

VÉRONIQUE MARTIN

## **Méthode de décomposition de domaine et de couplage pour des problèmes d'évolution**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 9, n° 2 (2002), p. 299-312

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_2002\\_\\_9\\_2\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_299_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Méthode de décomposition de domaine et de couplage pour des problèmes d'évolution

Véronique Martin

## Résumé

Nous proposons dans ce papier une nouvelle approche des méthodes de décomposition de domaine appliquées à la résolution des problèmes d'évolution. Nous appliquons ici cette méthode à l'équation de convection diffusion.

Nous introduisons par ailleurs un algorithme de couplage de l'équation de convection diffusion et de l'équation de convection.

## 1 Introduction

Résoudre numériquement une équation sur un domaine comme l'océan conduit à un problème discrétisé de grande taille. Si l'on veut mailler finement le domaine pour obtenir une solution précise, la résolution numérique ne peut souvent être gérée par un seul ordinateur.

Les méthodes de décomposition de domaine consistent à diviser le domaine initial en sous domaines de plus petite taille. Chaque sous-problème ainsi introduit, est alors résolu par un processeur ; et un échange d'informations entre les processeurs, selon un processus itératif permet d'obtenir la solution globale.

Par ailleurs, pour obtenir une simulation réaliste de la circulation de l'océan, il est intéressant d'utiliser un modèle différent selon la région géographique. Le problème revient alors à coupler différents modèles. Les méthodes de couplage s'inspirent des méthodes de décomposition de domaine, mais dans ce cas on résout sur chaque sous domaine une équation différente.

Nous nous intéressons ici au problème modèle de l'équation de convection diffusion pour lequel nous écrivons un algorithme de décomposition de

domaine et auquel nous appliquons une méthode de couplage.

Le but de cette étude est de résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de convection diffusion scalaire dans  $\Omega = \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla w - \nu \Delta w + cw = f \text{ dans } \Omega \times ]0, +\infty[ \\ w(\cdot, \cdot, 0) = w_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $\vec{\mathbf{B}} = (a, b)$  la vitesse de convection supposée constante,  $\nu > 0$  la viscosité et  $c$  une constante strictement positive.

On note  $\mathcal{L}_{CD}$  l'opérateur de convection diffusion :

$$\mathcal{L}_{CD} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla - \nu \Delta + c \quad (1.2)$$

Nous souhaitons résoudre ce problème par décomposition de domaine. Différentes stratégies ont déjà été introduites ; elles se différencient par le type d'informations échangées au niveau de l'interface commune.

Pour traiter des problèmes d'évolution les méthodes classiques consistent à discrétiser l'équation selon la variable temporelle et à résoudre à chaque pas de temps le problème stationnaire ainsi introduit par une méthode classique de décomposition de domaine : dans [11] il a été introduit des conditions de Dirichlet pour des domaines se recouvrant. Puis des conditions de type Robin s'appliquant également à des domaines sans recouvrement ont été étudiées ([7], [10]), avec plus récemment ([5]) l'introduction de conditions de Robin optimisées qui permettent une amélioration nette de la vitesse de convergence de l'algorithme.

Nous proposons ici une approche nouvelle qui applique les méthodes de décomposition de domaine directement au problème d'évolution, *i.e.* nous n'échangeons les informations qu'à la fin de l'intervalle de temps. Ceci nous permet alors une plus grande souplesse dans le choix des pas de temps et d'espace dans chaque sous domaine. Nous généralisons au cas de la dimension 2 le cas 1D introduit dans [2] .

Dans la section 2 nous construisons un algorithme de décomposition de domaine optimal dans le sens où il converge en deux itérations. Mais nous

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE COUPLAGE

verrons qu'il n'est pas directement applicable puisque les opérateurs mis en jeu ne sont pas locaux. Suivant [1] nous remplaçons ces opérateurs par des opérateurs locaux, et nous discutons les différentes stratégies possibles.

