme *complettes*. Je vous prie de donner de la publicité à ma lettre , afin d'effacer l'impression défavorable que ma méprise pourrait occasioner, si on la laissait subsister.

Vous recevrez de moi, sous peu, un autre mémoire sur les *intégrations numériques*; j'y ferai voir que toute différentielle quelconque, dont les coefficiens sont des nombres , peut toujours être intégrée par des séries que l'on peut rendre convergentes *à volonté*.

J'ai l'honneur, etc.

Strasbourg, le 9 mars 1811.



J. D. G. fecit.

ANALISE.

Exposé d'une méthode propre à faciliter l'élimination, dans les équations des degrés supérieurs ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. En nous proposant l'équation générale du degré n, nous la présenterons, pour la commodité du calcul, sous la forme

$$(\mathrm{N}) \qquad \lambda y^{n}=ay^{n-1}+by^{n-2}+cy^{n-3}+dy^{n-4}+\ldots\ldots.$$

Si on la multiplie, de part et d'autre, par λy, en mettant pour λy^n, dans le second membre de l'équation résultante, sa valeur donnée par l'équation même, elle deviendra

$$\lambda^2 y^{n+1}=(aa+\lambda b)y^{n-1}+(ab+\lambda c)y^{n-2}+(ac+\lambda d)y^{n-3}+\ldots\ldots$$

équation que, pour abréger, nous écrirons ainsi

$$\lambda^2 y^{n+1}=a'y^{n-1}+b'y^{n-2}+c'y^{n-3}+d'y^{n-4}+\ldots\ldots.$$

Multipliant encore de part et d'autre par λy, en mettant toujours pour λy^n, dans le second membre, la valeur donnée par la proposée, elle deviendra

$$\lambda^3 y^{n+2}=(aa'+\lambda b')y^{n-1}+(ba'+\lambda c')y^{n-2}+(ca'+\lambda d')y^{n-3}+\ldots\ldots$$

En continuant de même, on parviendra à donner à toutes les puissances de y supérieures à y^{n-1} des formes polynomiales parfaitement analogues à celle de cette dernière puissance ; et si, pour abréger, on fait

$$\lambda y^{n} = a\,y^{n-1} + b\,y^{n-2} + c\,y^{n-3} + \ldots\ldots,$$

$$\lambda^2 y^{n+1} = a'\,y^{n-1} + b'\,y^{n-2} + c'\,y^{n-3} + \ldots\ldots,$$

$$\lambda^3 y^{n+2} = a''\,y^{n-1} + b''\,y^{n-2} + c''\,y^{n-3} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

on parviendra à trouver les valeurs littérales de tous ces coefficiens au moyen de l'algorithme fort simple que voici :

$$\text{pour } y^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} a' = aa + \lambda b\ , \\ b' = ba + \lambda c\ , \\ c' = ca + \lambda d\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+2} \left\{ \begin{array}{l} a'' = aa' + \lambda b'\ , \\ b'' = ba' + \lambda c'\ , \\ c'' = ca' + \lambda d'\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+3} \left\{ \begin{array}{l} a''' = aa'' + \lambda b''\ , \\ b''' = ba'' + \lambda c''\ , \\ c''' = ca'' + \lambda d''\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$\text{pour } y^{n+4} \left\{ \begin{array}{l} a'''' = aa''' + \lambda b'''\ , \\ b'''' = ba''' + \lambda c'''\ , \\ c'''' = ca''' + \lambda d'''\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array} \right.$$

2. De ces séries on en peut déduire d'autres à l'aide desquelles chacun de ces coefficiens pourra être immédiatement déduit de ceux

qui le précéderont dans la même série. On trouve d'abord, pour la série des coefficiens a', a'', a'''.....

$$\begin{aligned}
a' &= aa + \lambda b\,, \\
a'' &= aa' + \lambda ba + \lambda^2 c\,, \\
a''' &= aa'' + \lambda ba' + \lambda^2 ca + \lambda^3 d\,, \\
a'''' &= aa''' + \lambda ba'' + \lambda^2 ca' + \lambda^3 da + \lambda^4 e\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

ainsi les coefficiens a, a', a'', a''', ..., forment une série récurrente dont l'échelle de relation est

$$a\,,\quad \lambda b\,,\quad \lambda^2 c\,,\quad \lambda^3 d\,,\ \ldots\ldots;$$

de manière que la série indéfinie

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \ldots\ldots$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{a + \lambda bx + \lambda^2 cx^2 + \lambda^3 dx^3 + \ldots\ldots\ldots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots.}:$$

On trouvera de même, pour la série des coefficiens b', b'', b''',..,

$$\begin{aligned}
b' &= ab + \lambda c\,, \\
b'' &= ab' + \lambda bb + \lambda^2 d\,, \\
b''' &= ab'' + \lambda bb' + \lambda^2 cb + \lambda^3 e\,, \\
b'''' &= ab''' + \lambda bb'' + \lambda^2 cb' + \lambda^3 db + \lambda^4 f\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

ainsi les coefficiens b, b', b'', b''', ..., forment une série récurrente dont l'échelle de relation est la même que ci-dessus ; en sorte que la série indéfinie

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \ldots..$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{b + \lambda cx + \lambda^2 dx^2 + \lambda^3 ex^4 + \ldots.}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots.}.$$

Les coefficiens c', c'', c''', ..., auront les valeurs littérales qui suivent :

$$\begin{aligned}
c' &= ac + \lambda d\,, \\
c'' &= ac' + \lambda bc + \lambda^2 e\,, \\
c''' &= ac'' + \lambda bc' + \lambda^2 cc + \lambda^3 f\,, \\
c'''' &= ac''' + \lambda bc'' + \lambda^2 cc' + \lambda^3 dc + \lambda^4 g\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

ces valeurs forment encore une série récurrente ayant même échelle de relation que les précédentes, en sorte que la série indéfinie

$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \ldots\ldots$$

est le développement de la fraction

$$\frac{c + \lambda dx + \lambda^2 ex^2 + \lambda^3 fx^3 + \ldots.}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \ldots.}\,;$$

et il en irait absolument de même pour les autres séries de valeurs d, d', d'', d''', ... ; e, e', e'', e''' ..... ; ......

3. Qu'on ait présentement, outre l'équation (N) du degré n, une autre équation (M), aussi en y, mais d'un autre degré quelconque m, supérieur à n ; en mettant dans cette dernière, pour

$$\overset{n}{y}\,,\quad \overset{n+1}{y}\,,\quad \overset{n+2}{y}\,,\ldots\ldots,\overset{m}{y}\,,$$

les valeurs de ces puissances déduites de la première, par le procédé très-simple que nous venons d'exposer ; elle ne sera plus que du degré $n-1$. On aura donc, à la place des proposées, deux équations des degrés n et $n-1$ qui, en leur appliquant le même procédé, en feront trouver une nouvelle du degré $n-2$; en poursuivant donc de la même manière, on parviendra enfin à une équation du degré *zéro* ; ce sera l'équation de condition qui devra exister entre les coefficiens des deux équations proposées, pour qu'elles puissent subsister ensemble (*) ; c'est-à-dire, pour qu'il y ait un facteur commun entre elles.

(*) Ce sera conséquemment l'équation finale, si les coefficiens des deux proposées sont des fonctions d'une inconnue autre que y.

(*Note des éditeurs.*)

Sur quoi il est nécessaire d'observer que si, avant d'arriver à cette équation du degré *zéro*, on en rencontre une dont tous les coefficiens soient *zéro*, celle qui la précédera sera facteur commun aux deux proposées, indépendamment de toute détermination de leurs coefficiens.

4. La question se trouvant réduite, dès la première opération, ainsi qu'on vient de le voir, à éliminer l'inconnue y entre deux équations dont les degrés ne diffèrent seulement que d'une unité, nous allons examiner ce cas en particulier, et présenter, comme modèle, les deux équations

$$o=Ay^{n}+By^{n-1}+Cy^{n-2}+Dy^{n-3}+Ey^{n-4}+\ldots,$$
$$o=ay^{n-1}+by^{n-2}+cy^{n-3}+dy^{n-4}+ey^{n-5}+\ldots.$$

Appliquant la méthode précédente à ces deux équations, on en déduira une troisième du degré $n-2$; et, si l'on désigne cette dernière par

$$o=a'y^{n-2}+b'y^{n-3}+c'y^{n-4}+d'y^{n-5}+\ldots,$$

les expressions littérales des coefficiens a', b', c', d', ..., seront celles qui suivent :

$$a'=b(Ab-Ba)-a(Ac-Ca),$$
$$b'=c(Ab-Ba)-a(Ad-Da),$$
$$c'=d(Ab-Ba)-a(Ae-Ea),$$
$$d'=e(Ab-Ba)-a(Af-Fa),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

EXEMPLE I. *Déterminer le diviseur commun aux deux polynomes.*

$$5y^3-2y^2-3y+8, \qquad 3y^2-7y+2\,?$$

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} o=5y^3-2y^2-3y+8, \\ o=3y^2-7y+2. \end{cases}$$

$A=+5$, $a=+3$, $Ab-Ba=-29$, $a'=+146=2.73$;
$B=-2$, $b=-7$, $Ac-Ca=+19$, $b'=+14=2.7$;
$C=-3$, $c=+2$; $Ad-Da=-24$;
$D=+8$;

Troisième équation : $0=73y+7$.

Seconde opération.

$$\textit{Équations données}:\begin{cases}0=3y^2-7y+2,\\ 0=73y+7.\end{cases}$$

$A=+3$, $a=+73$, $Ab-Ba=+532$, $a'=14382$.
$B=-7$, $b=+7$; $Ac-Ca=-146$;
$C=+2$;

Troisième équation : $0=14382$.

L'absurdité de cette dernière équation fait voir que les deux polynomes proposés n'ont point de facteur commun.

EXEMPLE II. Déterminer le facteur commun aux deux polynomes.

$5y^5-27y^4+22y^3+17y^2-49y+24$, $3y^4-22y^3+46y^2-31y+6$?

Première opération.

$$\textit{Équations données}:\begin{cases}0=5y^5-27y^4+22y^3+17y^2-49y+24,\\ 0=3y^4-22y^3+46y^2-31y+6.\end{cases}$$

$A=+5$, $a=+3$, $Ab-Ba=-29$, $a'=+146=+2.73$,
$B=-27$, $b=-22$, $Ac-Ca=+164$; $b'=-716=-2.358$,
$C=+22$, $c=+46$, $Ad-Da=-206$, $c'=+368=+2.184$,
$D=+17$, $d=-31$, $Ae-Ea=+177$, $d'=+42=+2.21$.
$E=-49$, $e=+6$; $Af-Fa=-72$;
$F=+24$;

Troisième équation : $0=73y^3-358y^2+184y+21$.

SECONDE OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0 = 3y^4 - 22y^3 + 46y^2 - 31y + 6, \\ 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21. \end{cases}$$

$A=+3$, $a=+73$, $Ab-Ba=+532$, $a'=+14382=+14382.1$,
$B=-22$, $b=-358$, $Ac-Ca=-2806$, $b'=-71910=-14382.5$,
$C=+46$, $c=+184$, $Ad-Da=+2326$, $c'=+43146=-14382.3$.
$D=-31$, $d=+21$; $Ae-Ea=-438$;
$E=+6$;

Troisième équation : $0=y^2-5y+3$.

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations données :}\begin{cases} 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21, \\ 0 = y^2 - 5y + 3. \end{cases}$$

$A=+73$, $a=+1$, $Ab-Ba=-7$, $a'=0$,
$B=-358$, $b=-5$, $Ac-Ca=+35$, $b'=0$.
$C=+184$, $c=+3$; $Ad-Da=-21$;
$D=+21$;

Troisième équation : $0=0$.

Cette équation identique, $0=0$, nous apprend donc que y^2-5y+3 est le diviseur commun des deux polynomes proposés.

5. La recherche du facteur commun le plus élevé, entre deux polynomes proposés, conduit à la détermination des *racines égales*. Dans mon *Arithmétique universelle* (page 268) j'ai démontré le théorème général qui suit : *Si l'on désigne par* X' *le commun diviseur le plus élevé entre le polynome* X *et sa première dérivée* DX ; *par* X'' *le commun diviseur le plus élevé entre* X' *et sa première dérivée* DX' ; *par* X''' *le commun diviseur le plus élevé entre* X'' *et sa première dérivée* DX'', *et ainsi de suite ; le produit des facteurs simples de* X *sera* $\frac{XX''}{X'^2}$; *celui des facteurs doubles* $\frac{X'X'''}{X''^2}$; *celui des facteurs*

triples $\frac{X''X''''}{X'''^2}$; *et ainsi des autres, de manière qu'on aura*

$$X=\left(\frac{XX''}{X'^2}\right)\left(\frac{X'X'''}{X''^2}\right)^2\left(\frac{X''X''''}{X'''^2}\right)^3 \ldots\ldots$$

Nous allons appliquer le théorème, aussi bien que la méthode, au polynome proposé dans l'endroit que nous venons de citer, et qu'il serait bien difficile de décomposer, en y employant les méthodes ordinaires.

EXEMPLE. On propose de déterminer si le polynome

$$X=y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8$$

a des facteurs égaux; et, au cas qu'il en ait de tels, de les mettre en évidence?

On a ici

$$DX=9y^8+16y^7+7y^6+36y^5+35y^4-8y^3+9y^2+4y-12\ ;$$

ce qui donne lieu aux opérations suivantes :

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8\,, \\ 0=9y^8+16y^7+7y^6+36y^5+35y^4-8y^3+9y^2+4y-12. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{llll}
A=+1, & a=+9, & Ab-Ba=-2, & a'=-14=-2\cdot 7, \\
B=+2, & b=+16, & Ac-Ca=-2, & b'=+148=+2\cdot 74, \\
C=+1, & c=+7, & Ad-Da=-18, & c'=+180=+2\cdot 90, \\
D=+6, & d=+36, & Ae-Ea=-28, & d'=-160=-2\cdot 80, \\
E=+7, & e=+35, & Af-Fa=+10, & e'=+178=+2\cdot 89, \\
F=-2, & f=-8, & Ag-Ga=-18, & f'=+108=+2\cdot 54, \\
G=+3, & g=+9, & Ah-Ha=-14, & g'=-872=-2\cdot 436, \\
H=+2, & h=+4, & Ai-Ia=+96, & h'=-624=-2\cdot 312. \\
I=-12, & i=-12; & Ak-Ka=+72; & \\
K=-8; & & &
\end{array}$$

SECONDE

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations}\begin{cases} 0=9y^8+16y^7+\ 7y^6+36y^5+35y^4-\ 8y^3+\ \ 9y^2+4y-12\,, \\ 0=7y^7-74y^6-90y^5+80y^4-89y^3-54y^2+436y+312. \end{cases}$$

$A=+\ 9$, $a=+\ \ 7$, $Ab-Ba=-\ 778$, $a'=+81.\ 785$,
$B=+16$, $b=-\ 74$, $Ac-Ca=-\ 859$, $b'=+81.\ 824$,
$C=+\ 7$, $c=-\ 90$, $Ad-Da=+\ 468$, $c'=-81.\ 678$,
$D=+36$, $d=+\ 80$, $Ae-Ea=-1046$, $d'=+81.\ 892$,
$E=+35$, $e=-\ 89$, $Af-Fa=-\ 430$, $e'=+81.\ 185$,
$F=-\ 8$, $f=-\ 54$, $Ag-Ga=+3861$, $f'=-81.4428$,
$G=+\ 9$, $g=+436$, $Ah-Ha=+2780$, $g'=-81.3004$;
$H=+\ 4$, $h=+312$; $Ai-Ia=+\ 84$;
$I=-12$;

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations}\begin{cases} 0=\ \ 7y^7-\ 74y^6-\ 90y^5+\ 80y^4-\ 89y^3-\ \ 54y^2+\ 436y+312, \\ 0=785y^6+824y^5-678y^4+892y^3+185y^2-4428y-3004. \end{cases}$$

$A=+\ \ 7$, $a=+\ 785$, $Ab-Ba=+\ 63858$, $a'=+9408.\ 94$,
$B=-\ 74$, $b=+\ 824$, $Ac-Ca=+\ 65904$, $b'=+9408\cdot117$,
$C=-\ 90$, $c=-\ 678$, $Ad-Da=-\ 56556$, $c'=+9408\cdot117$,
$D=+\ 80$, $d=+\ 892$, $Ae-Ea=+\ 71160$, $d'=+9408\cdot305$,
$E=-\ 89$, $e=+\ 185$, $Af-Fa=+\ 11394$, $e'=+9408\cdot257$,
$F=-\ 54$, $f=-4428$, $Ag-Ga=-363288$, $f'=+9408\cdot\ 46$.
$G=+436$, $g=-3004$; $Ah-Ha=-244920$;
$H=+312$;

QUATRIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations}\begin{cases} 0=785y^6+824y^5-678y^4+892y^3+185y^2-4428y-3004\,, \\ 0=\ \ 94y^5+117y^4+117y^3+305y^2+257y+\ \ 46. \end{cases}$$

$A=+\ 785$, $a=+\ 94$, $Ab-Ba=+\ 14389$, $a'=+12940725{\cdot}1$,
$B=+\ 824$, $b=+117$, $Ac-Ca=+155577$, $b'=+12940725{\cdot}1$,
$C=-\ 678$, $c=+117$, $Ad-Da=+155577$, $c'=+12940725{\cdot}1$,
$D=+\ 892$, $d=+305$, $Ae-Ea=+184355$, $d'=+12940725{\cdot}3$,
$E=+\ 185$, $e=+257$, $Af-Fa=+452342$, $e'=+12940725{\cdot}2$.
$F=-4428$, $f=+\ 46$; $Ag-Ga=+282376$;
$G=-3004$;

CINQUIÈME OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=94y^5+117y^4+117y^3+305y^2+257y+46\,, \\ 0=\ \ y^4+\ \ y^3+\ \ y^2+\ \ 3y+\ \ 2. \end{array}\right.$$

$A=+\ 94$, $a=+1$, $Ab-Ba=-23$, $a'=0$,
$B=+117$, $b=+1$, $Ac-Ca=-23$, $b'=0$,
$C=+117$, $c=+1$, $Ad-Da=-23$, $c'=0$,
$D=+305$, $d=+3$, $Ae-Ea=-69$, $d'=0$.
$E=+257$, $e=+2$; $Af-Fa=-46$;
$F=+\ 46$;

On aura donc, pour le commun diviseur le plus élevé entre le polynome proposé X et sa première dérivée $\mathrm{D}X$

$$X'=\ y^4+\ y^3+\ y^2+3y+2\ ,$$

d'où

$$\mathrm{D}X'=4y^3+3y^2+2y+3\ ;$$

ce qui donnera lieu aux opérations suivantes:

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\textit{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=\ y^4+\ y^3+\ y^2+3y+2\ , \\ 0=4y^3+3y^2+2y+3. \end{array}\right.$$

$A=+1$, $a=+4$, $Ab-Ba=-1$, $a'=+\ 5$,
$B=+1$, $b=+3$, $Ac-Ca=-2$, $b'=+34$,
$C=+1$, $c=+2$, $Ad-Da=-9$, $c'=+29$.
$D=+3$, $d=+3$; $Ae-Ea=-8$;
$E=+2$;

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=4y^3+3y^2+2y+3\ ,\\ 0=5y^2+34y+29. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{llll} A=+4\ , & a=+5\ , & Ab-Ba=+121\ , & a'=+3584.1\ ,\\ B=+3\ , & b=+34\ , & Ac-Ca=+106\ , & b'=+3584.1\ .\\ C=+2\ , & c=+29\ ; & Ad-Da=-15\ ; & \\ D=+3\ ; & & & \end{array}$$

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations}\left\{\begin{array}{l} 0=5y^2+34y+29\ ,\\ 0=y+1. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{llll} A=+5\ , & a=+1\ , & Ab-Ba=-29\ , & a'=0\ .\\ B=+34\ , & b=+1\ ; & Ac-Ca=-29\ ; & \\ C=+29\ ; & & & \end{array}$$

On aura donc

$$X''=y+1\ ,$$

d'où

$$\mathrm{D}X''=1\ ;$$

le diviseur commun le plus élevé entre ces deux fonctions étant $X'''=1$, d'où $\mathrm{D}X'''=0$ et $X''''=1$, l'opération se termine ici.

