

ALBERT BADRIKIAN

Martingales hilbertiennes

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome S3 (1996), p. 115-171

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__S3__115_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Martingales hilbertiennes

CHAPITRE UN

Rappels de résultats relatifs aux espaces hilbertiens

Dans ce chapitre et le suivant nous ne considérerons que des Hilbert réels, sauf mention expresse du contraire, car bien que non nécessaire, cela apporte quelques simplifications dans les énoncés.

Si H est un Hilbert, on désigne par (\cdot, \cdot) ou $(\cdot, \cdot)_H$ son produit scalaire, par $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_H$ sa norme et par H' son dual (on n'identifiera pas nécessairement un Hilbert avec son dual).

On désignera par $\langle ; \rangle$ l'accouplement canonique entre H et H' . Si K est un autre Hilbert on désigne par $\mathcal{L}(H, K)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de H dans K et par $B(H, K)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $H \times K$, (qui est également un Banach pour la norme naturelle).

Avec ces conventions on a les isomorphismes naturels (algébriques et topologiques) :

$$\mathcal{L}(H, K) \simeq B(H, K) \simeq \mathcal{L}(K, H)$$

obtenus comme suit :

si $u \in \mathcal{L}(H, K)$ on lui fait correspondre la forme bilinéaire :

$$(x, y) \rightsquigarrow (u(x), y)_K \text{ sur } H \times K,$$

puis son adjointe u' définie par :

$$(u(x), y)_K = (x, u'(y))_H, \quad \forall (x, y) \in H \times K.$$

On a de même les isomorphismes

$$\mathcal{L}(H, K) \simeq B(H, K') \simeq \mathcal{L}(K', H')$$

obtenus ainsi :

si $u \in \mathcal{L}(H, K)$, on lui associe la forme bilinéaire $(x, y') \rightsquigarrow \langle y'; u(x) \rangle$, puis sa transposée ${}^t u$ définie par $\langle {}^t u(y'); x \rangle = \langle y'; u(x) \rangle$.

1 - Applications linéaires d'Hilbert-Schmidt

(Voir GELFAND-VILENKIN - Vol.IV).

Soient H et K deux Hilbert et $u : H \rightarrow K$ linéaire ; si $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ désigne une base orthonormée de H la quantité

$$\sum_{\alpha} \|u(e_\alpha)\|^2 \text{ est indépendante de la base choisie.}$$

On dit que u est "**d'Hilbert-Schmidt**" si cette quantité est finie. On pose alors :

$$\|u\|_2 = \|u\|_{H-S} = \left(\sum_{\alpha} \|u(e_\alpha)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on dira que u est $H-S$, en abrégé.

Un opérateur d'Hilbert-Schmidt est nécessairement continu : il est même compact. L'ensemble des opérateurs d'Hilbert-Schmidt est un espace vectoriel, normé par $\|\cdot\|_2$ et **c'est même un Hilbert** pour le produit scalaire :

$$(u, v) \rightsquigarrow \sum_{\alpha} (u(e_\alpha), v(e_\alpha))_K$$

(la somme du membre de droite étant indépendante de la base orthonormée (e_α) choisie).

On le note $\mathcal{L}_2(H, K)$ ou $H \hat{\otimes}_2 K$.

u est $H-S$ si et seulement si son transposé (ou son adjoint) l'est et on a :

$$\|u\|_{H-S} = \|^t u\|_{H-S} = \|u'\|_{H-S}.$$

Il est facile de voir que u est $H-S$ si et seulement si, pour toute base orthonormée $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de H et toute base orthonormée $(f_\beta)_{\beta \in K}$ de K on a :

$$\sum_{\alpha, \beta} |(u(e_\alpha), f_\beta)|^2 < \infty$$

(la somme du membre de gauche étant indépendante des bases choisies).

De la même façon une forme bilinéaire B sur $H \times K$ est dite "**d'Hilbert-Schmidt**" si pour toutes bases orthonormées $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(f_\beta)_{\beta \in B}$ de H et K respectivement on a :

$$\sum_{\alpha, \beta} |B(e_\alpha, f_\beta)|^2 < \infty$$

(la somme de gauche étant indépendante des bases choisies).

Il est clair que $u \in \mathcal{L}(H, K)$ est $H-S$ si et seulement si la forme bilinéaire associée est elle même $H-S$.

Une application linéaire continue de rang fini est évidemment d'Hilbert-Schmidt et l'ensemble de ces applications est dense dans l'espace des applications H - S .

D'autre part $H \otimes K$ est algébriquement isomorphe à l'ensemble des applications linéaires *continues de rang fini* de H dans K ; l'isomorphisme faisant correspondre au tenseur $\sum_i x_i \otimes y_i$ l'application

$$x \rightsquigarrow \sum_i (x_i, x)_H y_i.$$

On peut donc écrire

$$H \otimes K \subset \mathcal{L}_2(H, K)$$

et on utilise parfois la notation $H \hat{\otimes}_2 K$ au lieu de $\mathcal{L}_2(H, K)$.