Dans la section 3 nous supposons la viscosité très faible dans un des deux sous-domaines et résolvons à cet endroit l'équation de convection. Nous proposons alors un algorithme de couplage entre l'équation de convection et de convection diffusion.

## 2 Méthode de décomposition de domaine

Nous décomposons ici le domaine  $\mathbb{R}^2$  en deux sous-domaines  $\Omega^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . L'interface entre ces sous-domaines qui ne se recouvrent pas est alors la droite d'équation  $x = 0$ . Nous cherchons à résoudre le problème (1.1) par décomposition de domaine.

### 2.1 Algorithme optimal

Nous considérons l'algorithme de Schwarz suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{CD} u^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - S^- u^{k+1} & = \frac{\partial v^k}{\partial x} - S^- v^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{CD} v^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} - S^+ v^{k+1} & = \frac{\partial u^k}{\partial x} - S^+ u^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right.$$

où  $S^+$  et  $S^-$  sont des opérateurs pseudodifférentiels dans les variables  $y$  et  $t$ .

Le théorème suivant nécessite l'introduction de la transformée de Fourier en temps et dans la variable spatiale tangentielle d'une fonction  $L^2(\Omega^\pm \times \mathbb{R})$  :

$$\hat{v}(x, k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint v(x, y, t) e^{i(ky + \omega t)} dy dt$$

**Théorème 2.1:** *L'algorithme (2.3) converge en deux itérations vers la solution de (1.1) pourvu que les symboles de Fourier de  $S^+$  et  $S^-$  sont respec-*

tivement :

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2\nu} \left( a \pm \sqrt{a^2 + 4\nu i(\omega + bk) + 4\nu^2 k^2 + 4\nu c} \right) \quad (2.4)$$

où la racine carrée du nombre complexe  $x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  est définie par  $\frac{1}{\sqrt{2}}((x + \sqrt{x^2 + y^2}) + i(-x + \sqrt{x^2 + y^2}))$ .

PREUVE: On introduit  $\mathcal{U}^k$  (resp.  $\mathcal{V}^k$ ) l'erreur à l'étape  $k$  dans le domaine  $\Omega^-$  (resp.  $\Omega^+$ ) i.e.  $\mathcal{U}^k = w_{|\Omega^-} - u^k$  (resp.  $\mathcal{V}^k = w_{|\Omega^+} - v^k$ ). Ces erreurs vérifient l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD} \mathcal{U}^{k+1} & = 0 & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ \mathcal{U}^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial \mathcal{U}^{k+1}}{\partial x} - S^- \mathcal{U}^{k+1} & = \frac{\partial \mathcal{V}^k}{\partial x} - S^- \mathcal{V}^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD} \mathcal{V}^{k+1} & = 0 & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ \mathcal{V}^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial \mathcal{V}^{k+1}}{\partial x} - S^+ \mathcal{V}^{k+1} & = \frac{\partial \mathcal{U}^k}{\partial x} - S^+ \mathcal{U}^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{cases}$$

On prolonge  $\mathcal{U}^k$  et  $\mathcal{V}^k$  par 0 pour les  $t < 0$  et on note encore  $\mathcal{U}^k$  et  $\mathcal{V}^k$  ces prolongements. Les transformées de Fourier en temps et en espace de  $\mathcal{U}^k$  et  $\mathcal{V}^k$  vérifient :

$$L_{CD} \hat{\mathcal{U}}^k = 0 \quad \text{et} \quad L_{CD} \hat{\mathcal{V}}^k = 0$$

où  $L_{CD} = -\nu \frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + (i(\omega + bk) + c + \nu k^2)$ . Ainsi  $\hat{\mathcal{U}}^k$  et  $\hat{\mathcal{V}}^k$  sont des distributions tempérées, solutions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 dont la solution est :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{U}}^k(x, k, \omega) = \alpha^k(k, \omega) e^{\lambda^+ x} \\ \hat{\mathcal{V}}^k(x, k, \omega) = \beta^k(k, \omega) e^{\lambda^- x} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $\lambda^{\pm}$  sont donnés par (2.4) et vérifient  $\mathcal{R}e(\lambda^+) > 0$ ,  $\mathcal{R}e(\lambda^-) < 0$ .