Ayant donc

$$\begin{aligned} X\ &=y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5-2y^4+3y^3+2y^2-12y-8\ ,\\ X'\ &=y^4+y^3+y^2+3y+2\ ,\\ X''\ &=y+1\ ,\\ X'''&=1\ ,\\ X''''&=1\ ; \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{XX''}{X'^2}=\frac{(y^9+2y^8+y^7+6y^6+7y^5+2y^4+3y^3+2y^2-12y-8)(y+1)}{(y^4+y^3+y^2+3y+2)^2}=y^2+y-2\ ,$$

$$\frac{X'X'''}{X''^2}=\frac{y^4+y^3+y^2+3y+2}{(y+1)^2}=y^2-y+2\ ,$$

$$\frac{X''X''''}{X'''^2}=\frac{y+1}{1^2}=y+1\ ;$$

en conséquence, le polynome proposé équivaudra à

$$(y^2+y-2)(y^2-y+2)^2(y+1)^3.$$

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution, AVEC LA RÈGLE SEULEMENT, *du dernier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume* (*) ;

Par M. Servois, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Lafère.

Problème. Soient a, b, c, (fig. 1.) les traces, sur un même plan P, de trois directrices α, β, γ, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et sur lesquelles une quatrième droite θ se meut et décrit une surface gauche; soient de plus d, e, les traces, sur le plan P, de la génératrice, dans deux de ses positions δ, ε; soit enfin ap une droite menée, d'une manière quelconque, par le point a, sur le même plan P.

Il s'agit de déterminer, sur cette droite ap, le point s, autre que a, où elle coupera la trace de la surface gauche sur le plan P, et de construire, pour ce point s, la tangente à cette trace.

Solution. 1.° Soit considéré ap comme la trace d'un plan (α, ap)

(*) On intervertit ici l'ordre des solutions, parce que celle-ci conduit à un principe qui sert à la démonstration de l'autre.

(*Note des éditeurs.*)

mené par α, et soient désignées respectivement par B et C les intersections de ce plan avec β et γ.

2.° Par B et γ soit imaginé un plan (B, γ), et soit désignée par A l'intersection de ce plan avec α.

3.° Les trois points A, B, C, sont dans les deux plans (α, *ap*), (B, γ), et par conséquent à leur intersection, qui est une position de la génératrice θ, et qui donnera évidemment le point cherché *s*, au point de concours de la trace *ap* avec la trace du plan (B, γ).

4.° Un point de la trace du plan (B, γ) est évidemment le point *c*; de manière qu'il ne s'agit que d'en trouver un second. Soient D le point où la génératrice δ coupe la directrice α, et E le point où la génératrice ε coupe la directrice γ; la droite BE étant dans le plan (B, γ), la trace de cette droite sera un second point de celle du plan (B, γ).

5.° La droite BE est dans un plan (β, ε) dont la trace est *be*; elle est aussi dans le plan (B, D, E) des trois points B, D, E; mais *ae* est la trace du plan (α, ε); *cd* est la trace du plan (γ, δ), et ces deux plans contiennent visiblement (4.°) les points D, E; donc le point *o* de concours des traces *ae*, *cd* est la trace de la droite DE. De plus les points B, D sont, à la fois, dans le plan (α, *ap*), dont la trace est (1.°) *ap*, et dans le plan (β, δ) dont la trace est *bd*; donc ils sont à l'intersection de ces plans; et partant, le point *p* de concours des traces *ap*, *bd* est la trace de la droite BD. Ainsi, la droite *op*, qui joint les traces des deux droites BD, DE, est évidemment la trace du plan de ces deux droites, c'est-à-dire, du plan (B, D, E).

6.° Donc (5.°) la trace de la droite BE est au point *q* de concours des deux traces *op* et *be*; par conséquent (4.°) le point *q* est un second point de la trace du plan (B, γ) laquelle est donc *cq*.

7.° Ainsi, on a, pour déterminer le point *s*, cette simple construction : parmi les points donnés, *a* étant le premier, *e* le second, *b* le troisième, *d* le quatrième et *c* le cinquième (cet ordre est établi arbitrairement); joignez le 1.er au 2.e, le 2.e au 3.e, le 3.e au 4.e et le 4.e au 5.e; marquez le point *p* de concours de la droite *ap*, menée arbitrairement par le premier point, avec la droite *bd*, qui passe par le troisième et le quatrième ; marquez aussi le point *o* de concours de la droite *ae*, qui passe par le premier et le deuxième, avec *cd* qui passe par le quatrième et le cinquième ; menez *po* qui concourra en *q* avec *eb* qui joint le deuxième et le troisième points ; joignez enfin le cinquième *c* au point *q* par une droite *cq* qui coupera *pa* au point *s* cherché.

8.° *ds* est la trace d'un plan (δ, λ) qui passe par δ et par une génératrice λ qui s'appuie sur les trois droites δ, ε, θ, considérées comme directrices. On sait que cette seconde génération de la surface est permise, et que la trace d'un plan passant par λ et θ est tangente à la section au point *s*.

9.° Soit F le point où la droite λ coupe la droite ε. Les points D, F sont, à la fois, dans les plans (δ, λ) et (α, ε) ; et D est (4.°) sur α et δ ; donc la trace de la droite DF est au point *t* de concours des traces *ds* et *ae*.

10.° Les droites DF et BD, se coupant en D, sont dans un même plan dont la trace est *pt* : puisque le point *p* est celle de BD (5.°) et le point *t* celle de DF (9.°).

11.° La droite BF, qui est dans le plan (BD, DF), est aussi dans le plan (β, ε), dont la trace est *be* ; donc la trace de BF est le point *u* de concours de *pt* avec *be*.

12.° Ainsi *su* est la trace d'un plan passant par *s* et par BF, c'est-à-dire, passant par les deux droites θ et λ, puisque la première passe par B (3.°) et par *s*, et que la deuxième passe aussi par *s* et par le point F (9.°) ; et par conséquent *su* est la tangente demandée ; ce qui fournit cette construction : joignez le point *s* avec un quelconque *d* des points assignés, le quatrième par exemple ; joignez *s* avec *a* le premier, et *d* le quatrième avec *b* le troisième, par des droites qui concourront en *p* ; menez par le premier et le deuxième la droite *ae*, concourant en *t* avec *ds* et joignez *pt* ; menez encore par les deuxième et troisième points la droite *be*, concourant en *u* avec *pt* ; alors en menant *su*, cette dernière droite sera la tangente demandée.

Remarque I. Les constructions trouvées sont connues; la première (7.°) fait le fond de l'ouvrage de *BRACKENRIDGE*, *De descriptione curvarum* (1728). *Mac-Laurin* lui en a disputé l'invention, dans les *Transactions philosophiques*; mais je ne crois pas que l'on soit parvenu encore à les démontrer d'une manière aussi simple; et même je n'en connais que des démonstrations d'une fatigante complication. Ici, au contraire, on les contemple par la *vision intuitive*, s'il est permis de s'exprimer ainsi.

Remarque II. Les lignes ponctuées de la première construction sont supposées dans l'espace; mais, si on les projète, d'une manière quelconque, sur le plan P, elles fourniront une nouvelle construction du point s. En effet, il n'est pas difficile de voir que les points D, C, r, (ce dernier étant au concours de ap avec cd) sont en ligne droite; ainsi, en prenant, à volonté, dans le plan P, les points B, D, sur l'arbitraire Bp, je détermine E au concours de Bq et Do; puis C au concours de Dr avec Ec, et BC donnera, sur ap, le point s demandé (*).

(*) On sait que, cinq points, a, b, c, d, e, d'une courbe du second degré étant donnés sur un plan P, cette courbe est entièrement déterminée.

D'un autre côté, cinq points étant donnés sur un plan P, on peut toujours supposer que trois quelconques d'entre eux, a, b, c sont les traces, sur ce plan, des trois directrices α, β, γ, et les deux autres d, e, les traces, sur le même plan, de deux situations δ, ε, de la génératrice d'un *paraboloïde hyperbolique*. Si en effet par les points d et e, on conçoit, dans l'espace, deux droites δ et ε, non comprises dans un même plan, mais dirigées d'ailleurs d'une manière quelconque, on pourra toujours assujétir trois droites α, β, γ, à passer respectivement par a, b, c, et à reposer de plus sur δ et ε. Considérant alors α, β, γ, comme les trois directrices d'un paraboloïde hyperbolique, ce paraboloïde se trouvera entièrement déterminé; et sa trace sur le plan P, laquelle sera une courbe du second degré, passera par les cinq points donnés a, b, c, d, e.

On voit par-là qu'à cause de la direction arbitraire de δ et ε, cinq points de la trace d'un paraboloïde elliptique sur un plan ne suffisent pas pour déterminer ce paraboloïde; mais qu'ils déterminent néanmoins sa trace sur ce plan.

Ainsi, le problème qui vient d'être résolu revient à celui-ci : *Cinq points d'une courbe du second degré étant donnés, et une droite étant menée arbitrairement sur*

Autre solution du même problème ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.

Je prends le plan P pour le plan horisontal, et un plan quelconque, qui lui soit perpendiculaire, pour le plan vertical. Je me donne, à volonté, les deux projections de chacune des deux génératrices δ et ε; de manière cependant que la génératrice δ passe par le point d, et la génératrice ε par le point e.

Je construis ensuite les traces d'un plan passant par le point a et par la génératrice δ; et je cherche les projections du point d'intersection de ce plan avec la génératrice ε. Je détermine alors les projections d'une droite passant par ce point et par le point a; ces deux projections sont celles de la directrices α; je détermine de la même manière celles des directrices β et γ.

Maintenant je determine les traces d'un plan passant par la droite

---

leur plan, et par l'un d'eux; déterminer, sur cette droite, AVEC LA RÈGLE SEULEMENT, *un sixième point de la courbe, et construire en outre sa tangente en ce point ?*

On voit en même tems que cette solution fournit implicitement une démonstration de ce beau et important théorème : *Six points quelconques du perimètre d'une courbe du second degré étant numérotés arbitrairement* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *; si* I *est le point de concours de la droite qui joint les points* 1 *et* 2 *avec celle qui joint les points* 4 *et* 5 *; que* II *soit le point de concours de la droite qui joint les points* 2 *et* 3 *avec celle qui joint les points* 5 *et* 6 ; *et qu'enfin* III *soit le point de concours de la droite qui joint les points* 3 *et* 4 *avec celle qui joint les points* 6 *et* 1 *; les trois points* I, II, III, *seront situés sur une même ligne droite.*

On peut consulter, sur les nombreuses conséquences de ce théorème, un mémoire de M. *Brianchon*, dans le XIII.e cahier du *Journal de l'école polytechnique.*

(*Note des éditeurs.*)

ap

ap et par la directrice α; je construis les projections horisontales des points d'intersections de ce plan avec β et γ; menant alors une droite par ces deux projections, cette droite, étant la projection horisontale d'une génératrice située sur le plan de *ap* et de α, coupera *ap* en un point qui, étant sur la trace de la surface gauche, sera conséquemment le point *s* cherché.

Par ce point *s* on construira un plan tangent à la surface gauche, et la trace horisontale de ce plan sera la tangente à la courbe.

Toutes les constructions indiquées ci-dessus se trouvant expliquées dans la *Géométrie descriptive* de Monge, le problème peut être considéré comme résolu.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume;

Par M. Servois, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Lafère.

Une droite et une ligne du second ordre étant assignées, j'appelle *pôle* de la droite, le point du plan de cette droite et de la courbe autour duquel tournent toutes les cordes des points de contact des paires de tangentes à la courbe issues des différens points de la droite: tels sont, par exemple, les points désignés par α et β (page 127).

Il est aisé de voir qu'*avec la règle seule* on peut facilement trouver le pôle d'une droite. Soit en effet AB (fig. 2) une droite située sur le plan de la ligne du second degré DGFE; par un quelconque C des points de AB soient menées les deux sécantes CGD et CFE; soit I le point de concours de GF et DE; soit H celui de DF et EG et soit menée IH. En variant la position du point C sur AB, et répétant la même construction, on obtiendra une nouvelle droite IH dont l'intersection avec la première sera le pôle cherché.

On sait d'ailleurs, *avec la règle seulement*, mener à une courbe du second degré une tangente, soit par un point extérieur, soit par un point pris sur la courbe (*).

Il s'agit, d'après cela, de résoudre le problème suivant :

Trois droites indéfinies étant données de position par rapport à une courbe quelconque du second degré, et dans un même plan avec elle; on propose de construire, EN N'EMPLOYANT QUE LA RÈGLE SEULEMENT, *un triangle dont les trois côtés soient des tangentes à la courbe, et dont les sommets se trouvent sur les trois droites données ?*

La solution de ce problème repose sur les considérations qui vont être développées.

1.° Soit inscrit, à une ligne du second ordre (fig. 5), l'hexagone *rstuxy*. Je prolonge les côtés *rs*, *tu*, *xy*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent deux à deux, et qu'ils forment le triangle *abc*. Je mène les diagonales *rx*, *ys*; *su*, *tr*; *tx*, *uy*, qui se coupent, savoir : les deux premières en *o*, les deux suivantes en *p* et les deux dernières en *q*; je tire les indéfinies *sx*, *ru*, *yt*, qui vont concourir, savoir : la

(*) Soit 1.° ABCD (fig. 3) une courbe du second degré à laquelle il faille mener une tangente, par un point extérieur P, en n'employant que *la règle seulement*.

Soient menées, par ce point P, les deux sécantes arbitraires PDA et PCB; soit E le point de concours de AB et DC, et soit F le point de concours de AC et BD; en menant EF, coupant la courbe en G et H, ces deux points seront les points de contact de la courbe avec les tangentes issues du point P.

Soit 2.° ABPD (fig. 4) une courbe du second degré à laquelle il faille mener une tangente par un point P de son périmètre, en n'employant que *la règle seulement*.

Soient pris arbitrairement les trois points A, B, D; soit M le point de concours de AD et BP; soit N le point de concours de AB et DP, et soit menée MN. En variant la situation de l'un ou de l'autre des deux points B et D ou de tous les deux, à la fois, et répétant la même construction, on obtiendra une nouvelle droite MN dont l'intersection avec la première sera un des points de la tangente cherchée. (Voyez un mémoire de M. *Brianchon* dans le XIII.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*).

(*Note des éditeurs.*)

première avec yr en k, la seconde avec st en l, et la troisième avec xu en m; je mène ka, lb, mc qui, par leur rencontre, forment le triangle ABC; enfin je tire ao, bp, cq.

2.° Il est d'abord évident que le point o est le *pôle* de BC; car ao est la corde des tangentes issues du point k, et ko serait celle des tangentes issues du point a; par de semblables considérations, on s'assurera que p et q sont respectivement les póles de AC et AB.

3.° Par une propriété connue de l'hexagone inscrit à une courbe du second degré, les trois points k, l, m sont sur une même ligne droite (*); mais ao, bp, cq sont évidemment les cordes de contact des paires de tangentes issues des points k, l, m, respectivement; donc ces trois droites se coupent en un point unique d, pole de la droite klm.

4.° Dans le quadrilatère $tuxy$, la diagonale uy doit être divisée par les droites tu, xy, cq, cm en *segmens proportionnels* (**), ou, en d'autres termes *harmoniquement*; donc les quatre droites ca, cq, cb, cA sont des droites harmoniques qui conséquemment doivent couper harmoniquement toute droite qui ne passe pas par leur point de concours c (***). Pour de semblables raisons, le système des droites ac, ao, ab, aC, et le système des droites ba, bp, bc, bA, sont des systèmes de droites harmoniques.

5.° Soit α l'intersection de ao avec bc, et soient désignées respectivement par A$'$, A$''$ les intersections de la même droite avec AB et AC (****). D'abord (4.°) ao sera divisée harmoniquement en a, d, α, A$'$, par les harmoniques ca, cq, cb, cA; ensuite la même droite se trouvera encore harmoniquement divisée en a, d, α, A$''$, par les harmoniques ba, bp, bc, bA; or quand, sur une même droite, deux systèmes

(*) Voyez, ci-dessus, la note qui termine la première solution du second problème (pag. 335).