$H \hat{\otimes}_2 K$ est dit le "*produit tensoriel hilbertien*" de H et K (ou le "*produit tensoriel d'Hilbert-Schmidt*").

Exemples d'application H - S et de produits tensoriels H - S

Exemple 1 : $H = K = \ell^2$, l'application diagonale $(x_n) \rightsquigarrow (\lambda_n x_n)$, où (λ_n) est une suite de réels, est H - S si et seulement si $(\lambda_n) \in \ell^2$.

Exemple 2 : Soient $(X_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, ($i = 1, 2$), des espaces mesurés σ -finis ; on a :

$$L^2(X_1, \mu_1) \hat{\otimes}_2 L^2(X_2, \mu_2) \simeq L^2(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Donc si

$$u : L^2(X_1, \mu_1) \rightarrow L^2(X_2, \mu_2) \text{ est } H\text{-}S,$$

il existe $f \in L^2(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ telle que :

$$u g(\cdot) = \int_{X_1} f(x_1, \cdot) g(x_1) d\mu_1(x_1), \quad \forall g \in L^2(X_1, \mu_1).$$

Exemple 3 : $L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \hat{\otimes}_2 H = L^2(X, \mathcal{F}, \mu, H)$, $\forall H$ hilbertien.

Indiquons quelques propriétés des opérateurs d'Hilbert-Schmidt :

1) Si $u : H \rightarrow K$ est H - S et si $v : H_1 \rightarrow H$ et $w : K \rightarrow K_1$ sont continues alors : $w \circ u \circ v$ est H - S et

$$\|w \circ u \circ v\|_{H-S} \leq \|w\| \times \|u\|_{H-S} \times \|v\|.$$

2) u est H - S si et seulement si il existe une suite orthonormée (e_n) de H , une suite orthonormée (f_n) de H et $(\lambda_n) \in \ell^2$ telle que

$$u(x) = \sum_n \lambda_n (x, e_n) f_n, \quad \forall x \in H,$$

ce qui s'écrit :

$$u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n,$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{L}_2(H, K)$. On a, en outre,

$$\left(\sum_n |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_2.$$

On peut même supposer que $\lambda_n \geq 0, \quad \forall n$.

3) Si $H = K$ et si u est auto-adjoint, dans la décomposition ci-dessus on peut prendre $e_n = f_n$ (mais pas forcément $\lambda_n \geq 0, \quad \forall n$) :

$$u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n.$$

Les λ_n sont alors les valeurs propres de u et les e_n les vecteurs propres correspondants. Si u est de plus positif, alors $\lambda_n \geq 0, \quad \forall n$.

4) Soit $u : H \rightarrow K$; u est d'Hilbert-Schmidt si et seulement si $u = v \circ w$ où $w : H \rightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint positif de type H - S et $v : H \rightarrow K$ est un opérateur linéaire continu dont la restriction à $\overline{w(H)}$ est un isomorphisme (v est "*partiellement isométrique*"). On a en outre

$$\|u\|_2 = \|w\|_2.$$

En fait il suffit de prendre $w = (u^*u)^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée positive).

Si $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$ avec $\lambda_n \geq 0, \forall n$, les valeurs propres de w sont égales aux (λ_n)

et les vecteurs propres correspondants aux (e_n) .

On dira que $u = v \circ w$ est la “**décomposition polaire de u** ”.

5) $\forall x \otimes y \in H \otimes K$ on a :

$$\|x \otimes y\|_2 = \|x\| \times \|y\|.$$

6) Si (e_α) et (f_β) sont des bases orthonormées de H et K respectivement, alors $(e_\alpha \otimes f_\beta)_{(\alpha,\beta)}$ est une base orthonormée de $H \hat{\otimes}_2 K$. Donc $H \hat{\otimes}_2 K$ est séparable si et seulement si H et K le sont.

2 - Applications nucléaires entre espaces d'Hilbert

Définition : Un opérateur linéaire $u : H \rightarrow K$ (H et K hilbertiens) est dit “**nucléaire**” s'il satisfait les deux conditions suivantes :

a) u est d'Hilbert-Schmidt,

b) dans la décomposition polaire $u = v \circ w$, la somme des valeurs propres (positives) de w est finie.

La condition b) peut être remplacée par la suivante :

b') dans la décomposition $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$, on a : $(\lambda_n) \in \ell^1$.

Si u est nucléaire, l'opérateur auto-adjoint positif w l'est aussi.

Si $u : H \rightarrow H$ est auto-adjoint positif, u est nucléaire si et seulement si $u^{\frac{1}{2}}$ est d'Hilbert-Schmidt.