On a alors les relations suivantes en variables de Fourier :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathcal{U}}^k}{dx} - \lambda^+ \hat{\mathcal{U}}^k = 0 \\ \frac{d\hat{\mathcal{V}}^k}{dx} - \lambda^- \hat{\mathcal{V}}^k = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE COUPLAGE

Si les symboles de Fourier de  $S^\pm$  sont respectivement  $\lambda^\pm$ , alors dès  $k = 2$ , l'erreur dans chaque sous-domaine vérifie un problème homogène avec des conditions limites et une condition initiale nulle, *i.e.* par unicité de la solution, l'erreur dans chaque sous-domaine est nulle. Par suite,  $u^2 = w|_{\Omega^-}$  et  $v^2 = w|_{\Omega^+}$ .  $\square$

Les opérateurs  $S^+$  et  $S^-$  sont exacts mais non locaux, nous ne pouvons donc pas les utiliser directement dans l'algorithme. En fait, nous les remplaçons par des opérateurs différentiels d'ordre 0 ou 1, *i.e.* nous remplaçons les  $\lambda^\pm$  par des polynômes en  $k$  et  $\omega$ .

### 2.2 Algorithme de Schwarz généralisé

Nous introduisons les polynômes d'ordre 1 :

$$\lambda_1^+ = \frac{a+p}{2\nu} + i\omega q + ibkq \quad \text{et} \quad \lambda_1^- = \frac{a-p}{2\nu} - i\omega q - ibkq ,$$

où  $p \geq |a|$  et  $q \geq 0$ . Les opérateurs différentiels correspondants,  $\Lambda_1^\pm$ , qui remplaceront dans (2.3) les opérateurs  $S^\pm$  sont donnés par :

$$\Lambda_1^+ = \frac{a+p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad \Lambda_1^- = \frac{a-p}{2\nu} - q\frac{\partial}{\partial t} - bq\frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Ce qui mène à l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}u^{k+1} = f \text{ dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) = w_0 \text{ dans } \Omega^- \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y} \right) u^{k+1} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y} \right) v^k \text{ sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}v^{k+1} = f \text{ dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) = w_0 \text{ dans } \Omega^+ \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a+p}{2\nu} - q\frac{\partial}{\partial t} - bq\frac{\partial}{\partial y} \right) v^{k+1} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a+p}{2\nu} - q\frac{\partial}{\partial t} - bq\frac{\partial}{\partial y} \right) u^k \text{ sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.10)$$

On pourra trouver dans [8] la démonstration des théorèmes suivants :

**Théorème 2.2:** Soit  $p \geq |a|$  et  $q \geq 0$ . Soit  $f$  dans  $H^{1,1/2}(\Omega \times (0, T))$  et  $w_0$  dans  $H^2(\Omega)$ . Sous certaines conditions de compatibilité sur l'itération 0, les sous problèmes (2.9) et (2.10) sont bien posés dans  $H^{3,3/2}(\Omega^- \times (0, T)) \cap H^{3,3/2}(\Omega^+ \times (0, T))$ .

**Théorème 2.3:** *Si  $p - \frac{a^2}{2}q > 0$  l'algorithme (2.9),(2.10) converge dans  $L^\infty((0, T); H^1(\Omega^-)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^-)) \times L^\infty(0, T; H^1(\Omega^+)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^+))$  vers la solution de (1.1).*

*Remarque:* la définition et les propriétés des espaces de Sobolev  $H^{r,s}(\Omega \times ]0, T[)$  pourront être trouvés dans [6].