(**) Voyez *l'essai sur la théorie des transversales*, à la suite du beau mémoire de CARNOT sur la *relation entre cinq points dans l'espace*, THÉORÈME VI.

(***) Voyez le même ouvrage, THÉORÈME VII.

(****) On n'a point dû, dans la figure, désigner ces points que l'on va prouver n'être autres que le point A.

de points harmoniques ont trois points qui coïncident, le quatrième point d'un système doit nécessairement coïncider avec le quatrième point de l'autre système (*); donc les points A′ et A″ coïncident et, d'autant que le premier doit être sur AB et le dernier sur AC, ils se confondent l'un et l'autre avec l'intersection A de ces deux droites. La droite ao passe donc par A et, pour des raisons semblables, les droites bp, cq doivent passer respectivement par B et C.

6.° Par l'un quelconque r des sommets de l'hexagone, je mène à la courbe une tangente se terminant en D et E sur AC et BC; je mène Ex qui se termine à AB en F; enfin je mène Ft. D'autant que Er est une tangente issue du point E de BC, dont le pôle est o, l'autre tangente issue du même point devra toucher la courbe au point x extrémité de la corde ro; EF est donc cette autre tangente; et, en la considérant comme issue du point F de AB, dont le pôle est q, on voit que l'autre tangente issue du même point doit toucher la courbe en t, extrémité de la corde xq; Ft est donc cette autre tangente, et conséquemment ED et Ft sont des tangentes aux extrémités de la corde rt passant par p, pôle de AC; elles doivent donc concourir en un même point de cette droite, et par conséquent Ft prolongée doit se terminer en D sur AC. Ainsi les tangentes aux points r, x, t forment un triangle dont les sommets sont sur les côtés du triangle ABC; et il est clair que le triangle formé par les tangentes aux points s, u, y jouirait de la même propriété.

7.° La courbe et le triangle ABC étant donnés, si l'on demande de construire le triangle DEF, on voit que tout se réduira à construire le triangle abc, et pour cela il est clair qu'il faudra 1.° dé-

---

(*) Si, en effet, l'on a, à la fois,

$$da:d\alpha::A'a:A'\alpha\,, \qquad da:d\alpha::A''a:A''\alpha\,,$$

on en conclura

$$da-d\alpha:da::A'a-A'\alpha:A'a\,, \quad da-d\alpha:da::A''a-A''\alpha:A''a\,;$$

ou

$$da-d\alpha:da::a\alpha:A'a\,, \qquad da-d\alpha:da::a\alpha:A''a\,;$$

d'où

$$A'a=A''a\,.$$

(*Note des éditeurs.*)

terminer deux quelconques o et p des trois pôles o, p, q; 2.° mener Ao et Bp qui donneront respectivement (5.°) les deux points a, b; 3.° mener ab qui, en général, donnera sur la courbe les deux points r, s; 4.° mener par l'un quelconque r de ces deux points une tangente se terminant en D et E sur AC et BC, puis deux autres tangentes par les points D et E, lesquelles concourront d'elles-mêmes en F sur AB. On aura ainsi une première solution du problème, et on aura la seconde en opérant sur le point s comme il vient d'être dit pour le point r.

ab peut être tangente à la courbe ou ne pas la rencontrer; dans le premier cas le problème n'admet qu'une solution, dans le second il est impossible.

Dans le cas où les trois données concourent en un même point, la construction qui vient d'être indiquée devient illusoire, parce qu'alors les points o, p, q, se trouvent en ligne droite; mais on sait d'ailleurs résoudre le problème pour ce cas (*).

(*) On peut remarquer que la construction qui vient d'être indiquée est exactement celle qu'on trouve pour le cas particulier du cercle à la page 127 de ce volume, et qu'ainsi cette construction se trouve démontrée par ce qui précède.

On a vu (pag. 123) que le problème où l'on propose d'*inscrire à un cercle un triangle dont les côtés passent par trois points donnés* et celui où l'on propose de *circonscrire à un cercle un triangle dont les sommets soient sur trois droites données*, sont tellement liés entre eux que la résolution de chacun d'eux entraîne nécessairement celle de l'autre; et il est aisé de voir qu'il en est encore de même lorsqu'on substitue au cercle une courbe quelconque du second degré.

La solution précédente renferme donc aussi implicitement celle de cet autre problème : *Construire*, *EN N'EMPLOYANT QUE LA RÈGLE SEULEMENT*, *un triangle dont les côtés passent par trois points donnés et dont les sommets soient sur une courbe donnée du second degré*; problème dont la solution, pour le cas particulier du cercle, et sans interdire l'usage du compas, a occupé plusieurs illustres géomètres.

La construction qui répond à ce dernier problème devient illusoire, lorsque les trois points donnés sont en ligne droite, parce qu'alors les droites dont ils sont les pôles se coupent au même point. Si alors on suppose que la courbe est un cercle, on tombe sur le problème de *PAPPUS*. (Voyez ses *collections mathématiques*, livre VII, Prop. CXVII, Prob. XI). (*Note des éditeurs.*)

Autre solution du même problème ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.

Enoncé. AB, BC, CA (fig. 6.) étant trois droites indéfinies, données de position, sur le plan d'une courbe du second degré SXYV ; on propose de circonscrire à la courbe, *en n'employant que la règle seulement*, un triangle dont les sommets soient sur les côtés du triangle ABC.

Construction. Par l'un quelconque d des points de l'un quelconque AB des côtés du triangle ABC, soient menées à la courbe les trois sécantes arbitraires def, dgh, dkl ; soit m le point de concours de fg et he ; soit n le point de concours de kh et gl, et soit menée mn ; en variant la situation du point d sur AB, on obtiendra une nouvelle droite mn coupant la première en quelque point ; soit O ce point. Soit ensuite déterminé, par une semblable opération, un point P qui soit par rapport à AC ce qu'est le point O par rapport à AB (*).

Par C et O soit menée une droite se terminant à AB en Q ; soit de même menée par B et P une droite se terminant à AC en R ; soit ensuite menée QR coupant la courbe aux points S et T.

Par S et P soit menée une droite se terminant d'une part à la courbe en V et de l'autre à AC en U ; par U soit menée à la courbe une sécante arbitraire UXY ; soient menées SY et VX se coupant en Z ; par Z et P soit menée une droite se terminant à AC en B′.

Enfin par B′ soient menées à S et V des droites se terminant en C′ et A′ à AB et CB ; menant alors A′C′, le triangle A′B′C′ sera une des solutions du problème ; on obtiendra l'autre en opérant sur le point T comme il vient d'être dit pour le point S.

Toutes les constructions qui viennent d'être indiquées peuvent se démontrer par l'*analise géométrique*.

(*) Il est aisé de voir que O et P ne sont autre chose que les *pôles* de AB et AC. (*Note des éditeurs.*)

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ;

Par LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

Il y a plus de dix ans que ce difficile problème s'est offert, pour la première fois, aux rédacteurs de ce recueil ; mais, bien qu'ils l'aient attaqué un grand nombre de fois, ils n'ont pu, pendant long-temps, parvenir à le résoudre, ni même à s'assurer s'il était résoluble par la ligne droite et le cercle. Aussi n'auraient-ils pas songé à le proposer dans les *Annales*, s'ils n'y avaient été invités par un de leurs abonnés.

Ils avaient lieu de penser que le géomètre qui les avait sollicité à appeler sur ce problème l'attention de leurs lecteurs, se chargerait lui-même de le résoudre, au cas qu'il n'en vînt aucune solution d'autre part ; mais ayant long-temps et vainement attendu, ils ont cru devoir faire encore de nouvelles tentatives ; et, plus heureux cette fois que les précédentes ; ils sont parvenus, sinon à trouver une construction du problème, du moins à l'abaisser au premier degré, et à réduire sa résolution arithmétique à un calcul assez simple. Voici par quels moyens ils sont parvenus à leur but.

Problème. A un triangle donné quelconque inscrire trois cercles de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle ?

Solution. Soient désignés par p, p', p'', (fig. 7) les sommets du triangle donné ; par c, c', c'', les côtés respectivement opposés ; par o, o', o'', les centres respectifs de ceux des cercles cherchés qui ne doivent pas toucher ces côtés ; par r, r', r'', les rayons respectifs de ces cercles, et soient adoptées les abréviations suivantes :

$$c+c'+c''=2s\,,\quad \begin{matrix} s-c\;=\rho\,, \\ s-c\;=\rho'\,, \\ s-c''=\rho''\,, \end{matrix}\quad R^2s=\rho\rho'\rho''\,,\quad \begin{matrix} c'c''\rho\;=sd^2\,, \\ c\,c''\rho'\;=sd'^2\,, \\ c\,c'\,\rho''=sd''^2\,; \end{matrix}$$

alors R sera le rayon du cercle inscrit; d, d', d'', seront les distances respectives de son centre aux points p, p', p'', et ρ, ρ', ρ'', seront les distances respectives des mêmes points aux points de contact de ce cercle avec les côtés du triangle ou, ce qui revient au même, les rayons des cercles qui, ayant pour centres les points p, p', p'', se toucheraient deux à deux. On déduira d'ailleurs facilement des équations ci-dessus les relations suivantes:

$$\begin{array}{llll} & \rho'\rho''d^2=\mathrm{R}^2c'c'', & & \rho\, d'd''=\mathrm{R}c\, d, \\ \rho+\rho'+\rho''=s, & \rho\rho''d'^2=\mathrm{R}^2c\, c'', & \mathrm{R}cc'c''=sdd'd'', & \rho'\, d\, d''=\mathrm{R}c'\, d', \\ & \rho\rho'\, d''^2=\mathrm{R}^2c\, c', & & \rho''d\, d'=\mathrm{R}c''d''. \end{array}$$

Cela posé: soient abaissées de o et o' sur c'' les perpendiculaires $om=r$, $o'm'=r'$; soit joint oo', et, par o soit menée à c'' une parallèle se terminant en l à $o'm'$, le triangle olo', rectangle en l, donne

$$ol=c''-pm-p'm'=\sqrt{(r'+r)^2-(r'-r)^2}=2\sqrt{rr'}\ ;$$

mais on a

$$pm=r\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}p=r\sqrt{\frac{\rho s}{\rho'\rho''}}=\frac{\rho}{\mathrm{R}}r\ ,\quad p'm'=r'\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}p'=r\sqrt{\frac{\rho' s}{\rho\rho''}}=\frac{\rho'}{\mathrm{R}}r'\ ;$$

substituant donc, il viendra

$$c''-\frac{\rho}{\mathrm{R}}r-\frac{\rho'}{\mathrm{R}}r'=2\sqrt{rr'}\ ;$$

chassant les dénominateurs, transposant et formant les équations analogues, il viendra enfin

$$\begin{aligned} \rho r+2\mathrm{R}\sqrt{rr'}+\rho'r'&=\mathrm{R}c'', \\ \rho r+2\mathrm{R}\sqrt{rr''}+\rho''r''&=\mathrm{R}c', \\ \rho'r'+2\mathrm{R}\sqrt{r'r''}+\rho''r''&=\mathrm{R}c\ ; \end{aligned}$$

ce sont là les équations du problème.

Si l'on pose $\qquad r'=rx'^2, \qquad r''=rx''^2,$

ces trois équations deviendront

$$r(\rho\ \ +2Rx'\ \ +\rho' x'^2)=Rc''\ ,$$
$$r(\rho\ \ +2Rx''\ \ +\rho''x''^2)=Rc'\ ,$$
$$r(\rho'x'^2+2Rx'x''+\rho''x''^2)=Rc\ ;$$

la dernière donne $\qquad r=\dfrac{Rc}{\rho'x'^2+2Rx'x''+\rho''x''^2}$;

substituant cette valeur dans les deux premières, et chassant les dénominateurs, elles deviendront

$$(\text{A}')\qquad c(\rho+2Rx'+\rho' x'^2)=c''(\rho'x'^2+2Rx'x''+\rho''x''^2)\ ,$$
$$(\text{A}'')\qquad c(\rho+2Rx''+\rho''x''^2)=c'\ (\rho'x'^2+2Rx'x''+\rho''x''^2)\ ;$$

il n'est donc plus question que de tirer de ces deux équations les valeurs de x', x'', pour les substituer dans celle de r.

Si on multiplie l'équation (A′) par $\frac{c'\rho\rho''}{s}$, et l'équation (A″) par $\frac{c''\rho\rho'}{s}$; en les développant toutes deux, mettant pour $\rho\rho'\rho''$ sa valeur R^2s et remarquant qu'on a

$$s(c-c'')=c(s-c'')-c''(s-c)=c\rho''-c''\rho\ ,$$
$$s(c-c'\,)=c(s-c'\,)-c'\,(s-c)=c\rho'\,-c'\,\rho\ ,$$

$$\frac{c'c''\rho}{s}=d^2\ ,\qquad \frac{cc''\rho'}{s}=d'^2\ ,\qquad \frac{cc'\rho''}{s}=d''^2\ ,$$

elles deviendront

$$\{d(Rx'\ +\rho''x'')\}^2-\{d''(Rx'\ +\rho)\}^2=0\ ,$$
$$\{d(Rx''+\rho'\ x'\,)\}^2-\{d'\,(Rx''+\rho)\}^2=0\ ,$$

et pourront alors être mises sous cette forme

$$\{d(Rx'\ +\rho''x'')+d''(Rx'\ +\rho)\}\{d(Rx'\ +\rho''x'')-d''(Rx'\ +\rho)\}=0\ ,$$
$$\{d(Rx''+\rho'\ x'\,)+d'\,(Rx''+\rho)\}\{d(Rx''+\rho'\ x'\,)-d'\,(Rx''+\rho)\}=0\ .$$

En combinant, de toutes les manières possibles, un facteur de la première avec un facteur de la seconde, on obtiendra quatre solutions du problème. On peut remarquer, au surplus, que la différence entre les premiers et les seconds facteurs porte uniquement sur les signes de d' et d''.

Si l'on demande que les cercles cherchés se touchent extérieurement et soient tous trois intérieurs au triangle donné, on pourra lever l'incertitude sur le choix des facteurs, par la considération d'un cas particulier extrêmement simple : c'est celui où les angles p', p'' sont tous deux droits ; on a alors $R=\rho'=\rho''=\frac{1}{2}c$, $d'=d''=\frac{1}{2}c\sqrt{2}$, $\rho=d=\infty$ et $x'=x''$; en conséquence, les deux équations deviennent également

$$(2x'+\sqrt{2})(2x'-\sqrt{2})=0\ ;$$

et comme, dans ce cas, on doit avoir évidemment $x'=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, il en résulte que ce sont alors les seconds facteurs qu'il faut prendre.

Rejetant donc les premiers facteurs, on aura, pour déterminer x', x'', les deux équations

$$d(Rx'+\rho''x'')=d''(Rx'+\rho)\ ,$$
$$d(Rx''+\rho'x')=d'(Rx''+\rho)\ ,$$

lesquelles donnent

$$x'=\rho.\frac{d''(d-d')R-\rho''dd'}{(d-d')(d-d'')R^2-\rho'\rho''d^2}=\frac{\rho}{R}.d''\frac{c''-(d-d')}{c'c''-(d-d')(d-d'')}\ ,$$

$$x''=\rho.\frac{d'(d-d'')R-\rho'dd''}{(d-d')(d-d'')R^2-\rho'\rho''d^2}=\frac{\rho}{R}.d'.\frac{c'-(d-d'')}{c'c''-(d-d')(d-d'')}\ ;$$

de là, en se rappelant qu'on a

$$\rho\rho'd''^2=R^2cc'\ ,\qquad \rho\rho''d'^2=R^2cc''\ ,\qquad \rho d'd''=Rcd\ ,$$

on conclura

$$\rho'x'^2=\rho c.\frac{c'\{c''-(d-d')\}^2}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ,$$

$$2Rx'x''=\rho c.\frac{2d\{c''-(d-d')\}\{c'-(d-d'')\}}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ,$$

$$\rho''x''^2=\rho c.\frac{c''\{c'-(d-d'')\}^2}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ;$$

substituant enfin dans la valeur trouvée précédemment pour r, il viendra

$$r=\frac{R}{\rho}.\frac{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}{c'\{c''-(d-d')\}^2+2d\{c''-(d-d')\}\{c'-(d-d'')\}+c''\{c'-(d-d'')\}^2}\ .$$

Les rédacteurs des *Annales* en étaient parvenus à ce point, et ils ne pensaient pas que cette dernière formule fût susceptible de beaucoup de réduction, lorsqu'ils reçurent de M. BIDONE, professeur à l'académie de Turin, la lettre suivante :

Turin, le 12 mars 1811.

Messieurs,

Par la note que vous avez placée au bas de la table sommaire du n.° IX de votre précieux recueil, on voit que vous n'aviez reçu, jusqu'alors, aucune solution du dernier des deux problèmes proposés dans le n.° VI. Je prends la liberté, Messieurs, de vous annoncer que ce problème a été résolu par M. MALFATTI, *géomètre italien très-distingué. Sa solution est imprimée dans la I.re partie du tome X des* Mémoires de la société italienne des sciences, *publié en* 1803. *Cependant, comme il est très-utile de rendre familières de semblables questions, et de connaître les procédés les plus simples, parmi ceux qui sont propres à les résoudre, je me permets de joindre ici la construction de M.* Malfatti, *afin que vous puissiez la comparer avec celles qui vous parviendront. Ce géomètre l'a déduite de formules qui paraissent assez simples, eu égard à la nature du problème. Je les supprime ici, pour ne pas dépasser les bornes d'une lettre.*

Je saisis avec empressement, Messieurs, l'occasion favorable que m'offre cette circonstance, pour vous renouveler, etc.

Voici à quoi se réduit la construction de M. *Malfatti* :

Soit $pp'p''$ (fig. 8) le triangle donné; soit c le centre du cercle inscrit et soient menées cp, cp', cp'', dont la première coupe le cercle inscrit en a ; et soient t, t', les points de contact de ce cercle avec $p''p'$, $p''p$.