Il est facile de voir que les conditions suivantes sont nécessaires pour la nucléarité :

1) Il existe une constante $C < \infty$ telle que pour toutes familles $(g_i)_{i \in I}$ de H et $(h_i)_{i \in I}$ de K , orthonormales on a :

$$\sum_i |(u(g_i), h_i)_K| < C.$$

En effet, si $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_i |(u(g_i), h_i)| &= \sum_i \left| \sum_n \lambda_n (e_n, g_i)_H (f_n, h_i)_K \right| \\ &\leq \sum_n |\lambda_n| \sum_i |(e_n, g_i)_H (f_n, h_i)_K| \\ &\leq \sum_n |\lambda_n| \left(\sum_i (e_n, g_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_i (f_n, h_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_n \lambda_n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Il existe une base orthonormée (g_α) de H telle que

$$\sum_\alpha \|u(g_\alpha)\| < \infty.$$

En effet il suffit de considérer la décomposition $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$ et de compléter la famille (e_n) en une base orthonormée de H .

Remarque : $u : H \rightarrow K$ est H - S si et seulement si $\sum_\alpha \|u(e_\alpha)\|^2 < \infty$ pour *toute* base orthonormée de H . Par contre si u est nucléaire, il peut exister des bases orthonormées (e_α) telles que $\sum_\alpha \|u(e_\alpha)\| = +\infty$.

3) Si $H = K$, tout opérateur nucléaire u a une trace.

Cela signifie que pour toute base orthonormée (g_α) de H , la famille $\left((u(g_\alpha), g_\alpha)_H \right)_\alpha$ est sommable et que sa somme est indépendante de la base choisie (sa valeur étant appelée la trace de u).

En effet si $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_\alpha (u(g_\alpha), g_\alpha)_H &= \sum_\alpha \sum_n \lambda_n (e_n, g_\alpha)_H (f_n, g_\alpha)_H \\ &= \sum_n \lambda_n \sum_\alpha (e_n, g_\alpha)_H (f_n, g_\alpha)_H = \sum_n \lambda_n (e_n, f_n). \end{aligned}$$

En particulier si u est auto-adjoint, sa trace est égale à $\sum_n \lambda_n$.

En effet $u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n$ et il suffit alors de compléter (e_n) en une base orthonormée (g_α) .

Chacune des conditions ci-dessus est également suffisante (pour la démonstration voir GELFAND-VILENKIN).

C'est ainsi, en particulier, qu'on démontrera souvent que $u : H \rightarrow H$ linéaire est nucléaire en démontrant que sa trace existe, ou bien que $u : H \rightarrow K$ est nucléaire en démontrant la bornitude des sommes finies $\sum_i |(u(e_i), f_i)|$.

4) Le produit de deux opérateurs d'Hilbert-Schmidt est nucléaire et réciproquement tout opérateur nucléaire est composé de deux opérateurs H - S .

On en déduit facilement, si u et v sont des opérateurs linéaires sur H , de type Hilbert-Schmidt, que :

$$\begin{aligned} (u, v)_{\widehat{H \otimes_2 H}} &= \text{Trace} (v^* \circ u) \\ &= \text{Trace} (u \circ v^*). \end{aligned}$$

5) L'ensemble des opérateurs nucléaires de H dans K est un espace vectoriel (ce qui n'était pas évident a priori).

Cela résulte en effet immédiatement de la propriété 1).

On désignera cet espace par $\widehat{H \otimes_1 K}$ ou $\mathcal{L}_1(H, K)$. Il sera muni de la norme suivante :

$$u \rightsquigarrow \|u\|_1 = \sup \sum_i (u(g_i), h_i)_K ;$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les sous-familles finies $(g_i)_{i \in I}$ et $(h_i)_{i \in I}$ orthonormales dans H et K respectivement. Si u est mis sous la forme $\sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$ on voit facilement que

$$\|u\|_1 = \sum_n |\lambda_n|.$$

$\widehat{H \otimes_1 K}$ est un espace de Banach (pas hilbertien en général) pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Indiquons des propriétés topologiques de $H \hat{\otimes}_1 K$:

• les opérateurs de rang fini de H dans K sont denses dans $H \hat{\otimes}_1 K$ (ce qui justifie la notation $H \hat{\otimes}_1 K$ car $H \otimes K$ est l'ensemble des opérateurs linéaires continus de rang fini).

• $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ sur $H \hat{\otimes}_1 K$ (où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme "uniforme" sur $\mathcal{L}(H, K)$).

• $\|x \otimes y\|_0 = \|x \otimes y\|_2 = \|x \otimes y\|_1 = \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in K.$

• Pour tout $u \in H \hat{\otimes}_1 K$, il existe une décomposition $u = \sum_n x_n \otimes y_n$ (convergence dans $H \hat{\otimes}_1 K$). On a en outre :

$$\|u\|_1 = \inf \left\{ \sum_n \|x_n\| \|y_n\| \right\},$$

l'infimum étant pris sur toutes les décompositions de u sous la forme $u = \sum_n x_n \otimes y_n$.