Il reste à choisir  $p$  et  $q$ . Pour cela on peut envisager deux stratégies. La première consiste à approcher les symboles  $\lambda^\pm$  par un développement de Taylor en basses fréquences (voir [1],[9]). Mais dans le but de tenir compte de toutes les fréquences et d'obtenir ainsi une méthode plus performante, nous adoptons une autre stratégie : nous introduisons le taux de convergence de l'algorithme (2.9), (2.10) et choisissons les  $p$  et  $q$  qui minimisent ce taux sur toutes les fréquences. Ce raisonnement a été appliqué au problème stationnaire en dimension 2 dans [4], puis au problème instationnaire en dimension 1 dans [2].

Nous présentons ici des résultats numériques qui illustrent l'efficacité des méthodes optimisées.

Nous résolvons l'équation de convection diffusion sur le carré unité et sur l'intervalle de temps  $]0, 1[$ . Nous plaçons l'interface en  $x = 0.6$  et les deux sous domaines se recouvrent d'une maille. Les données physiques utilisées sont  $a = b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $\nu = 0.05$ .

La figure 1 montre l'évolution de l'erreur en fonction des itérations de l'algorithme de Schwarz. Nous montrons les résultats obtenus avec l'algorithme de Schwarz classique (conditions de Dirichlet), puis avec l'algorithme (2.9), (2.10). Les paramètres  $p$  et  $q$  sont d'abord choisis par développement de Taylor, puis par optimisation du taux de convergence. On voit que la méthode optimisée améliore nettement la vitesse de convergence de l'algorithme.

### 3 Couplage de l'équation de convection diffusion et de l'équation de convection

Nous reprenons dans cette section le raisonnement précédent : nous décomposons le domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$ , mais cette fois-ci nous considérons que la viscosité est faible sur  $\Omega$  et même négligeable sur  $\Omega^+$ .

Nous résolvons l'équation de convection sur  $\Omega^+$  et notons  $\mathcal{L}_c = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{B} \cdot \nabla + c$

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE COUPLAGE

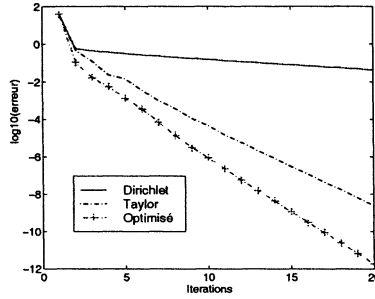


Figure 1: Logarithme de l'erreur  $L^2(\Gamma \times ]0, T])$  en fonction des itérations

l'opérateur correspondant.

Nous introduisons le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD}u = f & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u(\cdot, 0) = w_0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_C v = f & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v(\cdot, 0) = w_0 & \text{dans } \Omega^+ \end{cases}$$

Pour que  $u$  et  $v$  soient compatibles avec la solution de l'équation de convection diffusion sur  $\Omega$ , nous cherchons  $u$  et  $v$  vérifiant à l'interface  $\begin{cases} u = v \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ .

Notons qu'une définition différente du couplage a été introduite dans [3] et les conditions imposées sur l'interface sont différentes de celles que nous imposons ici.

Dans la section suivante, nous écrivons l'algorithme de couplage correspondant et proposons des conditions de transmission satisfaisant la continuité de la solution et de son flux au niveau à l'interface.

### 3.1 Algorithme de couplage

L'opérateur de convection est un opérateur de transport, ainsi le nombre de conditions limites à imposer au problème dans  $\Omega^+$  dépend du signe de la composante normale de la vitesse de convection ( $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ ).

Nous détaillons ici l'algorithme de couplage selon le signe de la vitesse de convection.