Cela posé, soit prolongé pp' indéfiniment au de-là de p' ; soit portée sur son prolongement $p''t$ ou $p''t'$ de p' en b et pa de b en d ; de pd soient retranchées $de=cp''$ et $ef=cp'$; soit élevée à pf, par son milieu, une perpendiculaire coupant cp en o et pp' en m ; alors o sera le centre de celui des trois cercles cherchés qui doit être inscrit à l'angle p, et om en sera le rayon. On déterminera ensuite les deux autres cercles par des constructions semblables.

L'extrême simplicité de cette construction, contraste d'une manière frappante avec la complication du problème, et montre toute l'influence que peut exercer le choix des données. Elle donne pour le rayon r l'expression suivante :

$$r=\frac{R}{2\rho}(s+d-R-d'-d'').$$

Cette expression est nécessairement équivalente à celle qui a été donnée plus haut, et cependant il ne paraît pas facile de ramener l'une à l'autre. La difficulté tient à ce que, parmi le grand nombre des relations qui existent entre les données, on n'aperçoit pas facilement quelles sont celles qui peuvent le mieux opérer la transformation.

Le problème pourrait être énoncé de cette manière générale : *Trois droites indéfinies étant tracées sur un même plan, décrire sur ce plan trois cercles de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux des droites données* ; considéré sous ce point de vue, il peut admettre jusqu'à 32 solutions.

Pour s'en convaincre, on peut remarquer que ce problème n'est qu'un renversement de celui-ci : *Trois cercles se touchant deux à deux sur un plan, décrire sur ce plan trois droites telles que chacune d'elles touche deux des cercles donnés*; et il n'est pas difficile de voir que le premier problème doit admettre autant de cas que celui-ci.

Or, lorsque trois cercles se touchent deux à deux, ou ils se touchent tous extérieurement (fig. 9), ou bien, deux d'entre eux se touchant extérieurement, le troisième les enveloppe tous deux (fig. 10), ou enfin, deux d'entre eux se touchant extérieurement, le troisième touche l'un d'eux extérieurement et enveloppe l'autre (fig. 11). Nous ne parlons pas du cas où (fig. 12) le cercle moyen, enveloppant le plus petit, serait lui-même enveloppé par le plus grand, attendu qu'alors les tangentes communes aux cercles pris deux à deux, se confondraient en une droite unique.

Observons encore que, pour deux cercles qui se touchent extérieurement (fig. 13), il existe trois tangentes communes, tandis qu'il n'en existe qu'une seule (fig. 14) lorsque l'un des cercles est intérieur à l'autre.

D'après ces diverses observations, il est aisé de voir que, pour la figure 9, il peut exister 27 systèmes distincts de trois droites touchant les cercles deux à deux; qu'il en existe 3 pour la figure 10; et qu'enfin il en existe 2 seulement pour la figure 11; ce qui fait en tout 27+3+2 ou 32, comme nous l'avions annoncé.

NOTE

Communiquée aux rédacteurs des Annales, *sur la lettre de M.* Kramp, *insérée à la page* 319 *de ce volume ;*

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Toute équation du second degré à deux indéterminées peut toujours, par des transformations, se réduire à la forme suivante :

$$y^2 - Ax^2 = B.$$

La résolution de cette équation, en nombres entiers, lorsqu'elle est possible, peut se ramener à l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme :

$$y'' - 2my' + y = 0 ;$$

son intégration donne

$$(1) \qquad y = \frac{Y + X\sqrt{A}}{2}\left\{m + n\sqrt{A}\right\}^{z-1} + \frac{Y - X\sqrt{A}}{2}\left\{m - n\sqrt{A}\right\}^{z-1},$$

$$(2) \qquad x = \frac{Y + X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\left\{m + n\sqrt{A}\right\}^{z-1} - \frac{Y - X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\left\{m - n\sqrt{A}\right\}^{z-1}.$$

Dans ces formules Y, X, sont les plus petites valeurs entières de y, x, qui satisfassent à l'équation $y^2 - Ax^2 = B$.

m, n, sont deux nombres entiers satisfaisant à l'équation $m^2 - An^2 = 1$.

Je me propose, dans une autre circonstance, de démontrer toutes ces propositions, ainsi que beaucoup d'autres sur les fractions-continues.

L'équation que M. *Kramp* se propose de résoudre (pag. 283) est celle-ci

$$y^2 - 11x^2 = 49.$$

Les plus petites valeurs entières de m, n, qui satisfassent à l'équation $m^2 - 11n^2 = 1$ sont $m = 10$, $n = 3$; celles de Y, X, sont $Y = 7$, $X = 0$.

En substituant ces valeurs dans les formules générales données ci-dessus, et y faisant ensuite $z=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$, on trouve

$$y=7\ ,\ 70\ ,\ 1393\ ,\ 27790\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=0\ ,\ 21\ ,\ 420\ ,\ 8379\ ,\ \ldots\ldots$$

comme on le voit dans le mémoire de M. Kramp (pag. 285).

Si l'on met l'équation $y^2-11x^2=49$ sous cette forme

$$\frac{y^2}{49}-11\frac{x^2}{49}=1\ ,$$

en posant

$$\frac{y}{7}=y'\ , \qquad \frac{x}{7}=x'\ ,$$

on aura à résoudre l'équation

$$y'^2-11x'^2=1.$$

Si l'on en cherchait les solutions en nombres entiers, on trouverait, comme ci-dessus, $y'=10$, $x'=3$.

Mais, si l'on cherche les valeurs fractionnaires qui peuvent y satisfaire, on en trouvera plusieurs parmi celles-ci qui auront l'avantage de donner, pour y et x, des nombres entiers essentiellement différens de ceux qui ont déjà été déterminés. De ce nombre sont les valeurs

$$\left.\begin{array}{l} y'=\frac{15}{7}\ , \\ x'=\frac{4}{7}\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=15\ , \\ x=\ 4\ ; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y'=\frac{18}{7}\ , \\ x'=\frac{5}{7}\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ x=\ 5\ . \end{array}\right.$$

Prenant successivement ces deux systèmes de valeurs pour Y et X, on formera les deux nouvelles séries de valeurs correspondantes que voici

$$y=15\ ,\ 282\ ,\ 5625\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=\ 4\ ,\ \ 85\ ,\ 1696\ ,\ \ldots\ldots$$

$$y=18\ ,\ 345\ ,\ 6882\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=\ 5\ ,\ 104\ ,\ 2075\ ,\ \ldots\ldots$$

comme l'indique M. Kramp dans sa lettre insérée à la page 319.

On voit donc que l'existence des deux dernières séries de valeurs dont parle M. Kramp, et qui, comme les premières, résolvent l'équation, tient 1.° à ce que le terme 49 est un quarré, ce qui permet de mettre l'équation proposée sous la forme

$$y'^2-11x'^2=1 \; ;$$

2.° à ce que, parmi les systèmes de valeurs fractionnaires de y', x', qui satisfont à cette dernière, il s'en trouve deux qui, à cause de leur dénominateur 7, donnent pour y et x des nombres entiers. On voit en effet que

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{15}{7}\right)^2-11\left(\frac{4}{7}\right)^2=1\,, \\ \left(\frac{18}{7}\right)^2-11\left(\frac{5}{7}\right)^2=1\,,\end{array}\right\}\text{ donnent }\left\{\begin{array}{l}15^2-11.4^2=49\,, \\ 18^2-11.5^2=49\,.\end{array}\right.$$

Si, au contraire, on posait

$$y'=\tfrac{6}{5}\,, \qquad x'=\tfrac{1}{5}\,,$$

on satisferait bien à l'équation

$$y'^2-11x'^2=1 \; ;$$

mais il en résulterait pour y et x les valeurs fractionnaires

$$y=\tfrac{42}{5}\,, \qquad x=\tfrac{7}{5}.$$

Les formules (1), (2), sont donc très-générales; elles contiennent toutes les séries de valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation $y^2-Ax^2=B$, tant en nombres entiers qu'en nombres fractionnaires.

N. B. *Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs ont reçu de* M. Kramp *la lettre suivante* :

Messieurs,

Mes recherches sur la solution complette, en nombres entiers, de l'équation $ay^2+b=x^2$, m'ont conduit à quelques remarques que je m'empresse d'autant plus de vous communiquer qu'elles doivent servir à rectifier ce que j'ai eu l'honneur de vous écrire dans ma dernière lettre.

On sait que, si l'on connaît un cas qui remplisse la condition de cette équation, tel que $aq^2+b=p^2$; et que, de plus, on connaisse deux nombres entiers m, n, tels que $an^2+1=m^2$; on peut de cette seule solution en déduire une infinité d'autres. Les x, aussi bien que les y, formeront deux séries recurrentes soumises à l'échelle de relation *plus* $2m$ et *moins* 1 ; et, en désignant par p', p'', p''', ... les termes de la première des deux séries, et par q', q'', q''', ... les termes correspondants de l'autre, on aura

$$p'=mp+anq\,,\ p''=2mp'-p\,,\ p'''=2mp''-p'\,,\ldots\ldots.$$
$$q'=np+mq\,,\ q''=2mq'-q\,,\ q'''=2mq''-q'\,,\ldots\ldots.$$

Par les lettres p, q, nous désignons toujours les termes *initiaux* des deux séries, qui en même temps sont moindres que tous les suivants; et il y aura autant de ces séries que l'on pourra trouver de valeurs de p et q, différentes, et indépendantes entre elles.

Je remarque maintenant que les termes initiaux p et q existent toujours *par couples*, tellement qu'il leur répondra toujours deux autres termes initiaux P et Q, liés avec les premiers par les deux équations qui suivent.

$$-p^2+2mpP-P^2=an^2b \ ,$$
$$+q^2+2mqQ+Q^2=n^2b \ ;$$

et autant que ces deux équations admettent de solutions en nombres entiers et positifs, autant aussi il y aura de séries, indépendantes entre elles, dont les termes peuvent résoudre en nombres entiers l'équation $ay^2+b=x^2$. Ces équations, elles-mêmes, à cause de $m^2-1=an^2$, admettent une solution parfaitement rationnelle; il en résultera

$$P=mp-anq \ , \qquad Q=np-mq.$$

Faisant $q=0$, on aura $Q=n\sqrt{b}$; ainsi b doit être un nombre *quarré*. Si on fait $b=r^2$, ce qui donne l'équation $aq^2+r^2=p^2$, on voit d'abord que $p=r$ et $q=0$ est toujours une des valeurs de y; on aura ensuite $P=mr$, $Q=nr$, et ces valeurs, qui se déduisent immédiatement de la solution de l'équation $an^2+1=m^2$, sont les seules que le procédé employé dans mon dernier mémoire peut faire découvrir, tant qu'on se bornera à prendre des nombres entiers pour les valeurs de la quantité que dans ce mémoire j'ai désignée par q. La suite de l'ouvrage apprendra à trouver la liste complette des autres; et je me bornerai pour le moment à en donner quelques exemples.

Pour	$11y^2+5^2=x^2$, on a	$q=8$,	$Q=8$,	$p=6$,	$P=27$,
	$11y^2+7^2=x^2$,	$q=4$,	$Q=5$,	$p=15$,	$P=18$,
	$11y^2+19^2=x^2$,	$q=7$,	$Q=20$,	$p=30$,	$P=69$,
	$11y^2+37^2=x^2$,	$q=15$,	$Q=36$,	$p=62$,	$P=125$,
	$11y^2+43^2=x^2$,	$q=4$,	$Q=95$,	$p=45$,	$P=318$,
	$11y^2+53^2=x^2$,	$q=16$,	$Q=65$,	$p=75$,	$P=222$.

Le coefficient 11 donne d'ailleurs

$$m=10 \ , \qquad n=3.$$

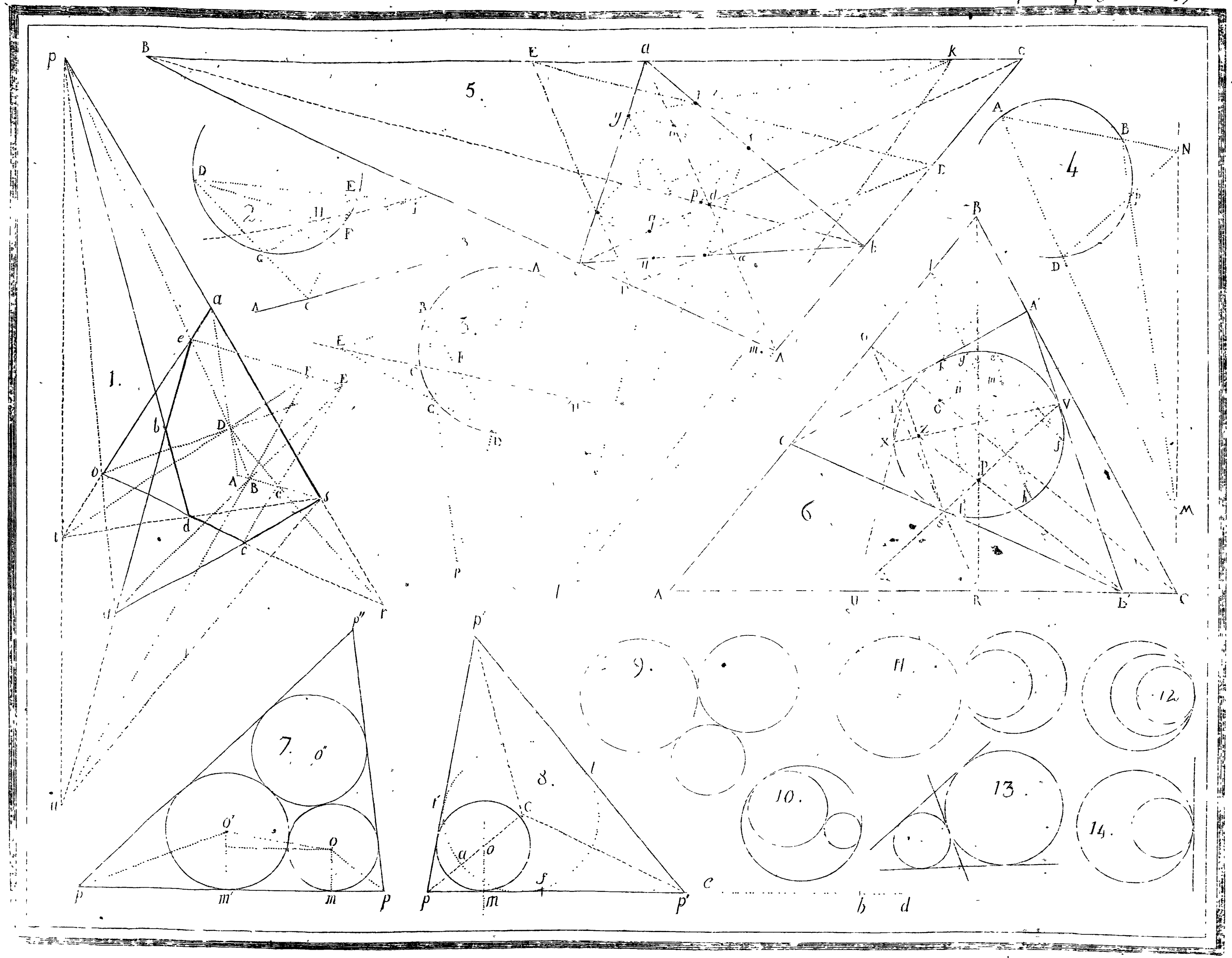
Le nombre des termes initiaux, indépendans entre eux et des séries qui en dérivent, est encore beaucoup plus grand, lorsque b n'est pas un nombre quarré. Dans l'équation $5y^2+6061=x^2$, je trouve les termes initiaux qui suivent :

	p	q	P	Q
I.	79	6	591	262.
II.	81	10	529	234.
III.	129	46	241	102.
IV.	159	62	191	78.
V.	831	370	79	6.
VI.	929	414	81	10.

on a d'ailleurs ici $m=9$. $n=4$.

Agréez, Messieurs, etc.

Strasbourg, le 28 mars 1811.



S. D. G fecit

GÉOMÉTRIE.

Mémoire sur le tétraèdre, présentant la solution de diverses questions proposées dans les Annales ;

Par M. J. L....., abonné (*).

1. *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et ceux des deux diagonales passent toutes trois par le même point où elles sont coupées en deux parties égales* (**).

Soient en effet AB, BC, CD, DA, (fig. 1) les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère, plan ou gauche, ayant leurs milieux respectifs en Q, P, N, M; soient, en outre, R, S, les milieux respectifs des deux diagonales BD, AC, de ce quadrilatère, et soient joints ces points, deux à deux, par des droites. Par ce que R et Q sont les milieux respectifs de BD et BA, la droite RQ est moitié de DA et lui est parallèle; pour de semblables raisons NS est aussi moitié de DA et lui est parallèle; donc les deux droites RQ et NS sont égales et parallèles, et conséquemment le quadrilatère RQSN est un parallélogramme; d'où il résulte que les droites NQ, RS, se coupent réciproquement en deux parties égales. On prouvera, par un semblable raisonnement, que les droites MP, RS se coupent aussi réciproquement en deux parties égales;

(*) Ce mémoire renferme quelques propositions déjà démontrées ailleurs; mais, comme elles s'y trouvent liées avec beaucoup d'autres qui sont propres à l'auteur, on a cru nécessaire de publier le tout sans en rien retrancher.

(**) Voyez les pag. 311 et suivantes de ce volume.

(*Notes des éditeurs.*)

d'où l'on doit conclure que les trois droites NQ, RS, MP, passent par un même point O qui est leur milieu commun.

2. Il suit de là que, *dans tout tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées passent toutes trois par un même point qui est leur milieu commun* (*).