• Si H et K sont séparables, $H \hat{\otimes}_1 K$ l'est aussi (et réciproquement).

• Si $u \in \mathcal{L}_1(H, K)$, si G et L sont des Hilbert et si $\alpha \in \mathcal{L}(G, H), \beta \in \mathcal{L}(K, L)$, alors

$$\beta \circ u \circ \alpha \in \mathcal{L}_1(G, L) \quad \text{et} \quad \|\beta \circ u \circ \alpha\|_1 \leq \|\beta\| \|u\|_1 \|\alpha\|.$$

Enonçons sous forme de théorème une propriété importante de $H \hat{\otimes}_1 K$.

THEOREME 1 : *A tout élément U de $(H \hat{\otimes}_1 K)'$ correspond un unique élément de $\mathcal{L}(H, K)$ noté u tel que :*

$$(1) \quad U(v) = \text{Trace}(u^*v), \quad \forall v \in \mathcal{L}_1(H, K).$$

Réciproquement tout élément de $\mathcal{L}(H, K)$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{L}_1(H, K)$ par la formule (1).

Démonstration :

Remarquons que u^*v est nucléaire, donc $\text{Trace}(u^*v)$ a un sens. La réciproque est évidente.

Il reste donc à démontrer la partie directe .

Soit $y \in K$, l'application $x \rightsquigarrow x \otimes y$ de H dans $H \hat{\otimes}_1 K$ étant linéaire continue (c'est évident), l'application $x \rightsquigarrow U(x \otimes y)$ est une forme linéaire continue sur H .

Il existe donc un unique élément noté $u^*(y)$ de H tel que

$$U(x \otimes y) = (x, u^*(y))_H, \quad \forall x \in H.$$

L'application $y \rightsquigarrow u^*(y)$ de K dans H est évidemment linéaire continue, donc est la transposée de $u \in \mathcal{L}(H, K)$.

Il reste à démontrer l'égalité (1).

Pour cela il suffit de vérifier cette égalité pour les v de la forme $x_0 \otimes y_0$, c'est à dire des éléments de $\mathcal{L}_1(H, K)$ de la forme $x \rightsquigarrow (x, x_0)_H y_0$. A $u^* \cdot v$ correspond donc l'élément de $\mathcal{L}_1(H, H) : x \rightsquigarrow (x, x_0)_H u^*(y)$ dont la trace est égale à :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (e_{\alpha}, x_0)_H (e_{\alpha}, u^*(y_0))_H &= (x_0, u^*(y_0))_H \\ &= U(x_0 \otimes y_0), \end{aligned}$$

(e_{α}) désignant une base orthonormée de H .

— Q.E.D. —

Corollaire : *Le dual de $H \hat{\otimes}_1 K$ est isomorphe à $\mathcal{L}(H, K)$.*

Démonstration :

On a vu que $(H \hat{\otimes}_1 K)'$ était algébriquement isomorphe à $\mathcal{L}(H, K)$. Il reste à démontrer l'isométrie.

En vertu de $|U(v)| \leq \|u^*\|_0 \|v\|_1$, l'application $U \rightsquigarrow u^*$ est de norme ≤ 1 .

De plus :

$$\|U\|_{(H \hat{\otimes}_1 K)'} \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |U(x \otimes y)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(x, u^*(y))_H| = \|u^*\|.$$

Donc

$$\|U\| = \|u^*\| = \|u\|.$$

— Le Corollaire est démontré. —

Remarque : $H \hat{\otimes}_1 K$, (H et K étant séparables), est ainsi un Banach séparable dont le dual n'est pas séparable (si H et K sont de dimension infinie).

Indiquons maintenant sans démonstration une propriété d'universalité de $H \hat{\otimes}_1 K$.

THEOREME 2 : *Quel que soit le Banach E , l'isomorphisme canonique entre l'espace des applications bilinéaires (pas forcément continues) de $H \times K$ dans E et l'espace des applications linéaires du produit tensoriel algébrique $H \otimes K$ dans E , envoie l'espace des applications bilinéaires continues sur l'espace des applications linéaires continues quand $H \otimes K$ est muni de la norme $\|\bullet\|_1$.*

En particulier si $E = \mathbb{R}$ on retrouve une partie du Théorème 1.

Indiquons sommairement comment l'on définit les applications nucléaires entre Banach (en espérant que nous pourrons les éviter par la suite) :

Soient E et F deux Banach, E' le dual de E et $u : E \rightarrow F$ linéaire continue. On dit que u est "*nucléaire*" s'il existe une suite (x'_n) d'éléments de E' et une suite (y_n) d'éléments de F telles que :

$$1) \|x'_n\|_{E'} \leq M, \forall n \text{ et } \sum_n \|y_n\|_F < \infty,$$

$$2) u(x) = \sum_n x'_n(x)y_n, \forall x \in E$$

$$\text{(ce qui s'écrit encore } u = \sum_n x'_n \otimes y_n \text{).}$$

On désigne par $\mathcal{L}_1(E, F)$ l'ensemble des applications nucléaires de E dans F . C'est un espace vectoriel et la fonction

$$u \rightsquigarrow \|u\|_1 := \inf \sum_n \|x'_n\| \|y_n\|, \quad (u \in \mathcal{L}_1(E, F)),$$

où l'infimum est pris sur toutes les décompositions

$$u = \sum_n x'_n \otimes y_n,$$

est une norme pour laquelle $\mathcal{L}_1(E, F)$ est un Banach.