### 3.1.1 Cas de la vitesse sortante vers $\Omega^+$

Dans le cas où  $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = a$  est strictement positif sur  $\Gamma$ , l'algorithme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}_{CD}u^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - S^- u^{k+1} & = \frac{\partial v^k}{\partial x} - S^- v^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}_C v^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} - S^+ v^{k+1} & = \frac{\partial u^k}{\partial x} - S^+ u^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{array} \right.$$

Comme dans le cas de la décomposition de domaine, nous écrivons l'algorithme vérifié par les erreurs dans  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$ , que nous notons  $\mathcal{U}^k$  et  $\mathcal{V}^k$ . Les transformées de Fourier en temps et espace de  $\mathcal{U}^k$  et  $\mathcal{V}^k$  vérifient :

$$L_{CD}\hat{\mathcal{U}}^k = 0 \quad \text{et} \quad L_C\hat{\mathcal{V}}^k = 0$$

où

$$L_{CD} = -\nu \frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + (i(\omega + bk) + c + \nu k^2)$$

$$L_C = -a \left( \frac{d}{dx} - i \frac{\omega + bk}{a} - \frac{c}{a} \right)$$

Ainsi  $\hat{\mathcal{U}}^k$  et  $\hat{\mathcal{V}}^k$  sont solutions d'équations différentielles ordinaires que l'on peut résoudre aisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{U}}^k(x, k, \omega) = \alpha^k(k, \omega) e^{\lambda^+ x} \\ \hat{\mathcal{V}}^k(x, k, \omega) = \beta^k(k, \omega) e^{\lambda_c x} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

avec  $\lambda_c = i \frac{\omega + bk}{a} + \frac{c}{a}$  et  $\lambda^+$  donné par (2.4).

Ce qui signifie que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{\mathcal{U}}^k}{dx} - \lambda^+ \hat{\mathcal{U}}^k = 0 \\ \frac{d\hat{\mathcal{V}}^k}{dx} - \lambda_c \hat{\mathcal{V}}^k = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE COUPLAGE

Dans les variables initiales, ces relations deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}^k}{\partial x} - S^+ \mathcal{U}^k = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}^k}{\partial x} - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) \mathcal{V}^k = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous notons que cette fois  $\lambda_c$  est déjà un polynôme dans les variables de Fourier  $k$  et  $\omega$  ; nous avons donc pu introduire l'opérateur exact sur le bord. L'opérateur  $S^+$  est celui que nous avons introduit dans la première section. Il sera remplacé par un opérateur différentiel d'ordre 0 ( $q = 0$ ). Nous proposons alors l'algorithme de couplage suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD} u^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1}(\cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) u^{k+1} & = \frac{\partial v^k}{\partial x} - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) v^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C v^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v^{k+1}(\cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu} v^{k+1} & = \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu} u^k & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \end{cases} \quad (3.15)$$

**Théorème 3.1:** *Si  $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = a > 0$  est constant, l'algorithme (3.15) converge en deux itérations.*

PREUVE: Le résultat vient du fait que l'opérateur sur le bord du côté  $\Omega^-$  est exact. □

### 3.1.2 Cas de la vitesse entrante vers $\Omega^-$

Dans le cas où  $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = a < 0$  sur  $\Gamma$ , l'équation de convection dans  $\Omega^+$  ne nécessite pas de conditions aux limites. Dans  $\Omega^-$ , où l'on résout l'équation de convection diffusion, nous imposons une condition de Dirichlet pour nous assurer un minimum de continuité.

### 3.1.3 Cas de la vitesse tournante

Dans le cas où la vitesse n'est plus ni purement sortante, ni purement entrante (par exemple vitesse tournante), nous introduisons :

$$\begin{aligned}\Gamma_{out} &= \{x \in \Gamma, \vec{B} \cdot \vec{n} > 0\} \\ \Gamma_{in} &= \{x \in \Gamma, \vec{B} \cdot \vec{n} < 0\}\end{aligned}$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante de  $\Omega^-$  et où l'on a  $\bar{\Gamma}_{out} \cup \bar{\Gamma}_{in} = \bar{\Gamma}$  et  $\Gamma_{out} \cap \Gamma_{in} = \emptyset$