3. *Le point où se coupent les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre est le centre de gravité du volume de ce tétraèdre.*

Que l'on conçoive, en effet, le tétraèdre partagé en une infinité de triangles élémentaires dont les plans soient parallèles à l'une de ses faces; si, par le milieu de l'un quelconque des côtés de cette face et par l'arête opposée, l'on conçoit un plan, ce plan, coupant chaque triangle élémentaire suivant la droite qui joint son sommet au milieu de sa base, contiendra son centre de gravité; il contiendra donc aussi le centre de gravité du tétraèdre; ce dernier point est donc à l'intersection de trois plans conduits par les arêtes d'une même face et par les milieux des arêtes qui leur sont respectivement opposées: or, comme chacun de ces plans contient une des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées, il s'ensuit que le point d'intersection de ces trois droites n'est autre que le point d'intersection des trois plans, c'est-à-dire, le centre de gravité du tétraèdre.

4. A l'avenir nous appellerons *axes* d'un tétraèdre, les trois droites qui joindront les milieux de ses arêtes opposées; le point où ces axes se couperont sera le *centre* du tétraèdre; les trois plans conduits par les axes, pris deux à deux, seront les *plans principaux* et détermineront, dans le tétraèdre, les *sections principales*, lesquelles seront toutes trois des parallélogrammes ayant deux des axes pour leur diagonales, et ayant, pour les deux côtés d'un même angle, des parallèles aux deux arêtes opposées du tétraèdre que le plan de la section ne rencontre pas. Chaque plan principal partage le tétraèdre en

---

(*) Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome II, n.° 1, pag. 1.re, et n.° 2, pag. 96.

(*Note des éditeurs.*)

deux troncs de prismes triangulaires que nous verrons bientôt être équivalens.

5. Deux arêtes opposées du tétraèdre, n'étant point comprises dans un même plan, peuvent toujours, et d'une manière unique, être comprises dans deux plans parallèles. Le plan principal qui passe par les milieux des quatre autres arêtes, est évidemment parallèle à ceux-là; il en est de plus équidistant.

6. Le système des six plans, parallèles deux à deux, qui contient les arêtes opposées d'un tétraèdre, forme le *parallélipipède circonscrit*. Les diagonales non parallèles des faces opposées de ce parallélipipède sont les arêtes opposées du tétraèdre; les droites qui joignent les centres des faces opposées du parallélipipède en sont les axes; enfin les plans menés par le centre du parallélipipède, parallèlement à ses faces opposées, déterminent les sections principales du tétraèdre (*).

7. Si deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales, les faces du parallélipipède circonscrit qui comprendront ces arêtes, seront rectangulaires : si, dans le tétraèdre, il y a deux couples d'arêtes opposées égales, chacune à chacune, deux couples de faces opposées du parallélipipède circonscrit seront rectangulaires : enfin, si les arêtes opposées du tétraèdre sont égales, chacune à chacune, le parallélipipède circonscrit sera rectangulaire.

8. De là il est facile de conclure que, *dans un tétraèdre, deux des axes sont perpendiculaires entre eux, ou l'un des axes est, à la fois, perpendiculaire aux deux autres, ou enfin les trois axes sont perpendiculaires deux à deux, suivant que ce tétraèdre a une, deux ou trois couples d'arêtes opposées égales.*

9. Lorsqu'on fait passer des plans par les extrémités des axes du tétraèdre, ces plans déterminent un *octaèdre inscrit* MNRQSP; les quatre *tétraèdres excédans* MAQS, RQBP, NSPC, DMRN, sont

(*) Voyez, sur cela, un mémoire de M. *Monge*, inséré dans la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. I, n.° 10, pag. 440.

(*Note des éditeurs.*)

égaux et superposables, car ils sont terminés par des faces égales, chacune à chacune, et rangées dans le même ordre. Chacun de ces tétraèdres est le 8.^{me} du grand tétraèdre dont il fait partie, car il lui est semblable et a ses arêtes moitié des siennes ; d'où il résulte que le volume total de ces quatre tétraèdres est moitié de celui du grand tétraèdre, et qu'ainsi celui de l'octaèdre inscrit en est aussi moitié.

10. Chacun des plans principaux partage l'octaèdre en deux parties équivalentes ; car ces deux parties sont des pyramides quadrangulaires ayant base commune, et ayant leurs sommets sur des plans parallèles à celui de leur base, et également éloignés de part et d'autre de ce plan.

11. Il suit de là que *chacun des plans principaux d'un tétraèdre le partage en deux troncs de prismes triangulaires équivalens.* Chacun de ces troncs de prismes est, en effet, composé d'une moitié de l'octaèdre et de deux des tétraèdres excédans.

12. Il suit de ce qui vient d'être dit (10) que le produit de l'aire de chacune des sections principales d'un tétraèdre par la plus courte distance entre les arêtes opposées parallèles à cette section est une quantité constante, pour un même tétraèdre, quelle que soit celle des trois sections principales que l'on considère (*). Donc *celle des trois sections principales dont l'aire est la plus petite est celle dont le plan est parallèle aux arêtes opposées les plus distantes.* Ceci répond à la note 3.^{me} de la page 230 de ce volume; mais il est essentiel de remarquer que, généralement parlant, comme nous le verrons bientôt, ces sections ne sont pas des *minima* (**).

(*) Il a déjà été remarqué, par M. *Servois*, professeur aux écoles d'artillerie, à Lafère, que les deux tiers de ce produit expriment le volume du tétraèdre, ainsi qu'il résulte évidemment de ce qui précède.

(**) Lorsque les rédacteurs des *Annales* reçurent la solution mentionnée ici, pressés par le temps, ils se bornèrent à vérifier, par l'analise, si cette solution rendait nulle la fonction prime de l'aire de la section ; et elle la fait, en effet, évanouir ; mais on sait que cette condition *nécessaire* est *insuffisante.* Ils eurent tort de ne point pousser plus loin la vérification, et ils remercient M. J. L..... de les avoir détrompés sur ce point.

(*Notes des éditeurs.*)

13. Les trois plans principaux du tétraèdre divisent l'octaèdre inscrit en *huit* tétraèdres équivalens, et symétriques deux à deux ; puis donc que leur somme est la même que celle des *quatre* tétraèdres excédans, on en doit conclure que chacun de ces derniers est double de chacun de ceux qui résultent de la division de l'octaèdre par les plans principaux ; d'où il suit encore que *les droites qui joignent le centre du tétraèdre à ses sommets, sont coupées par les faces de l'octaèdre inscrit au tiers de leur longueur.*

14. Les quatre tétraèdres excédans peuvent être considérés comme un même tétraèdre appliqué successivement à l'octaèdre par chacune de ses faces, lesquelles deviennent ainsi quatre des huit triangles qui terminent cet octaèdre ; ces quatre triangles ne sont pas égaux, en général, mais chacun d'eux a son égal sur la face opposée de l'octaèdre ; celui-ci reste à découvert et fait partie de la surface du tétraèdre total. Si l'on enlève les quatre tétraèdres excédans pour les transporter sur celles des faces de l'octaèdre, qui, en premier lieu, étaient à découvert, ces tétraèdres, ainsi disposés, formeront avec l'octaèdre le *tétraèdre conjugué* du tétraèdre total, ayant cet octaèdre pour sa partie commune avec lui. Les deux tétraèdres conjugués seront inscrits au même parallélipipède ; leur douze arêtes seront les diagonales de ses faces, et leurs sommets correspondans seront les sommets de ses angles opposés.

15. Deux tétraèdres conjugués forment un système symétrique relativement à leur centre commun ; car toute droite qui y passe, se terminant à des faces ou arêtes parallèles, a son milieu en ce point. Un plan quelconque, passant par le centre, divise d'abord l'octaèdre en deux parties symétriques et rencontre ensuite les tétraèdres excédans sur leurs arêtes homologues, à des distances égales de leurs sommets ; le système est donc divisé, par ce plan, en deux parties égales et symétriques. Les sections principales sont les mêmes pour les deux tétraèdres conjugués, parce qu'elles ne rencontrent pas les tétraèdres excédans. Enfin, les sections, passant par une arête de l'un des tétraèdres, passent par l'arête correspondante de son conjugué, et sont figurées par deux triangles égaux et renversés.

16. Si, par les extrémités de la plus courte distance entre deux arêtes opposées de l'un des tétraèdres et par leur centre commun, on conduit deux droites, elles se termineront aux arêtes correspondantes de son conjugué. La droite qui joindra les points de rencontre sera donc égale et parallèle à cette plus courte distance; elle sera donc, comme elle, perpendiculaire à deux faces opposées du parallélipipède circonscrit, et sera ainsi la plus courte distance des arêtes du conjugué auxquelles elle se terminera.

17. En conduisant un plan par l'arête BD et le milieu S de l'arête opposée AC, le triangle BSD donne $2(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2$ (*); d'un autre côté les deux triangles ABC, ADC donnent $2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2)=2\overline{AC}^2+4(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)$; mettant donc, dans cette dernière équation, pour $2(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)$, la valeur que donne la première, on obtiendra le *théorème d'Euler* :

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2.$$

Les deux autres axes donnant des équations analogues, si on les ajoute à celle-ci, on parviendra à la formule connue :

$$(a)\qquad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2).$$

18. Dans un triangle dont C, C′, C″, sont les côtés et S, S′, S″, les droites qui joignent leurs milieux respectifs aux sommets des an-

---

(*) On a, en effet, dans les deux triangles RSB, RSD

$$\overline{RS}^2+\overline{BR}^2-\overline{BS}^2=2RS\cdot BR\cdot \text{Cos. } BRS,$$
$$\overline{RS}^2+\overline{DR}^2-\overline{DS}^2=2RS\cdot DR\cdot \text{Cos. } DRS;$$

Si l'on remarque que BR=DR, que Cos. BRS + Cos. DRS=0 et que $2\overline{BR}^2+2\overline{DR}^2=4\overline{BR}^2=\overline{BD}^2$; en prenant le double de la somme de ces deux équations, on obtiendra celle qui est annoncée dans le texte.

(*Note des éditeurs.*)

gles opposés, on a $4(s^2+s'^2+s''^2)=3(c^2+c'^2+c''^2)$ (*); les faces d'un tétraèdres donnant quatre formules pareilles, si l'on nomme S^2 la somme des quarrés des 12 droites menées de chaque sommet aux milieux des trois côtés de la face opposée, on aura $4S^2=6(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)$; donc (17)

$$S^2=6(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2).$$

19. Il est facile de voir que les quatre diagonales de l'un quelconque des huit petits parallélipipèdes formés, dans le parallélipipède circonscrit, par les plans principaux, sont égales aux quatre distances du centre du tétraèdre à ses sommets; puis donc que, dans tout parallélipipède, la somme des quarrés des quatre diagonales est égale à la somme des quarrés des douze arêtes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2.$$

20. Cette proposition, qui a évidemment lieu pour le quadrilatère gauche, est vraie aussi pour le quadrilatère plan. Soit en effet ABCD ce quadrilatère (fig. 2); par le point O d'intersection des droites MP, NQ, RS, qui joignent les milieux de ses côtés opposés et de ses diagonales, soient menées à ses quatre sommets les droites OA, OB; OC, OD; les six triangles AOB, BOC, COD, DOA, AOC, BOD, donneront

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)=\overline{AB}^2+4\overline{OQ}^2,$$
$$2(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)=\overline{BC}^2+4\overline{OP}^2,$$
$$2(\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)=\overline{CD}^2+4\overline{ON}^2,$$

(*) On a, en effet, par ce qui a été démontré dans la note précédente,

$$2(C'^2+C''^2)=C^2+4S^2,$$
$$2(C''^2+C^2)=C'^2+4S'^2,$$
$$2(C^2+C'^2)=C''^2+4S''^2;$$

ce qui, en ajoutant et transposant, donne l'équation annoncée dans le texte.
(*Note des éditeurs.*)

$$2(\overline{OD}^2+\overline{OA}^2)=\overline{DA}^2+4\overline{OM}^2,$$

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OC}^2)=\overline{AC}^2+4\overline{OS}^2,$$

$$2(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{OR}^2;$$

en ajoutant ces six équations on aura $6(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)$ $=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+2(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2)$; d'où on conclura (17)

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2.$$

Si l'on ajoute la première équation avec la troisième, la seconde avec la quatrième et la troisième avec la sixième, il viendra

(b) $$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2+2\overline{NQ}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{MP}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+2\overline{RS}^2.$$

Ainsi, *dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés de deux côtés opposés, plus deux fois le quarré de la droite qui joint leurs milieux, est une quantité constante et égale à deux fois la somme des quarrés des distances des sommets au point d'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

21 Ces formules ont encore lieu pour un triangle, en considérant un point pris arbitrairement sur l'un quelconque des côtés comme le quatrième sommet du quadrilatère. Mais, si l'on divise un côté AB (fig. 3) en quatre parties égales, aux points n, M, q, et si l'on joint les milieux m, p, des autres côtés avec les points de division n, q, les triangles AOM, MOB, BOC, COA, donneront

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OM}^2)=\overline{AM}^2+\overline{BC}^2+2\overline{mn}^2=\overline{BM}^2+\overline{AC}^2+2\overline{pq}^2.$$

donc

$$2(\overline{mn}^2-\overline{pq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2;$$

le parallélogramme $pmqn$ donne d'ailleurs

$$2(\overline{mn}^2+\overline{pq}^2)=\overline{AB}^2+\overline{CM}^2;$$

et,

et, si l'on tire les droites Cn, Cq, on trouvera

$$2(\overline{Cn}^2-\overline{Cq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2.$$

22. Si, dans le tétraèdre ABCD (fig. 1), on suppose droits les angles plans DAB, DAC, ce qui donnera

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2, \qquad \overline{AC}^2=\overline{CD}^2-\overline{AD}^2,$$

on conclura de l'équation (b), au moyen de celles-ci, NQ=RS; donc, si l'angle trièdre A est trirectangle, on aura

$$NQ=MP=RS.$$

Ainsi, *dans le tétraèdre rectangle, les trois axes sont égaux.*

Désignant donc par p l'un de ces axes, la formule (a) donnera $3(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2)=4.3p^2$, d'où $p=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}$.

Ainsi, *chacun des axes d'un tétraèdre rectangle est moitié de la distance du sommet de l'angle droit trièdre au point qui aurait les trois arêtes rectangulaires pour ses coordonnées.*

Il est facile de voir que les axes se coupent sur cette ligne, au quart de leur longueur, à partir du sommet. Les sections principales sont alors des rectangles; l'aire de chacune d'elles est le quart du produit des deux arêtes opposées qui lui sont parallèles; et, comme elle est aussi égale à la moitié du produit des deux axes qui lui servent de diagonales par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux, si on désigne cet angle par a, et par α l'angle que fait $2p$ avec AB, on aura $\frac{1}{4}AB.DC=\frac{1}{2}p^2.\mathrm{Sin}.a$; on tire de là

$$\sin.a=2.\frac{AB}{2p}\cdot\frac{DC}{2p}=2\mathrm{Cos}\alpha.\mathrm{Sin}.\alpha=\mathrm{Sin}.2\alpha;$$

ainsi l'angle de deux axes est double de celui que fait la ligne $2p$ avec l'arête rectangulaire qui passe par le troisième.

23. Soient donc α, β, γ, les trois angles que fait respectivement la ligne $2p$ avec les arêtes rectangulaires AB, AC, AD; on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha=\frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2}}, \qquad \mathrm{Cos}.2\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2},$$

$$\mathrm{Cos}.\beta=\frac{\mathrm{AC}}{\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2}}, \qquad \mathrm{Cos}.2\beta=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2},$$

$$\mathrm{Cos}.\gamma=\frac{\mathrm{AD}}{\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2}}; \qquad \mathrm{Cos}.2\gamma=\frac{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2};$$

d'où on conclut

$$\mathrm{Cos}.2\alpha+\mathrm{Cos}.2\beta+\mathrm{Cos}.2\gamma=-1\ ;$$

les trois angles que font deux à deux les axes du tétraèdre rectangulaire sont donc liés entre eux par la condition que la somme de leurs cosinus est égale au cosinus de la demi-circonférence.

24. En nommant S l'aire de la face hypothénusale, on a $S^2=\frac{1}{4}(\overline{\mathrm{AB}}^2.\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2.\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2.\overline{\mathrm{AD}}^2)$; équation à laquelle on peut donner les trois formes suivantes :

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AC}}^2.\overline{\mathrm{AD}}^2=\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AB}}^2.\overline{\mathrm{CD}}^2,$$

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AB}}^2.\overline{\mathrm{AD}}^2=\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AC}}^2.\overline{\mathrm{BD}}^2,$$

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AB}}^2.\overline{\mathrm{AC}}^2=\tfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AD}}^2.\overline{\mathrm{BC}}^2;$$

si l'on ajoute ces trois équations en observant que leurs seconds membres sont égaux à quatre fois les quarrés des aires des sections principales, on trouvera, en désignant ces sections par s, s', s'',

$$S^2=2(s^2+s'^2+s''^2)\ ;$$

donc, *dans tout tétraèdre rectangulaire, le quarré de l'aire de la face hypothénusale est double de la somme des quarrés des aires des sections principales.*

25. *Tout plan passant par l'un des axes d'un tétraèdre quelconque, divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.*

Soit, en effet, aNbQ (fig. 4) le plan coupant conduit par l'axe NQ. Le plan principal RNSQ partage le tétraèdre (11) en deux parties équivalentes; et le plan aNbQ ôte à l'une de ces parties le tétraèdre bNQS, pour le donner à l'autre, et ôte à celle-ci le tétraèdre aNQR, pour le donner à la première; or, il est facile de voir que ces deux tétraèdres sont équivalens; car, outre qu'ils ont pour bases les deux moitiés d'un même parallélogramme RNSQ, il résulte de ce qui a été dit (6) que leurs sommets a, b, sont à une même distance de part et d'autre du plan de leurs bases.

26. On peut aussi se convaincre aisément (6) que, dans toutes les situations du plan aNbQ, sa diagonale mobile ab demeurera constamment parallèle au plan principal MRPS qui ne contient pas sa diagonale fixe NQ, et que celle-ci coupera toujours l'autre en h en deux parties égales; si donc cd est l'intersection du plan coupant avec le plan principal MRPS, la diagonale ab sera parallèle à cd.

27. Le plan aNbQ, supposé mobile autour de l'axe NQ, peut prendre successivement quatre positions remarquables. S'il passe par l'un ou l'autre des axes RS, MP, la section est un parallélogramme; si, au contraire, il passe par l'une ou l'autre des deux arêtes opposées AB, CD, la section est un triangle. Dans tous les autres cas, la section est un quadrilatère.