On note également $E \hat{\otimes}_1 F$ ou $E \hat{\otimes}_K F$ au lieu de $\mathcal{L}_1(E, F)$.

(Dans le cas où $E = H$ et $F = K$ sont des Hilbert on retrouve la définition du début, a condition d'identifier H et son dual).

Revenons maintenant aux espaces d'Hilbert pour donner une dernière définition.

Définition : une forme bilinéaire continue B sur $H \times K$ (H et K Hilbert) est dite "nucléaire" si l'application linéaire \tilde{B} de H dans K qui lui correspond par la formule :

$$B(h, k) = (\tilde{B}(h), k)_K, \quad (h, k) \in H \times K$$

est nucléaire.

Si $H = K$ la trace de B sera, par définition, celle de \tilde{B} et l'on a donc :

$$\text{Trace } B = \sum_n B(e_n, e_n), \quad (e_n) \text{ base orthonormée de } H.$$

Nous aurons par la suite besoin de la propriété suivante dans $\mathcal{L}_1(H, K)$ dont la démonstration peut être trouvée dans GELFAND-VILENKIN :

Propriété : Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}_1(H, K)$ telle que

- $\|u_n\|_1 \leq M, \quad \forall n,$
- pour tout couple $(h, k) \in H \times K$, la suite numérique $n \rightsquigarrow (u_n(h), k)_K$ est convergente.

Il existe alors $u \in \mathcal{L}_1(H, K)$ telle que $\|u\|_1 \leq M$ et pour tout $(h, k) \in H \times K$:

$$(u_n(h), k)_K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u(h), k)_K.$$

Remarque : Les espaces $\mathcal{L}_i(H, K)$, ($i = 1, 2$) ainsi que $\mathcal{L}(H, K)$ ne dépendent que des structures banachiques de H et K et non de leur produit scalaire. Toutefois la norme de $\mathcal{L}_i(H, K)$ dépend des produits scalaires.

Introduisons maintenant une notation .

Soit $w \in \mathcal{L}_i(H, K)$ ($i = 1, 2$) et soient $\alpha : H \rightarrow H_1$ et $\beta : K \rightarrow K_1$ des applications linéaires continues à valeurs dans les Hilbert H_1 et K_1 respectivement. On a vu que

$$\beta \circ w \circ \alpha^* \in \mathcal{L}_i(H_1, K_1)$$

et que

$$\|\beta \circ w \circ \alpha^*\|_i \leq \|\alpha^*\| \times \|w\|_{\mathcal{L}_i(H, K)} \|\beta\|.$$

On a ainsi défini une application linéaire continue de $\mathcal{L}_i(H, K)$ dans $\mathcal{L}_i(H_1, K_1)$, de norme inférieure ou égale à $\|\alpha^*\| \times \|\beta\|$.

Considérant l'isomorphisme $H \hat{\otimes}_i K \rightarrow \mathcal{L}_i(H, K)$, on obtient une application linéaire continue, notée $(\alpha \otimes \beta)^i$:

$$(\alpha \otimes \beta)^i : H \hat{\otimes}_i K \rightarrow H_1 \hat{\otimes}_i K_1, \quad (i = 1, 2).$$

On a évidemment :

$$(\alpha \otimes \beta)^i(x \otimes y) = \alpha(x) \otimes \beta(y), \quad \forall (x, y) \in H \times K.$$

On omet en général l'indice i et on écrit simplement :

$$\alpha \otimes \beta : H \hat{\otimes}_i K \rightarrow H_1 \hat{\otimes}_i K_1.$$

Au lieu de considérer les applications linéaires, on peut considérer les formes bilinéaires associées. Par exemple à $w \in \mathcal{L}_i(H, K)$ correspond $\tilde{w} \in B(H, K)$ par

$$\tilde{w}(x, y) = (w(x), y)_K$$

alors

$$\widetilde{\alpha \otimes \beta}(w)(w_1, y_1) = \tilde{w}(\alpha^* x_1, \beta^* y_1).$$

3 - Mesurabilité

Dans la suite nous aurons à considérer des variables aléatoires ou des processus à valeurs dans $\mathcal{L}_i(H, K)$, ainsi aurons nous besoin de résultats de mesurabilité que nous allons établir.

Dans toute la suite le fait que les Hilbert soient séparables est essentiel .