L'algorithme proposé est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD}u^{k+1} = f & \text{dans } \Omega^- \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1}(\cdot, 0) = w_0 & \text{dans } \Omega^- \\ \mathcal{L}_C u^{k+1} = \mathcal{L}_C v^k & \text{sur } \Gamma_{out} \times ]0, +\infty[ \\ u^{k+1} = v^k & \text{sur } \Gamma_{in} \times ]0, +\infty[ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C v^{k+1} = f & \text{dans } \Omega^+ \times ]0, +\infty[ \\ v^{k+1}(\cdot, 0) = w_0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} - \lambda^+ v^{k+1} = \frac{\partial u^k}{\partial x} - \lambda^+ u^k & \text{sur } \Gamma_{out} \times ]0, +\infty[ \end{cases}$$

A convergence on aura alors

$$\begin{aligned}u &= v & \text{sur } \Gamma \times ]0, +\infty[ \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} & \text{sur } \Gamma_{out} \times ]0, +\infty[\end{aligned}$$

## 3.2 Résultats numériques

### 3.2.1 Vitesse constante

On résout ici l'équation de convection diffusion sur le carré unité et sur l'intervalle de temps  $[0, 7]$  avec les paramètres physiques :  $\nu = 0.001$ ,  $a = 0.1$ , et  $b = 0.1$ .

L'interface est placée en  $x = 0.6$ . Les figures (2) et (3) montrent la condition initiale et la solution au temps  $t = 7$ .

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE COUPLAGE

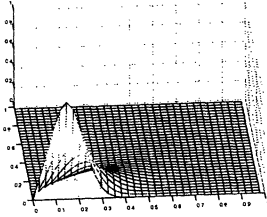


Figure 2: Condition Initiale

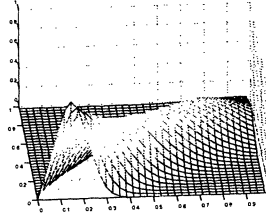


Figure 3: Solution à  $t = 7$

On peut alors observer sur la figure 4 la coupe en  $y = 0.5$  de la solution du couplage au temps  $t = 7$ , quand l'algorithme a convergé i.e. après deux itérations. On compare cette solution à la solution visqueuse (solution de l'équation de convection diffusion sur l'espace entier  $\Omega$ ). Dans le domaine  $\Omega^-$ , la solution du couplage correspond à la solution visqueuse ; dans le domaine  $\Omega^+$ , on observe bien une solution qui convecte mais ne diffuse plus. On voit par ailleurs que la solution et sa première dérivée sont bien continues au niveau de l'interface.

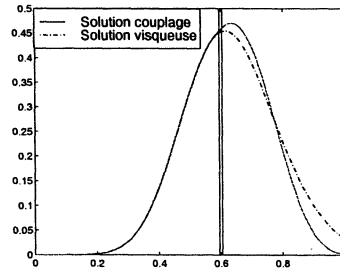


Figure 4: Coupe de la solution

### 3.2.2 Vitesse tournante

On résout ici l'équation de convection diffusion sur le carré unité, et sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  avec les paramètres physiques  $\nu = 0.001$ ,  $a = 1 - 2y$ ,  $b = 1$ .

L'interface se trouve en  $x = 0.6$ . Les figures (5) et (6) montrent la condition initiale et la solution à  $t = 1$ .

Les figures (7) et (8) montrent deux coupes en  $y < 0.5$ , i.e. dans la région où la vitesse de convection se dirige vers  $\Omega^+$ . On voit que, comme pour la

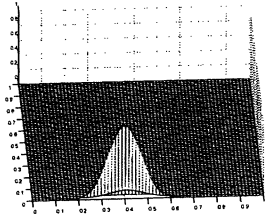


Figure 5: Condition Initiale

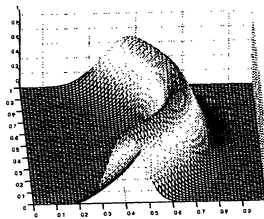


Figure 6: Solution à  $t = 1$

vitesse constante, la solution du couplage correspond à la solution visqueuse dans  $\Omega^-$ . Dans  $\Omega^+$ , la solution convecte mais ne diffuse plus. Les figures (9) et (10) montrent deux coupes en  $y > 0.5$  (région où la vitesse de convection sort de  $\Omega^+$ ). On voit que puisque la solution n'a pas diffusé dans  $\Omega^+$ , la perturbation qui en résulte se propage à  $\Omega^-$ .