28. La diagonale mobile ab étant variable de grandeur, comme de position, on peut desirer de savoir quelle devra être la situation du plan coupant pour qu'elle soit la plus petite possible. Il est aisé de voir que cela arrivera lorsque l'intersection cd de ce plan avec le plan principal MRPS sera perpendiculaire à MP. Concevons, en effet, qu'il en soit ainsi, et imaginons par ab un plan parallèle à MRPS; ce plan coupera celles des faces opposées du parallélipipède circonscrit, qui contiennent les arêtes AC, BD, suivant deux droites parallèles entre elles et à MP; et ab sera une perpendiculaire commune entre ces parallèles. Que l'on conçoive ensuite tant d'autres plans qu'on voudra, conduits par NQ; les diagonales mobiles correspondantes étant constamment (26) parallèles au plan MRPS, si l'on transporte ces diagonales, parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce que leurs milieux viennent coïncider avec le milieu h de ab, leurs extrémités se trouveront alors sur les parallèles menées à MN par a et b; mais elles

seront obliques entre ces parallèles, et conséquemment plus longues que leur perpendiculaire commune ab.

29. Soit designé par α l'angle des deux diagonales NQ, ab, d'une section quelconque, faite par l'axe NQ; l'aire de cette section sera $\frac{1}{2}$NQ $\times ab.\mathrm{Sin}.\alpha$; mais si, du point a, on abaisse une perpendiculaire p sur NQ, cette perpendiculaire aura pour expression $\frac{1}{2}ab.\mathrm{Sin}.\alpha$; en sorte que l'aire de la section deviendra $p\times$NQ; et, comme NQ est constant, pour toutes les sections que l'on considère ici, il s'ensuit que les aires des sections sont proportionnelles à p, et qu'ainsi la plus petite répondra au cas où p sera la plus courte distance entre BD et NQ ou, ce qui revient au même, lorsque p sera la moitié de la plus courte distance entre les arêtes opposées AC et BD ou, ce qui est encore la même chose, lorsque le plan aNbQ sera perpendiculaire au plan principal MNPQ. Ainsi *De tous les plans qui, passant par un même axe, coupent les deux mêmes couples d'arêtes opposées, celui qui donne la plus petite section est le plan perpendiculaire à celui des plans principaux, qui contient, avec l'axe dont il s'agit, celui des deux autres qui se termine aux milieux des arêtes opposées que le plan coupant ne doit pas rencontrer.*

30. Mais il faut bien observer que le problème ne sera possible qu'autant que le plan conduit par NQ, perpendiculairement au plan MNPQ, rencontrera les arêtes opposées AC, BD, entre leurs extrémités, et non sur leurs prolongemens. On doit remarquer aussi que si, par l'arète RS, on conduit un plan perpendiculaire à la section principale MRPS, ce plan qui, comme le premier, divisera le tétraèdre en deux parties équivalentes et coupera comme lui les deux couples d'arêtes opposées AB, DC, AC, DB, donnera aussi, comme lui, une section *minimum*. En général, cette section ne sera pas égale à la première; car il suivrait de leur égalité que les longueurs de deux axes seraient proportionnelles aux plus courtes distances des arêtes opposées auxquelles ils se terminent, ce qui n'est point vrai pour un tétraèdre quelconque. On voit donc que, généralement parlant, il y aura *deux* sections qui jouiront de la propriété du *minimum*,

si les arêtes que le plan coupant doit rencontrer sont désignées, et qu'il y en aura *six*, si au contraire elles ne le sont pas. Il est aisé de voir (16) que les plans qui donnent les sections *minima*, pour un tétraèdre, les donnent aussi pour son conjugué. Celles de ses sections qui sont déterminées par le même plan, sont égales, car leurs diagonales mobiles sont des parallèles comprises entre des plans parallèles. Les quadrilatères qui représentent ces sections sont égaux et renversés.

31. Lorsque deux arêtes opposées du tétraèdre sont égales, des deux sections *minima* faites sur les arêtes égales et sur deux des autres, celle qui passe par l'axe qui se termine à ces dernières est (8) perpendiculaire à l'axe qui se termine aux arêtes inégales que le plan coupant ne rencontre pas. Si le tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées égales, les deux sections *minima* faites sur ces arêtes viennent (8) se confondre avec la section principale; et, des deux faites sur les arêtes inégales et sur deux arêtes égales, l'une est la section principale, et l'autre est perpendiculaire à l'axe qui se termine aux deux arêtes égales que le plan coupant ne rencontre pas; cette dernière est moindre que l'autre, car leur rapport est celui de l'axe qui se termine aux arêtes égales à la plus courte distance entre ces arêtes. Si enfin le tétraèdre a ses trois couples d'arêtes opposées égales, les sections *minima* se confondent, deux à deux, (8) avec les sections principales, elles ne sont donc plus alors qu'au nombre de trois seulement.

32. Lorsque le tétraèdre est rectangulaire (22) les six sections *minima* sont distinctes et égales deux à deux. Si de plus les trois arêtes rectangulaires sont égales, les six sections *minima*, toujours distinctes, sont toutes égales, et les diagonales mobiles coupent les arêtes et les axes au quart de leur longueur.

33. Voilà donc le problème proposé à la page 127 de ce volume résolu, pour le cas particulier où le plan coupant serait assujetti à passer par l'un des axes du tétraèdre, et conséquemment aussi pour le cas où l'on exigerait simplement que ce plan passât par son centre : car *De tous les plans conduits par le centre d'un tétraèdre, il n'y*

a uniquement que ceux qui passent par quelqu'un de ses axes qui le divisent en deux parties équivalentes.

Dans la démonstration de cette proposition, nous distinguerons deux cas, savoir : celui où le plan coupant rencontre deux couples d'arêtes opposées, et donne conséquemment une section quadrangulaire, et celui où au contraire ce plan, rencontrant les trois arêtes d'un même angle trièdre, fournit une section triangulaire.

Soit donc, en premier lieu, $mnpq$ (fig. 5) une section faite au tétraèdre ABCD par un plan passant par son centre O et rencontrant en m, n, p, q, ses arêtes DC, DB, AB, AC, sans comprendre aucun de ses axes. Par son intersection cd avec l'un MRPS des deux plans principaux qui coupent les arêtes AD, BC, et par l'axe NQ qui n'est pas compris dans ce plan, soit conduit un plan $a\mathrm{N}b\mathrm{Q}$, ce plan (25) partageant le tétraèdre en deux parties équivalentes, il ne s'agira que de prouver que les portions de ce tétraèdre comprises, de part et d'autre, entre ce plan et le premier, ne sont pas équivalentes. Pour cela soient menées $\mathrm{N}c$, $\mathrm{N}d$, mc, md; il est facile de s'assurer que les tétraèdres $m\mathrm{N}cd$ et $p\mathrm{Q}dc$, qui ont pour bases les deux triangles égaux $\mathrm{N}cd$ et $\mathrm{Q}dc$, ont aussi même hauteur, et sont par conséquent équivalents; or le dernier de ces tétraèdres forme, à lui seul, une des parties du tétraèdre total comprises entre les plans coupants, tandis que, pour former l'autre, il faut ajouter à son égal $m\mathrm{N}cd$ les deux polyèdres $md\mathrm{N}bqm$, $mc\mathrm{N}anm$, lesquels ne seront jamais nuls, tant que le plan $mnpq$ ne contiendra aucun des axes. Les portions de tétraèdre comprises entre les plans $a\mathrm{N}b\mathrm{Q}$ et $mnpq$ sont donc inégales; ce dernier plan ne divise donc pas le tétraèdre en deux parties équivalentes.

Supposons, en second lieu, que le plan coupant rencontre les trois arêtes d'un même angle trièdre du tétraèdre, en passant toujours par son centre. Si d'abord ce plan est parallèle à celui de la face qu'il ne rencontre pas, il est aisé de voir (3) qu'il divisera le tétraèdre en deux parties dont le rapport sera celui de 27 à 37 et qui conséquemment ne seront pas équivalentes.

Admettons donc qu'il n'en soit pas ainsi, et soit ABCD (fig. 6) un tétraèdre coupé par un plan abc, passant par son centre et coupant l'angle trièdre D, sans être parallèle à la face opposée ABC; les distances des points A, B, C, au plan abc ne pouvant alors être égales, il y aura toujours deux B, C, de ses points dont les distances à ce plan ne seront pas plus grandes que celle du point A au même plan, et, parmi ces deux, il y en aura au moins un C pour lequel cette distance sera moindre. Cela étant ainsi, la perpendiculaire abaissée sur le plan abc, d'un point pris entre A et B, sera au moins égale à celle qu'on abaisserait du point B sur le même plan; mais la perpendiculaire abaissée sur le plan abc, d'un point pris entre A et C, sera plus grande que celle qu'on abaisserait du point C sur le même plan. Or, la somme des perpendiculaires abaissées des points A, B, C, sur le plan abc étant (3) égale à la perpendiculaire abaissée du point D sur le même plan, on en doit conclure que cette dernière est moindre que la somme des perpendiculaires abaissées, sur le plan abc, du point A et de deux autres points pris sur AB et AC.

Cela posé, par bc soit conduit un plan $bfgc$ parallèle à l'arête DA; le prisme triangulaire $abcAfg$ aura pour expression l'aire du triangle abc multipliée par le tiers de la somme des distances des points A, f, g, au plan de ce triangle; ce prisme sera donc plus grand que le tétraèdre $Dabc$, qui a pour expression l'aire du même triangle multipliée par le tiers de la distance du point D à son plan; donc, à plus forte raison, le volume du tétraèdre $Dabc$ sera moindre que celui du tronc de tétraèdre $abcABC$, dont le prisme $abcAfg$ fait seulement partie; donc enfin le plan abc partage le tétraèdre DABC en deux parties inégales (*).

Paris, le 28 *février* 1811.

(*) Il résulte de tout ceci que le problème proposé à la page 127 de ce volume, pris dans le sens le plus général, est encore à résoudre. On doit espérer que M. J. L..., qui a su y jeter tant de jour, ne voudra pas laisser à d'autres le soin d'en compléter la solution.

(*Note des éditeurs.*)

ANALISE.

Théorème général sur l'invariabilité de la forme des fonctions ;

Par M. DE MAIZIÈRE, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Versailles.

I. SOIT y *une certaine fonction* φ, *de forme en général inconnue, d'une variable* x, *considérée comme variable indépendante*; φ (x) *étant supposée pouvoir varier, soit par les états de la variable* x, *soit par la forme même de la fonction désignée par* φ.

Si, pour un certain état particulier x_a (*) *de la variable principale, l'état correspondant* y_a *de la variable dépendante est exprimé par* $F_1(x_a)$ (**), *où* F_1 *désigne une fonction déterminée de l'état* x_a; *pour tout autre état* x_h *de la variable principale, l'état correspondant* y_h *de la variable dépendante sera exprimé par* $F_1(x_h)$; *c'est-à-dire, qu'on pourra être sûr, avant même de connaître la forme de* F_1, *que la relation entre* y *et* x *est invariable* (***).

(*) x_a doit se lire : x numéro a.

(**) $F_1(x_a)$ se prononce : fonction numéro 1 de x numéro a.

(***) Ce théorème, à raison de sa grande généralité, pouvant n'être pas également bien saisi par toutes les classes de lecteurs, il ne sera peut-être pas hors de propos de fixer, par l'application suivante, le sens précis qu'on doit y attacher.

Soit y une fonction $\varphi=(1+z)^x$ d'une variable x ; si pour un certain état particulier $x_a=m$ de la variable principale (m étant supposé entier et positif) l'état correspondant y_a de la variable dépendante est exprimé par

$$F_1(x_a)=F_1(m)=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}z^2+\ldots;$$

On

On regarde communément cette proposition, prise dans le sens général de son énoncé, comme un axiome, et néanmoins on croit ne pas pouvoir se dispenser de démontrer diverses propositions particulières qui y sont renfermées. Il paraît cependant qu'il n'est aucun cas où une démonstration soit moins indispensable que dans le cas de l'incommensurabilité, que dans la généralisation des formules, soit de la trigonométrie, soit de la transformation des coordonnées, soit des puissances des polynomes, etc.

La seule condition de rigueur, entre les variables x et y, est qu'elles soient, l'une et l'autre, assujéties à la loi de continuité; en sorte que l'on puisse concevoir deux états de x si voisins qu'on voudra, et assez voisins pour qu'il leur corresponde deux états de y dont la différence tombe au-dessous d'une limite donnée, quelque petite qu'on la suppose (*).

---

pour tout autre état, $x_h = -n$ ou $x_h = \frac{p}{q}$, de la variable principale, l'état correspondant y_h de la variable dépendante sera exprimé par

$$F_1(x_h) = F_1(-n) = 1 + \frac{(-n)}{1} z + \frac{(-n)}{1} \cdot \frac{(-n)-1}{2} z^2 + \ldots$$

ou

$$F_1(x_h) = F_1\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{1} z + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{1} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)-1}{2} z^2 + \ldots$$

(*) Ceci n'a pas besoin d'explication, lorsque la série des états de x étant composée de termes réels, celle des états correspondans de y ne comprend également que des termes réels ; mais on peut considérer une suite d'états imaginaires de x ou, en ne considérant que des états réels de cette variable, il peut se faire que la série des états correspondans de y ne renferme que des termes imaginaires ou soit composée de diverses parties alternativement réelles et imaginaires, et alors on peut demander à quels caractères on reconnaîtra qu'une telle suite de termes est assujétie à la loi de continuité ? Comme cela est sans difficulté pour les termes qui composent les parties réelles de la série, il s'agit seulement d'expliquer dans quel sens on peut dire que, soit deux termes imaginaires, soit un terme réel et un terme imaginaire, se succédant consécutivement, sont plus ou moins voisins.

Pour cela nous remarquerons que la différence de deux pareils termes peut toujours, en général, être supposée imaginaire et de la forme $p+q\sqrt{-1}$; or il n'y a

Notre proposition sera démontrée (comme on le verra bientôt) si, x_{a+1}, y_{a+1} étant deux états correspondans, aussi voisins qu'on voudra de x_a, y_a, respectivement, on reconnait que la relation

$$y_{a+1}=F_2(x_{a+1}) \qquad (1)$$

est une absurdité; F_2 désignant une fonction déterminée, connue ou inconnue, autre que celle qui est désignée par F_1.

Pour établir cette proposition, formons le tableau des séries d'états variables de x, y, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...

x	x_1	x_2	...	x_a	x_{a+1}	...	x_h	(I)
y	y_1	y_2	...	y_a	y_{a+1}	...	y_h	(II)
$F_1(x)$	$F_1(x_1)$	$F_1(x_2)$	...	$F_1(x_a)$	$F_1(x_{a+1})$	...	$F_1(x_h)$	(III)
$F_2(x)$	$F_2(x_1)$	$F_2(x_2)$	...	$F_2(x_a)$	$F_2(x_{a+1})$	...	$F_2(x_h)$	(IV)
......	....	....	...	......	....	...	....	......

Cela posé, soient

$$x_{a+1}-x_a=i \quad , \qquad (2)$$

$$y_{a+1}-y_a=i' \quad , \qquad (3)$$

$$F_1(x_{a+1})-F_1(x_a)=i'' \quad , \qquad (4)$$

$$F_2(x_{a+1})-F_2(x_a)=i''' \quad , \qquad (5)$$

i, i', i'', i''', ... désignant des quantités qui, sans être nulles, tombent au-dessous d'une limite donnée, si petite qu'on voudra la supposer.

Si (1) est possible, on a, à cause de (3), et de $y_a=F_1(x_a)$

---

pas de doute qu'une telle expression ne puisse tendre vers zéro, puisqu'il suffit pour cela que p et q tendent eux-mêmes vers cette limite commune. Nous dirons donc que les deux termes que nous considérons ici sont d'autant plus voisins que p et q seront plus petits, et la loi de continuité consistera, dans ce cas, en ce qu'on puisse concevoir ces deux termes assez voisins pour que p et q, sans être nuls, puissent tomber, l'un et l'autre, au-dessous d'une limite donnée, quelque petite d'ailleurs 'on suppose cette limite.

qu.

$$F_2(x_{a+1})-F_1(x_a)=i' ; \qquad (6)$$

donc (5), (6) donneront

$$F_1(x_a)-F_2(x_a)=i'''-i'=i'''' ; \qquad (7)$$

Or, ce résultat est impossible ; car $F_1(x_a)$ est une quantité déterminée, résultant de certaines opérations sur la quantité x_a et sur les constantes implicites b, c, ... ; $F_2(x_a)$ est aussi une quantité déterminée, qui résulte d'un autre système d'opérations sur les quantités x_a, b, c, ..., qui sont exactement les mêmes que dans $F_1(x_a)$; donc $F_1(x_a)-F_2(x_a)$ est aussi une quantité déterminée et ne peut conséquemment tomber au-dessous d'une limite si petite qu'on voudra ; la relation (7) est donc impossible et conséquemment la relation (1) l'est aussi, si l'on suppose F_2 différent de F_1 ; donc enfin F_2 est identique avec F_1.

Il suit de là que y_a étant compris dans la série $F_1(x)$ l'état y_{a+1}, qui avait été supposé$=F_2(x_{a+1})$, est aussi compris dans la même série puisque F_2 étant la même chose que F_1 ; aussi $F_2(x_{a+1})$ est la même chose que $F_1(x_{a+1})$: or, cette proposition étant générale, il s'ensuit que pareillement y_{a+2} est compris dans la même série $F_1(x)$ et que généralement, si y_{a+g} y est compris, il en sera de même de y_{a+g+1} ; donc y_{a+3}, y_{a+4}, y_{a+5}, ... y_h, sont compris dans la même série ; donc enfin $y_h=F_1(x_h)$, comme nous l'avions annoncé.