Proposition 1 : *Soient H et G deux Hilbert (séparables). Sur $\mathcal{L}_2(H, G)$ les tribus qui suivent coïncident :*

- la tribu borélienne \mathcal{B}_1
- la tribu rendant mesurables les applications $u \rightsquigarrow u(h)$ de $\mathcal{L}_2(H, G)$ dans G ($h \in H$), soit \mathcal{B}_2 .

Démonstration :

Puisque pour tout $h \in H$, $u \rightsquigarrow u(h)$ est continue on a évidemment : $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$.

Puisque tout ouvert de $\mathcal{L}_2(H, G)$ est réunion d'une famille dénombrable de boules, ($\mathcal{L}_2(H, G)$ étant métrisable et séparable), il suffit de démontrer que toute boule de $\mathcal{L}_2(H, G)$ appartient à \mathcal{B}_2 .

Or c'est évident car si $u_0 \in \mathcal{L}_2(H, G)$ et $a \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ u \in \mathcal{L}_2(H, G), \quad \|u - u_0\|_2 \leq a \right\} \\ & = \left\{ u, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \|(u - u_0)(e_i)\|^2 \leq a^2 \right\} \end{aligned}$$

où (e_i) est une base orthonormée de H .

Ce dernier ensemble appartient évidemment à \mathcal{B}_2 .

— Q.E.D. —

Remarque : On aurait pu démontrer autrement la Proposition 1, avec une démonstration valable aussi pour $\mathcal{L}_1(H, G)$, comme suit :

Soit (h_n) un ensemble dénombrable dense dans H , les fonctions $u \rightsquigarrow u(h_n) = \Phi_n(u)$ sur $\mathcal{L}_i(H, G)$ séparent les points de $\mathcal{L}_i(H, G)$. Donc la tribu rendant mesurables les Φ_n coïncide avec la tribu borélienne, $\mathcal{L}_i(H, G)$ étant polonais.

Proposition 2 : Soient H et G deux Hilbert séparables, (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. Soit de plus $X : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H, G)$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_2(H, H)$. On suppose que :

- Pour tout $h \in H$, l'application $\omega \rightsquigarrow X(\omega)(h)$ de Ω dans G est mesurable (donc fortement mesurable car G est séparable),

- Y est mesurable (donc fortement mesurable).

Alors $\omega \rightsquigarrow X(\omega)(Y(\omega))$ est mesurable de Ω dans $\mathcal{L}_2(H, G)$.

Démonstration :

D'après la Proposition 1, il suffit de démontrer que pour tout $h \in H$, l'application :

$$\omega \rightsquigarrow X(\omega) \circ Y(\omega)(h) \quad \text{de } \Omega \text{ dans } G \text{ est mesurable,}$$

ou encore que pour tout $g \in G$:

$$\omega \rightsquigarrow (X(\omega) \circ Y(\omega)(h), g)_G \quad \text{est mesurable de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Mais

$$(X(\omega) \circ Y(\omega)h, g)_G = (Y(\omega)h, X^*(\omega)g)_H.$$

Supposons d'abord Y de la forme

$$\sum_{i=1}^k 1_{F_i} a_i, \quad (a_i \in \mathcal{L}_2(H, H), F_i \in \mathcal{F}),$$

alors :

$$(Y(\omega)h, X^*(\omega)g)_H = \sum_{i=1}^k 1_{F_i} (a_i(h), X^*(\omega)g)_H$$

et le résultat est démontré car pour tout $g \in G$, $\omega \rightsquigarrow X^*(\omega)g$ est mesurable.

Le cas général s'en déduit par approximation et passage à la limite.

— Q.E.D. —

La Proposition 2 s'applique en particulier si X est borélienne ou fortement mesurable. L'espace $\mathcal{L}(H, G)$ n'étant pas, en général, séparable, la première condition de la Proposition 2 est moins forte que la mesurabilité-Borel (ou forte).

On aurait pu démontrer la Proposition 2 en démontrant que : pour tout $u \in \mathcal{L}_2(H, G)$ la fonction :

$$\omega \rightsquigarrow \text{Trace} (u^* \circ X(\omega) \circ Y(\omega)) \text{ est mesurable ;}$$

c'est à dire que, en prenant une base orthonormée (e_n) :

$$\omega \rightsquigarrow \sum_n (u^* \circ X(\omega) \circ Y(\omega), e_n)_H \text{ est mesurable.}$$

Cela se fait par approximation, comme dans la démonstration de la Proposition 2.

THEOREME 3 : Soit H un Hilbert séparable et $\mathcal{L}_i^+(H)$, $(i = 1, 2)$, le sous-ensemble de $\mathcal{L}_i(H, H)$ formé des opérateurs auto-adjoints positifs. On le munit de la topologie induite. Alors l'application $u \rightsquigarrow u^{\frac{1}{2}}$ de $\mathcal{L}_1^+(H)$ sur $\mathcal{L}_2^+(H)$ est borélienne.