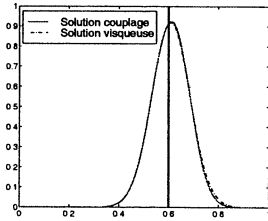


Figure 7: Coupe en  $y = 0.3$

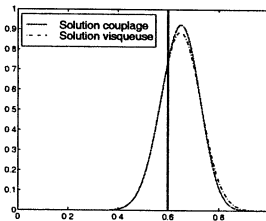


Figure 8: Coupe en  $y = 0.5$

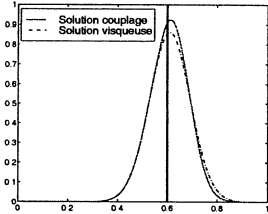


Figure 9: Coupe en  $y = 0.7$

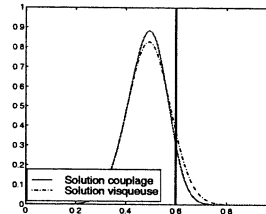


Figure 10: Coupe en  $y = 0.9$

## 4 Conclusion

Avec l'objectif de résoudre numériquement des équations sur un domaine de grande taille, nous avons mis en place un algorithme de décomposition de domaine global en temps pour le problème modèle de l'équation de convection diffusion. Et l'optimisation des conditions de transmission nous ont donné une convergence rapide vers la solution globale et donc un algorithme moins coûteux.

Ensuite nous nous sommes inspirés de cette méthode pour écrire un algorithme de couplage entre deux équations, que des résultats numériques ont validé.

Ces méthodes ont été étudiées dans un cas scalaire, nous travaillons maintenant à leur généralisation au cas vectoriel pour le système Shallow Water.

## Références

- [1] B. Engquist et H.K. Zhao. Absorbing boundary conditions for domain decomposition. *Appl. Numer. Math.*, 27:341–365, 1998.
- [2] M.J. Gander, L. Halpern, et F. Nataf. Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation. In C-H. Lai, P. Bjørstad, M. Cross, et O. Widlund, editors, *Eleventh international Conference of Domain Decomposition Methods*. ddm.org, 1999.
- [3] F. Gastaldi, A. Quarteroni, et G. Sacchi Landriani. On the coupling of two dimensional hyperbolic and elliptic equations : Analytical and numerical approach. In T. Chan et al eds., editor, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 22–63, Philadelphia, 1990. SIAM.
- [4] C. Japhet. Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode optimisée d'ordre 2. Thèse de l'université Paris XIII, 1998.
- [5] C. Japhet, F. Nataf, et F. Rogier. The optimized order 2 method. application to convection-diffusion problems. *Future Generation Computer Systems FUTURE*, 18, 2001.
- [6] J.L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, 1968.

V. MARTIN

- [7] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains. In Tony F. Chan, Roland Glowinski, Jacques Périaux, et Olof Widlund, editors, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, held in Houston, Texas, March 20-22, 1989. SIAM, 1990.
- [8] V. Martin. An optimized schwarz waveform relaxation method for unsteady convection diffusion equation in 2 dimension. *En préparation*, 2003.
- [9] F. Nataf, F. Rogier, et E. Sturler. Domain decomposition methods for fluid dynamics, Navier-Stokes equations and related nonlinear analysis. *Edited by A. Sequeira, Plenum Press Corporation*, pages 367–376, 1995.
- [10] A. Quarteroni et A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, 1999.
- [11] H.A. Schwarz. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, May 1870.

VÉRONIQUE MARTIN  
UNIVERSITÉ PARIS 13  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
99, AVENUE J.B. CLÉMENT  
93430 VILLETANEUSE  
FRANCE  
martin@math.univ-paris13.fr