II. *La même proposition est vraie à l'égard d'une fonction inconnue* y *de deux variables principales* x', x''; *c'est-à-dire, que si, pour les états simultanés* $x'_{a'}$, $x''_{a''}$, *des deux dernières, répondant à l'état* $y_{a'a''}$ (*) *de la première, on a* $y_{a'a''}=F_1(x'_{a'}, x''_{a''})$ ... (1), *où* F_1 *désigne une fonction déterminée, connue ou inconnue ; pour tout autre système* $x'_{h'}$, $x''_{h''}$, *d'états simultanés des deux variables principales, répondant à l'état* $y_{h'h''}$ *de la variable subordonnée, on doit avoir également* $y_{h'h''}=F_1(x'_{h'}, x''_{h''})$ ..... (2).

On peut, pour démontrer cette proposition, ou répéter exactement

(*) $y_{a'a''}$ s'énonce : y numéro, a prime, a seconde.

le raisonnement qui a servi à démontrer la première, ou employer un nouveau raisonnement, non moins simple, et fondé sur cette première : nous préférerons ce dernier mode de démonstration.

Pour parvenir de $y_{a'a''}$ à $y_{h'h''}$, considérons l'état intermédiaire $y_{h'a''}$. Cet état se trouve dans la série des états de $\varphi(x', x''_{a''})$, pour lesquels $x''_{a''}$ est constante ; ainsi $\varphi(x', x''_{a''})$ est une fonction d'une seule variable x', et un de ses états particuliers est, par hypothèse $y_{a'a''} = F_1(x'_{a'}, x''_{a''})$; donc toute la série $\varphi(x', x''_{a''})$ est de la forme $F_1(x', x''_{a''})$; donc, en particulier, pour $x'_{h'}$, $x''_{a''}$ on a : $y_{h'a''} = F_1(x'_{h'}, x''_{a''})$ ...... (3).

Maintenant, la valeur $y_{h'h''}$ est comprise dans la série des états de $\varphi(x'_{h'}, x'')$ pour lesquels $x'_{h'}$ est constant, x'' seule variable, et dont un état particulier est, (3), $y_{h'a''} = F_1(x'_{h'}, x''_{a''})$; donc (I) toute la série $\varphi(x'_{h'}, x'')$ est de la même forme que $F_1(x'_{h'}, x''_{a''})$; donc, en particulier $y_{h'h''} = F_1(x'_{h'}, x''_{h''})$, comme nous l'avions annoncé.

III. La proposition étant supposé vérifiée jusqu'à $y = \varphi[x', x'', ..., x^{(k)}]$, elle sera vraie aussi pour $y = \varphi[x', x'', ..., x^{(k)}, x^{(k+1)}]$. En effet, supposons $y_{a'a''....a^{(k)}a^{(k+1)}} = F_1[x'_{a'}, x''_{a''} .... x^{(k)}_{a^{(k)}}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}]$ (*) ... (1), nous allons voir que $y_{h'h''....h^{(k)}h^{(k+1)}} = F_1[x'_{h'}, x''_{h''}, ..., x^{(k)}_{h^{(k)}}, x^{(k+1)}_{h^{(k+1)}}]$ ...... (2).

Pour nous en convaincre, considérons d'abord l'état intermédiaire $y_{h'h''....h^{(k)}a^{(k+1)}}$, compris dans la série $\varphi[x', x'', ... x^{(k)}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}]$ fonction de k variables (la dernière quantité $x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}$ étant constante), et dont un état particulier est celui supposé (1). D'après l'hypothèse établie pour une fonction de k variables, on doit avoir $\varphi[x', x'', ... x^{(k)}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}] = F_1[x', x'', ... x^{(k)}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}]$ .... (3), et par conséquent $y_{h'h''...h^{(k)}a^{(k+1)}} = F_1[x'_{h'}, x''_{h''}, ..., x^{(k)}_{h^{(k)}}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}]$ ..... (4).

Maintenant la valeur énoncée $y_{h'h''....h^{(k)}h^{(k+1)}}$ est un état particulier

(*) $y_{a'a''.....a^{(k)}a^{(k+1)}}$ s'énonce : y numéro, a prime, a seconde, ... a accent k, a accent $(k+1)$.

de $\varphi[x'_{h'}, x''_{h''}, \ldots, x^{(k)}_{h^{(k)}}, x^{(k+1)}]$, fonction de la seule variable $x^{(k+1)}$, et dont un autre état particulier est $F_1[x'_{h'}, x''_{h''}, \ldots x^{(k)}_{h^{(k)}}, x^{(k+1)}_{a^{(k+1)}}]$; donc (I) on doit avoir $y_{h'h''\ldots h^{(k)}h^{(k+1)}} = F_1[x'_{h'}, x''_{h''}, \ldots x^{(k)}_{h^{(k)}}, x^{(k+1)}_{h^{(k+1)}}]$, comme nous l'avons annoncé.

IV. *Conclusion.* La proposition étant effectivement prouvée (I), (II) pour $k=1$, $k=2$, il s'ensuit (III) qu'elle est vraie pour $k=3, k=4, \ldots$, pour un nombre quelconque, pour un nombre m de variables.

V. Il est maintenant facile de voir que cette proposition embrasse, dans sa généralité, toutes celles qui concernent les incommensurables, les formules trigonométriques, le développement de $(1+z)^m$, m étant quelconque, etc., etc. Il y a plus, elle s'applique à des fonctions composées de plusieurs séries séparées, comme sont les ordonnées des deux parties d'une hyperbole ; la loi de continuité étant conservée, dans les deux séries distinctes, par les expressions imaginaires qui, entre autres propriétés, ont l'importante destination de lier des résultats qui, sans leurs intermédiaires, sembleraient isolés les uns des autres.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 292 de ce volume ;

Par M. Vecten, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.

Énoncé. Deux villes se trouvent situées d'une manière connue, d'un même côté d'un canal rectiligne.

On veut établir un pont sur ce canal, et construire une route de communication de ce pont aux deux villes pour l'usage desquelles il est destiné.

Il s'agit de déterminer en quel lieu il faut établir ce pont, et de quelle manière on doit diriger les branches de la route, pour que la longueur totale de celle-ci soit la moindre possible?

Solution. Soit AB (fig. 7) la direction du canal, soient M, M′, les deux villes desquelles soient abaissées sur AB les perpendiculaires MP, M′P′; soit prolongée l'une quelconque MP de ces perpendiculaires, au-delà de AB, d'une quantité PN=PM; soit menée M′N coupant AB en K et soit joint MK.

Si chacun des deux angles égaux MKP, M′KP′ n'excède pas 30°; ou, ce qui revient au même, si aucune des perpendiculaires MP ou M′P′ n'excède la moitié de MK ou M′K, le point K sera celui où il faudra établir le pont, et on communiquera de ce pont aux deux villes par les routes KM, KM′.

Si les angles égaux MKP, M′KP′ excèdent 30°; ou, ce qui revient au même, si KM et KM′ sont moindres que les doubles de MP et M′P′ respectivement; après avoir joint M, M′ par une droite coupant en A la direction du canal, on examinera quelle est la grandeur de l'angle MAP.

Si cet angle n'est pas moindre que 30°, ou, ce qui revient au même, si MP et M′P′ ne sont pas moindres que les moitiés de AM et AM′ respectivement, le pont devra être établi au pied P de la perpendiculaire abaissée, sur la direction du canal de la ville qui en est la plus voisine; et on communiquera de ce pont aux deux villes par la route PMM′.

Si enfin l'angle MAP est moindre que 30°, c'est-à-dire, si MP et M′P′ sont moindres que les moitiés respectives de AM et AM′, les angles MKP et M′KP′ étant toujours plus grands que 30°, on construira de la manière suivante :

Tout étant d'ailleurs dans la figure 8 comme dans la figure 7, soient décrits des points M, M′, comme centres, et avec des rayons arbitraires, des arcs coupant MP et M′P′ en d et d'; de ces points d et d' comme centres, et avec les mêmes rayons respectifs, soient décrits de nouveaux arcs coupant les premiers en e et e'; soient enfin menées Me et $M'e'$, se coupant en m; en abaissant, de ce dernier point, une perpendiculaire sur AB, le pied K de cette perpendiculaire sera l'emplacement du pont, et on communiquera de ce pont aux deux villes au moyen des trois branches de route mM, mM', mK, formant autour de leur point de concours m des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit (*).

SOLUTIONS PUREMENT GÉOMÉTRIQUES *des problèmes de* minimis *proposés aux pages* 196, 232 *et* 292 *de ce volume, et de divers autres problèmes analogues;*

Par un ABONNÉ. GERGONNE.

MON dessein n'étant pas ici de discuter les diverses circonstances qui peuvent modifier la solution des problèmes que je me propose d'enseigner à construire, et même les rendre impossibles, je supposerai constamment, dans tout ce qui va suivre, que les données sont choisies de manière à ce que ces problèmes puissent être résolus, et puissent fournir toutes les solutions que leur nature comporte. Au surplus, les constructions que je vais indiquer étant fort simples, il sera facile, pour tout lecteur intelligent, de suppléer à ce que, dans la vue d'abréger, j'aurai volontairement omis.

J'avertis, une fois pour toute, que tous les points, droites et cercles dont il va être question, sont constamment supposés appartenir à un même plan.

Pour parvenir plus facilement à mon but, je vais d'abord rappeler et démontrer brièvement deux propositions connues.

1. *LEMME I. Le point d'une droite donnée dont la somme des*

(*) Toutes ces diverses constructions se trouvent démontrées par l'analise, dans la note remise aux rédacteurs par M. Vecten, et que le défaut d'espace a forcé de ne donner que par extrait.

(*Note des éditeurs.*)

distances à deux points donnés, d'un même côté de cette droite, est la plus petite, est celui duquel menant des droites aux deux points donnés, ces droites font, de différens côtés, des angles égaux avec la droite donnée.

Démonstration. Soient (fig. 9) AB la droite et P, Q les deux points donnés; soit M le point de AB dont la somme MP+MQ des distances aux deux points donnés soit la plus petite. Soit abaissée sur AB, de l'un quelconque P des points donnés, une perpendiculaire PC; soit prolongée cette perpendiculaire au-de là de AB d'une quantité $CP'=CP$.

Comme, par la construction, $MP'=MP$, il s'ensuit que $MP+MQ=MP'+MQ$; la première de ces deux sommes ne peut donc être un *minimum*, comme on le suppose, sans que la dernière le soit aussi; ce qui exige que le point M soit en ligne droite avec les points P′ et Q; or de là résulte l'égalité des angles P′MA et QMB, et par suite celle des angles PMA et QMB.

2. *Remarque.* Il est aisé de voir que, quelle que soit la situation des points P, Q, d'un même côté de la droite indéfinie, AB, il y aura toujours, sur cette droite, un point M qui jouira de la propriété qui vient d'être exposée.

3. *LEMME II. Si, sur une circonférence donnée, il y a un point duquel menant des droites à deux points donnés hors de cette circonférence, ces droites, sans couper le cercle, fassent des angles égaux avec le rayon mené au même point; ce point sera celui de la circonférence dont la somme des distances aux deux points donnés sera la plus petite.*

Démonstration. Soient (fig. 10) ANMB la circonférence donnée, et P, Q, les deux points donnés; soit M le point de cette circonférence par lequel menant MP, MQ, et la tangente EF, on ait Ang.PME =Ang.QMF. Soit joint un autre point N de la circonférence aux points P, Q, par les droites NP, NQ; soit D le point où l'une quelconque NQ de ces droites est coupée par la tangente EF; et soit menée DP.

Comme, par l'hypothèse et la construction, les angles PME et QMF

QMF sont égaux, on doit avoir

$$(1)\qquad MP+MQ<DP+DQ\,;$$

$$DP+DQ<NP+NQ\,;$$

donc

$$MP+MQ<NP+NQ\,.$$

4. *Remarque.* Il est aisé de voir que l'existence du point M est subordonnée à la condition que, parmi toutes les tangentes au cercle, il y en ait qui soient comprises entre la circonférence et les points P, Q; condition qui revient à celle-ci, qu'il y ait des points sur la circonférence que l'on puisse, sans couper le cercle, joindre par des droites aux points P, Q.

5. *PROBLÈME I. Déterminer un point dont la somme des distances à trois points donnés soit la moindre possible.*

Analise. Soient (fig. 11) A, B, C, les trois points donnés, et M le point cherché. De l'un quelconque C des points donnés, pris pour centre, et avec sa distance au point M pour rayon, soit décrit l'arc DME.

Si l'on connaissait déjà la distance CM, la question serait réduite à déterminer sur l'arc DME, un point M dont la somme MA+MB des distances aux points A, B, fût la moindre possible; ce qui exigerait (3) que les angles CMA, CMB, fussent égaux.

Chacune des droites MA, MB, MC doit donc faire avec les deux autres des angles égaux (*); les trois angles autour du point M doivent donc être égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit; ce qui donne lieu à la construction suivante:

Construction. Sur la distance entre deux quelconques A, B, des points donnés, prise pour corde, (fig. 12) soit décrit, du côté

(*) On peut encore parvenir à cette conclusion comme il suit: supposons que l'on connaisse déjà la somme MA+MB des distances du point M aux points A et B; ce point M devra être un de ceux du périmètre d'une ellipse ayant A et B, pour ses du troisième C, un arc AMB, capable de 120° (*); en joignant ce troisième point au milieu D du reste de la circonférence, par une droite CMD; l'intersection M de cette droite avec l'arc AMB sera le point cherché.

6. *PROBLÈME II. Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une droite donnés soit la moindre possible* (**)?

Analise. Soient (fig. 13) A, B, les deux points et EF la droite donnés; soit M le point cherché; soient joints MA, MB, et soit abaissée sur EF la perpendiculaire MC.

Si les angles formés autour du point M, par les droites menées de ce point aux trois points A, B, C, n'étaient pas égaux, il pourrait y avoir (5) un autre point M′ pour lequel cette condition serait satisfaite, et alors, en abaissant de ce point une perpendiculaire M′C′ sur EF, on aurait

$$M'A+M'B+M'C'<M'A+M'B+M'C\,,$$

$$(5)\qquad M'A+M'B+M'C<MA+MB+MC\,;$$

d'où
$$M'A+M'B+M'C'<MA+MB+MC\,,$$

contrairement à l'hypothèse. On déterminera donc le point M par la construction suivante :

Construction. Sur la distance entre les deux points A, B, prise pour corde (fig. 14) soit décrit, du côté de EF, un arc AMB capable de 120°; l'intersection M de cet arc avec la perpendiculaire DMC abaissée sur EF du milieu D du reste de la circonférence, sera le point cherché.

---

foyers et MA+MB pour son grand axe, il ne s'agira plus conséquemment que de prendre pour le point M le point de ce périmètre le plus voisin de C; CM devra donc être une normale à l'ellipse et devra conséquemment faire des angles égaux avec les rayons vecteurs MA et MB.

(*) On doit remarquer que l'arc capable de 120° est très-facile à construire de plusieurs manières différentes.

(**) C'est le premier des deux problèmes proposés à la page 292.

7. *PROBLÈME III. Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux droites donnés soit la moindre possible* (*) ?

Analise et construction. Soient (fig. 15) SE, SF, les deux droites et C le point donné; soit M le point cherché; soit joint MC et soient abaissées sur SE et SF les perpendiculaires MA et MB.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé dans le problème précédent, il est facile de se convaincre que la somme des droites MA, MB, MC, ne peut être un *minimum* à moins que les angles formés par ces droites, autour du point M, ne soient égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Or, comme l'angle AMB se trouve déterminé à être le supplément de l'angle S, il s'ensuit que le problème sera impossible, si cet angle S n'est pas de 60°.

Si au contraire l'angle S se trouve être de 60°, le problème demeurera indéterminé, et on pourra prendre pour M l'un quelconque des points de la parallèle conduite par C à la droite qui divise l'angle S en deux parties égales.

8. *PROBLÈME IV. Déterminer un point dont la somme des distances à trois droites données soit la moindre possible ?*

Analise et construction. Soient (fig. 16) EF, FD, DE, les droites données; M le point cherché, et MA, MB, MC les perpendiculaires abaissées de ce point sur ces trois droites.

On prouvera encore facilement ici, comme ci-dessus, que, pour que la somme de ces perpendiculaires soit un *minimum*, il faut que les angles qu'elles forment autour du point M soient égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Or, comme ces angles sont déterminés à être respectivement les supplémens des angles D, E, F; il s'ensuit que si ces derniers ne sont pas tous de 60°; c'est-à-dire, en d'autres termes, que si le triangle DEF n'est point équilatéral, le problème ne pourra être résolu.

(*) C'est le premier des deux problèmes proposés à la page 232.

Si au contraire le triangle DEF est équilatéral, le problème demeurera indéterminé, de manière que tous les points du plan de ce triangle pourront être pris pour le point cherché.

De là résulte ce théorème connu : *la somme des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle équilatéral, d'un point quelconque de son plan, est une quantité constante et égale à la hauteur du triangle.*

9. *PROBLÈME V. Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une circonférence donnés soit la moindre possible* (*) ?

Solution. La somme des distances d'un point à deux points donnés et à la circonférence d'un cercle donné ne différant de la somme des distances du même point aux deux mêmes points et au centre du cercle, que par le rayon de ce cercle qui est une quantité constante ; l'une de ces sommes ne peut être un *minimum* à moins que l'autre n'en soit un aussi. On construira donc ce problème comme le *Problème I*, en substituant au troisième point donné le centre du cercle donné.

10. *PROBLÈME VI. Déterminer un point dont la somme des distances à un point, à une droite et à une circonférence donnés soit la moindre possible* (**) ?

Solution. Pour des raisons semblables à celles qui viennent d'être développées ci-dessus, on construira ce problème comme le *Problème II*, en substituant à l'un des deux points donnés le centre du cercle donné.

11. *PROBLÈME VII. Déterminer un point dont la somme des distances à deux droites et à une circonférence données soit la moindre possible ?*

Solution. Il est aisé de voir que ce problème présente des circonstances analogues à celles qu'offre le *Problème III*; c'est-à-dire que, si l'angle des droites données n'est pas de 60°, le problème sera impossible; et que, dans le cas contraire, on pourra prendre pour

---

(*) Ceci répond, pour un cas particulier, à la 1.re note de la page 292.