Démonstration :

$\mathcal{L}_i^+(H)$ est polonais, puisque sous-ensemble fermé d'un polonais.

L'application $u \rightsquigarrow u^2$ de $\mathcal{L}_2^+(H)$ dans $\mathcal{L}_1^+(H)$ est continue bijective, donc transforme tout borélien de $\mathcal{L}_1^+(H)$ en un borélien de $\mathcal{L}_2^+(H)$.

Donc son inverse : $v \rightsquigarrow v^{\frac{1}{2}}$ est borélienne de \mathcal{L}_1^+ sur \mathcal{L}_2^+ .

— Q.E.D. —

Corollaire : Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et soit $\mathcal{L} : X \rightarrow \mathcal{L}_1^+(H)$ borélienne. Alors $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} : (X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}_2^+(H)$ est borélienne.

Ce corollaire sera utilisé un peu plus loin quand on étudiera l'intégration stochastique par rapport à une martingale hilbertienne.

Pour le prochain résultat nous aurons besoin des résultats préliminaires suivants :

- Si H est un Hilbert séparable, on peut munir l'ensemble de ses bases orthonormées d'une structure d'espace polonais.

En effet c'est un sous-espace *fermé* du produit H^I (où I est un ensemble qui a même cardinal qu'une base orthonormée de H). Muni de la topologie induite c'est un espace polonais. On peut donc définir une application borélienne d'un espace mesurable dans l'ensemble des bases orthonormées de H .

- Soient F et F' des espaces métrisables séparables, F étant de plus supposé lusinien. Soit π une application borélienne de F dans F' .

On suppose que pour tout $y \in F'$, $\pi^{-1}(\{y\})$ est compact.

Il existe une application borélienne f de F' dans F telle que

$$\pi \circ f = Id(F').$$

(Voir DELLACHERIE-MEYER, Vol.I, pages 78 et suivantes).

- Si H est un Hilbert et $u : H \rightarrow H$ linéaire, auto-adjoint compact et positif, alors si λ est une valeur propre > 0 , le sous-espace propre correspondant H_λ est de dimension finie. De plus on a :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} (u(x), x)_H = \lambda_1(u)$$

où $\lambda_1(u)$ est la plus grande valeur propre de u .

Cela étant, soit C l'ensemble des opérateurs linéaires compacts positifs de H dans lui-même, muni de la topologie induite par $\mathcal{L}(H, H) : C$ est un espace polonais. Par conséquent $C^* = C \setminus \{0\}$ est un espace métrisable séparable souslinien.

Le théorème suivant (dû à P.A.MEYER) dit qu'à tout élément u de C on peut associer, de façon mesurable, une base orthonormée, $(e_n(u))_n$, par rapport à laquelle u se met sous forme diagonale.

Plus précisément :

THEOREME 4 : Soit H un Hilbert séparable. Il existe une application borélienne $u \rightsquigarrow (e_i(u))_{i \in I}$ de C dans H^I telle que :

(i) $(e_i(u))_{i \in I}$ est une base orthonormée de H .

(ii) $\forall x, \forall u : u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(u) (x, e_i(u))_H e_i(u)$, où les $\lambda_i(u)$ sont des reels ≥ 0 .

Démonstration :

Supposons, pour fixer les idées, que H est de dimension infinie et $I = \mathbb{N}$ (le cas de la dimension finie étant analogue et d'ailleurs plus simple).

Soit Σ_1 la sphère unité de H : c'est un espace polonais muni de la topologie induite, donc $C \times \Sigma_1$ est également un espace polonais.

Soit Φ la fonction de $C \times \Sigma_1$ dans H définie par :

$$\begin{aligned} (u, x) \rightsquigarrow \Phi(u, x) &= u(x) - \|u\| x \\ &= u(x) - \lambda_1(u)x, \end{aligned}$$

Φ est évidemment continue.

Donc $B_1 = \Phi^{-1}(0)$ est un fermé de $C \times \Sigma_1$, donc un borélien. Alors $B'_1 = B_1 \setminus (\{0\} \times \Sigma_1)$ est un espace métrisable séparable lusinien.

Soit π l'application canonique $(u, x) \rightsquigarrow u$ de B_1 dans Σ_1 : elle est borélienne car continue. En outre $\pi^{-1}(u)$ est la sphère unité du sous-espace propre correspondant à la plus grande valeur propre $\lambda_1(u)$ de u : c'est donc un compact de B_1 si $u \neq 0$.

D'après le résultat qui vient d'être rappelé il existe une application borélienne $u \rightsquigarrow \varepsilon'_1(u)$ de C^* dans Σ_1 où chaque $\varepsilon'_1(u)$ est un vecteur propre normalisé de u correspondant à $\lambda_1(u)$. On définit ε_1 comme application de u dans H telle que

$$\varepsilon_1(u) = \begin{cases} \varepsilon'_1(u) & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

ε_1 est borélienne de C dans Σ_1 .