(**) Ceci répond, pour un cas particulier, à la note de la page 232.

le point cherché l'un quelconque des points de la parallèle menée, par le centre du cercle donné, à la droite qui divise en deux parties égales l'angle des droites données.

12. *PROBLÈME VIII. Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux circonférences donnés soit la moindre possible* (*) ?

Solution. On construira ce problème comme le *Problème I*, en substituant à deux des points donnés les centres des deux cercles donnés.

13. *PROBLÈME IX. Déterminer un point dont la somme des distances à une droite et à deux circonférences données soit la moindre possible ?*

Solution. On construira ce problème comme le *Problème II*, en substituant aux deux points donnés les centres des deux cercles donnés.

14. *PROBLÈME X. Déterminer un point dont la somme des distances à trois circonférences données soit la moindre possible ?*

Solution. On construira ce problème comme le *Problème I*, en substituant aux trois points donnés les centres des trois cercles donnés.

15. *PROBLÈME XI. Lier des points donnés, en nombre quelconque, par un système de droites dont la longueur totale soit la moindre possible* (**) ?

Analise. 1.° On ne doit pas supposer qu'à chacun des points donnés il aboutisse plusieurs des droites cherchées ; car supposons seulement que, A étant un de ces points, (fig. 17) deux MA, NA, des droites cherchées viennent s'y terminer ; on pourrait, en général (5), remplacer le système de ces deux droites par le système des trois droites PA, PM, PN, d'une longueur totale moindre ; en sorte que MA et NA ne rempliraient pas les conditions du problème. A la vérité, il peut bien arriver, dans des cas particuliers, que PA doive être nulle ; mais c'est à la construction du problème qu'il appartient d'indiquer cette circonstance.

2.° On peut remarquer, en second lieu, que, s'il y a des points de concours des droites cherchées, autres que les points don-

(*) Ceci répond, pour un cas particulier, à la note de la page 232.

(**) C'est le dernier des deux problèmes proposés à la page 292.

nés (et il ne peut manquer d'y en avoir de tels, d'après ce qui précède), ces droites ne sauraient s'y réunir en moindre nombre que trois. Si, en effet, en un même point M, (fig. 18) autre que les points donnés, il ne venait aboutir que deux seulement MN, MP, des droites cherchées; au lieu de lier les points N, P, par ces deux droites, on pourrait les lier par la droite unique et plus courte NP, en sorte que les droites MN, MP, ne satisferaient pas aux conditions du problème.

3.° On ne doit pas supposer non plus que celles des droites cherchées qui concourent en un même point autre que les points donnés, s'y réunissent au nombre de plus de trois; car, si l'on supposait seulement quatre de ces droites MN, MP, MQ, MR (fig. 19) concourant en un même point M, il serait possible (5), du moins en général, de remplacer le système de deux de ces droites MQ, MR, par exemple, par les trois droites SM, SQ, SR, d'une longueur totale moindre; de manière que MQ et MR ne rempliraient pas les conditions du problème. A la vérité la situation respective des points M, Q, R, peut bien, comme ci-dessus, dans des cas particuliers, en rendant SM nulle, faire coïncider le point S avec le point M; mais c'est encore ici à la construction du problème qu'il appartient uniquement d'indiquer cette circonstance.

4.° Enfin il est aisé de voir que les droites cherchées, concourant trois à trois en un même point, doivent former autour de ce point des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit; car soit M (fig. 20) le point de concours des trois droites MN, MP, MQ; si les angles formés par ces droites, autour de ce point, n'étaient pas égaux, en remplaçant le point M (5) par un point M′ qui satisfît à cette condition, on substituerait aux trois droites MN, MP, MQ, les trois droites M′N, M′P, M′Q, d'une longueur totale moindre, en sorte que les premières ne rempliraient pas les conditions du problème,

On voit donc que A, B, C, D,..., étant les points donnés, les droites cherchées ne peuvent que former une sorte de rameau de la nature de ceux que représentent les figures 21, 22, 23, 24, 25, de manière que les points M, N, P, Q,... de concours des droites trois à trois est, en général, moindre de deux unités que le nombre des points donnés, et que les angles formés par ces droites autour de ces points sont tous égaux entre eux et à quatre tiers d'angles droits. Il n'est donc plus question maintenant que d'enseigner à construire le problème.

Construction. On sait déjà résoudre le problème pour deux points donnés, puisqu'alors il n'y a d'autre droite à construire que celle qui joint ces deux points; on sait même le résoudre pour trois points donnés (5); si donc on parvient à ramener sa solution, pour le cas où les points donnés sont au nombre de n, à celle qui convient au cas où ces points seraient seulement au nombre de $n-1$, on saura le résoudre généralement; or c'est ce à quoi on peut parvenir très-simplement, en procédant comme il suit:

Soient pris arbitrairement (fig. 26) deux A, B, des n points donnés, de manière pourtant qu'en les joignant par une droite indéfinie cette droite laisse d'un même côté les $n-2$ points restans. Sur la distance AB comme corde soit décrit, du côté des autres points donnés, un arc AMB, capable de $120°$; soit D le milieu du reste de la circonférence, et soit substitué ce point D aux deux points A, B; on n'aura plus alors que $n-1$ points. Soit résolu le problème relativement à ces $n-1$ points, et soit alors KMD celle des droites cherchées qui vient se terminer au point D; en menant MA, MB, et substituant ces deux cordes à la partie MD de KMD interceptée dans le cercle, le problème se trouvera résolu pour les n points donnés. On peut remarquer au surplus que, les droites du système ne pouvant avoir que trois directions distinctes, il s'ensuit que, trois d'entre elles étant déterminées, toutes les autres se déterminent en menant des parallèles à ces trois-là.

16. *Remarque I.* Ce que cette construction laisse d'arbitraire dans le choix des points à employer successivement, fait que, passé le cas de trois points donnés, le problème admet plusieurs solutions, et que, lorsque ces points sont au nombre de plus de cinq, il peut être résolu par

des systèmes de droites essentiellement différens. Ces systèmes sont au nombre de trois pour six points donnés (fig. 23, 24, 25); on en trouve quatre pour sept points; huit points en fournissent treize; et ainsi de suite. Quant au nombre des solutions, ce sera, en général, un pour trois points, deux pour quatre, cinq pour cinq, quatorze pour six, quarante-deux pour sept, cent trente-deux pour huit, et ainsi de suite.

17. *Remarque II.* Si, pour un nombre quelconque A, B, C, D,... de points donnés, on suppose que les droites qui résolvent le problème sont des cordons réunis trois à trois en des nœuds M, N, P, Q,...; et si, aux points A, B, C, D,..., on applique des puissances égales quelconques, dirigées suivant les prolongemens des cordons qui se terminent en ces points; il est évident que ces puissances formeront un système en équilibre.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. A un triangle donné quelconque inscrire un triangle équilatéral qui soit le plus petit possible.

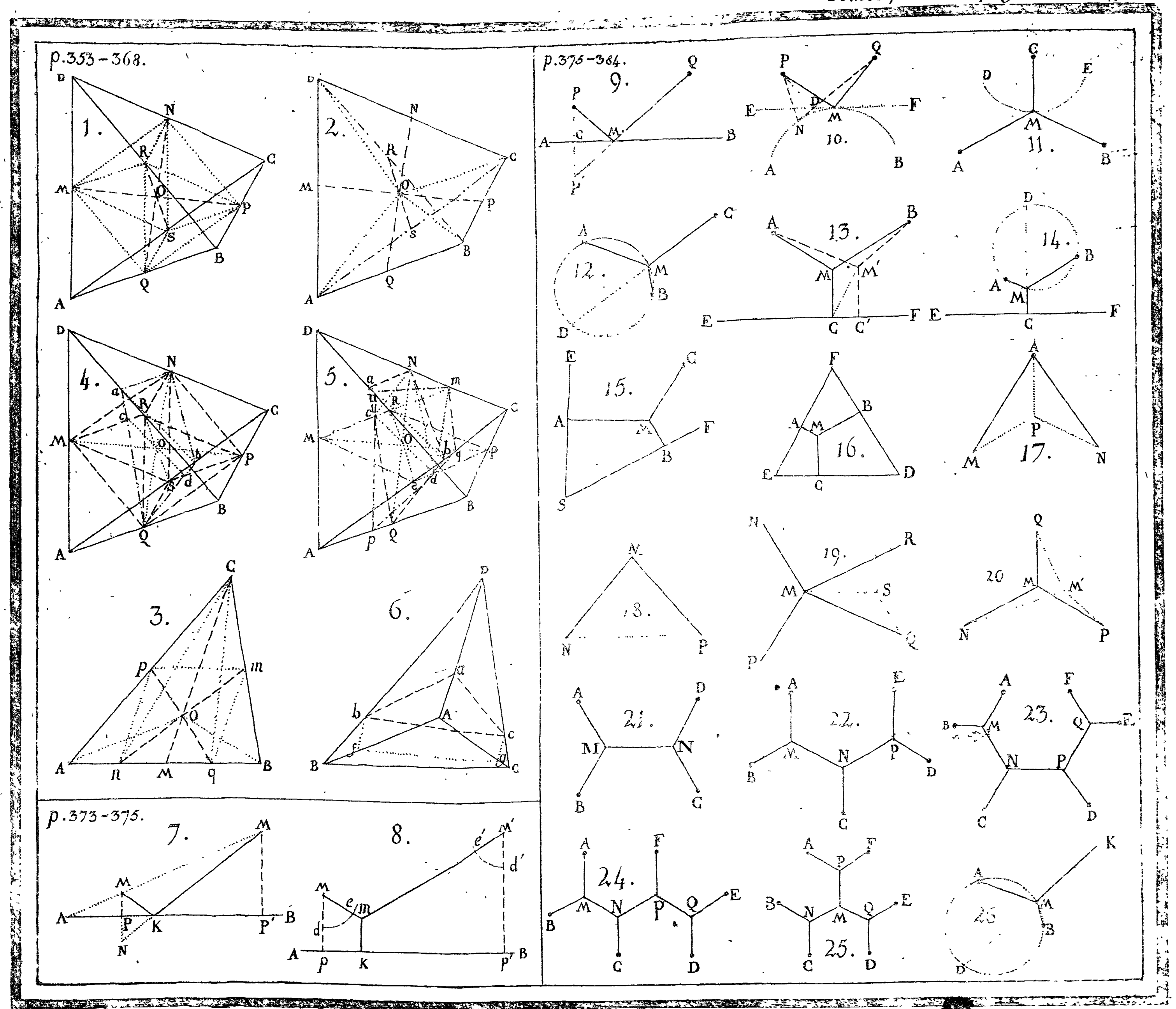
II. A un triangle donné quelconque circonscrire un triangle équilatéral qui soit le plus grand possible (*).

Théorème de Géométrie.

Le volume d'un tronc de prisme quelconque, droit ou oblique, est le produit de l'aire de l'une quelconque de ses bases, par la distance du plan de cette base au centre de gravité de l'aire de l'autre base.

(*) Au lieu de supposer équilatéraux les triangles à inscrire ou à circonscrire aux triangles donnés, on pourrait demander que ces triangles fussent semblables à des triangles donnés. On pourrait aussi étendre ces problèmes au tétraèdre.

FIN DU TOME PREMIER.



J. D. G. fecit.

TABLE

Des matières contenues dans le I.er volume des Annales.

ACOUSTIQUE.

ANALISE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

ARITHMÉTIQUE.

ASTRONOMIE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

ERRATA

Pour le tome premier des Annales.

N. B. *Quelques-unes des fautes qui vont être indiquées, ne se trouvent pas dans tous les exemplaires, parce qu'elles ont été aperçues pendant le tirage.*

Pour les Planches.

Planche II, fig. 6; il faut un E à l'intersection de XX′ et II′.
Planche III, fig. 4; il faut un E à l'intersection de AY et OD.
Planche IV, fig. 1; à l'extrémité de la corde A″P; il faut B″ au lieu de B.
fig. 17; à l'intersection de A″B″ avec CC′, il faut M″ au lieu de M.
Planche V, fig. 7; à l'intersection de $o'm'$ avec la parallèle à pp' conduite par o; il faut une l.
Planche VI, fig. 4, à l'intersection de ab, avec NQ; il faut une h.
fig. 5; il faut retourner l'S.

Pour le Texte.

Page 4, ligne 8, en remontant, rendre, *lisez* : présenter.
Page 16, ligne 8, *B*, *lisez* : B.
Page 17, à la note, ligne 3, côtées, *lisez* : côtés.
Page 19, ligne 11, en remontant, détéminer, *lisez* : déterminer.
Page 21, ligne 4, devant T^5, *mettez* : $\frac{1}{5}$.
Page 47, ligne 5, en remontant, avant $=$, *mettez* ^{2}.
Page 77, ligne 2, entre $10\frac{4}{5}$ et 12, *introduisez* 11.
Page 108, ligne 11, *liée*, lisez : *lié*.
Page 121, ligne 2, au dénominateur du deuxième facteur du second nombre au lieu de $4n$, *lisez* : $4n^2$.
ligne 6, pour $\frac{6m-n}{6n}$, *lisez* : $\frac{6n-m}{6n}$.
Page 130, ligne 2, sans être égaux, *lisez* : sans être supposés égaux.
Page 132, ligne 16 : *mettez* une virgule après $\frac{b'}{b}$C.
Page 133, ligne 14, CA=B, *lisez* : CA=b.
ligne 18, $\frac{b'}{b}$, $\frac{b^2-a^2}{c}$ et, *lisez* : $\frac{b'}{b}\,.\,\frac{b^2-a^2}{c}$, et,

Page 134, ligne 7, négative, *lisez* : et négative.

Page 135, ligne 1, $\frac{b}{b}$, *lisez* : $\frac{b'}{b}$.

Page 136, ligne 3.e, en remontant, $c'=\frac{b'}{b}c'$, *lisez* : $c'=\frac{b'}{b}c$,

Page 178, ligne 2, en remontant, $Uv+U'v'=\Sigma(Y'x')$, *lisez* : $Uv+U'v'=\Sigma(Y'z')$.

Page 179, ligne 4, en remontant, première colonne, $u-u'$, *lisez* : $u'-u$.

Page 183, ligne 10, $y=2+$, *lisez* : $y=x+$.

Page 186, ligne 5, en remontant, $=-x+$, *lisez* : $=-2x+$.

ligne 3, en remontant, $y=2x+6$, *lisez* : $y=-2x+6$.

Page 188, ligne 12, $y=\pm\sqrt{\ }$, *lisez* : $y=x\pm\sqrt{\ }$.

Page 190, lignes 4 et 5, *supprimez* : répétiteur à l'école impériale polytechnique.

Page 191, ligne 4, $y-'a'x'$, *lisez* : $y'-a'x'$.

Page 193, ligne 11, en remontant, $x''x'$, *lisez* : $x''y'$.

Page 196, à la note, ligne 2, en remontant, di'nscrire, *lisez* : d'inscrire.

Page 201, ligne 8, Sin.B : Sin.b, *lisez* : Sin.B.Sin.b.

Page 202, lignes 4 et 5, *supprimez* : répétiteur à l'école impériale polytechnique.

Page 215, avant-dernière ligne, $+c''$, *lisez* : $+d''$,

Page 231, à la note, couvrir, *lisez* : découvrir.

Page 236, ligne 19, *divisez* tous les coefficiens par 2.

Page 240, ligne 3, $4z^2-4zy$, *lisez* : $4z^2+4zy$.

Après la page 243, les deux pages suivantes doivent être numérotées 244 et 245.

Page 269, lignes 3 et 6, en remontant, (AF)—(BE), *lisez* : (AF)+(BE).

Page 281, lignes 3 et 4, sous le radical, k, *lisez* : k^2.

ligne 17, L, M, N, O, *lisez* : P, Q, R, S.

Page 282, lignes 1 et 2, sous le radical, $+4$, *lisez* : $+4v$.

ligne 11, $=11,5825757$, *lisez* : $=2,8956439$.

Page 287, ligne 5, m, *lisez* : n.

ligne 13, côté, *lisez* : côtés.

Page 290, lignes 17 et 18, *supprimez* les points, à la fin.

Page 291, ligne 7, en remontant, substituant, *lisez* : Substituant.

Page 293, ligne 4, *de Maizières* : lisez *de Maizière*.

A la note, ligne 2, en remontant, des rapports, *lisez* : des termes des rapports.

Page 294, ligne 5, reconnue, *lisez* : reconnu.

ligne 8, en remontant, $<Q_n$, *lisez* : $<Q_{n'}$.

Page 300, ligne 10, $\text{Cos.A}_3-\text{Cos.A}_2$, *lisez* : $\text{Cos A}_3+\text{Cos.A}_2$

ligne 8, en remontant, deuxième colonne, il faut un point après A_4.

Page 304, ligne 14, ASB, *lisez* : BAC.

Page 306, ligne 2, en remontant, $2\text{Sin.}\gamma$, *lisez* : $2\text{Sin.}\frac{1}{2}\gamma$.

Page 307, ligne 3, $1-2\text{Sin}.\gamma$, *lisez :* $1-2\text{Sin}.\frac{1}{2}\gamma$.
Page 327, ligne 6, -14382.3, *lisez :* $+14382.3$.
Page 330, lignes 1, 2, 3, 4, 5, dernière colonne, *changez* tous les $+$ en $-$.
Page 331, ligne dernière, au numérateur, $+2y^4$, *lisez :* $-2y^4$.
Page 336, ligne 3, en remontant, directrices, *lisez :* directrice.
Page 341, ligne 4, en remontant, trois données, *lisez :* trois droites données.
Page 343, avant-dernière ligne, $s-c$, *lisez :* $s-c'$.
Page 344, ligne 16, deuxième équation, r, *lisez :* r'.
Page 358, avant-dernière ligne, *changez* les grandes lettres en petites.
Page 359, à la note, *changez* les grandes lettres en petites.
Page 360, ligne 8, troisième, *lisez :* cinquième.
Page 364, ligne 10, en remontant, l'arête, *lisez :* l'axe.
Page 373, ligne 16, leurs intermédiaires, *lisez :* les intermédiaires de cette nature.
Page 377, ligne 12, après l'énoncé du problème, *mettez en note :* C'est le premier des deux problèmes proposés à la page 196.