Soit alors $W(u)$ le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace engendré par $\varepsilon_1(u)$. Alors $u \rightsquigarrow W(u)$ est **borélienne**, donc aussi $u \rightsquigarrow V(u) := u - W(u)$, et $V(u)$ et u ont même restriction à $(\varepsilon_1(u))^\perp$.

Donc :

$$\lambda_2(u) = \|V(u)\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \varepsilon_1(u)}} (u(x), x) \text{ est borélienne.}$$

Soit

$$B_2 = \left\{ (u, x) \in C \times \Sigma_1, \quad u(x) = \lambda_2(u)x, \quad x \perp \varepsilon_1(u) \right\},$$

B_2 est borélien car

$$B_2 = \left\{ (u, x), u(x) = \lambda_2(u)x \right\} \cap \left\{ (u, x), (x, \varepsilon_1(u))_H = 0 \right\}$$

et ces deux ensembles sont boréliens comme on le voit facilement.

$\lambda_2(u)$ est la "seconde" valeur propre de u (éventuellement égale à $\lambda_1(u)$) et si $\lambda_2(u) \neq 0$, la coupe de B_2 par u est la sphère unité du sous-espace propre de u correspondant à $\lambda_2(u)$: c'est donc un compact.

Par le même raisonnement que plus haut : il existe $\varepsilon'_2(u)$ borélienne de $\{u, \lambda_2(u) \neq 0\}$ dans Σ_1 telle que $(u, \varepsilon'_2(u)) \in B_2$, pour tout u tel que $\lambda_2(u) \neq 0$.

Posons pour $u \in C$:

$$\varepsilon_2(u) = \begin{cases} \varepsilon'_2(u) & \text{si } \lambda_2(u) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_2(u) = 0 \end{cases}$$

Il est clair que si

$$\lambda_2(u) > 0, \text{ (donc } \lambda_1(u) > 0),$$

alors :

$$\varepsilon_1(u) \text{ et } \varepsilon_2(u) \text{ forment un système orthonormé.}$$

Ayant défini $\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)$ et $\varepsilon_1(u), \dots, \varepsilon_n(u)$, on peut définir $u \rightsquigarrow \lambda_{n+1}(u)$ borélienne par :

$$\lambda_{n+1}(u) = \sup \left\{ (u(x), x)_H, \right. \\ \left. x \perp \text{ev}(\varepsilon_1(u), \dots, \varepsilon_n(u)) \right\}$$

et $\varepsilon_{n+1}(u)$ comme une coupe borélienne de

$$B_{n+1} = \left\{ (u, x), \quad u \in C; \|x\| = 1, \quad x \perp \text{ev}(\varepsilon_1(u), \dots, \varepsilon_n(u)) \right\}.$$

On obtient donc une famille orthonormée mesurable $u \rightsquigarrow (\varepsilon_n(u))_{n \geq 1}$ et l'on a

$$u(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(u) (x, \varepsilon_n(u)) \varepsilon_n(u)$$

(les λ_n sont les valeurs propres non nulles de u , les $\varepsilon_n(u)$ sont des vecteurs propres correspondants ; les λ_n ne sont pas forcément tous différents).

Soit maintenant (e_n) une base orthonormée fixée quelconque. Si K_u désigne le sous-espace vectoriel fermé engendré par des $\varepsilon_i(u)$, en appliquant le système d'orthonormalisation de Schmidt à la suite suivante :

$$\{\varepsilon_n(u), \quad n \geq 1\} \cup \{\text{proj}_{K_u}(e_k)\},$$

on obtient une base orthonormée possédant les propriétés requises.

— Q.E.D. —

Ceci peut encore s'exprimer d'une autre manière :

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base fixée de H . Pour $u \in C$ soit T_u l'application unitaire de H dans H qui à chaque e_n associe l'élément $e_n(u)$ de la base définie dans le Théorème 4. L'application $T_u^{-1} \circ u \circ T_u$ est alors diagonale dans la base (e_n) . En outre les applications $u \rightsquigarrow T_u^{-1} \circ u$ et $u \rightsquigarrow u \circ T_u$ sont boréliennes de C dans C .

Finissons par une simple remarque qui a néanmoins son utilité :

Si H, G, K sont des Hilbert, on a l'isomorphisme :

$$H \hat{\otimes}_2 (G \hat{\otimes}_2 K) \simeq (H \hat{\otimes}_2 G) \hat{\otimes}_2 K.$$

On en déduit que

$$L^2(\Omega, H) \hat{\otimes}_2 K \simeq L^2(\Omega, H \hat{\otimes}_2 K).$$

CHAPITRE DEUX

Martingales hilbertiennes

Dans ce chapitre on se donnera une base de processus : $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ avec $\mathbb{T} = [0, t_m]$, t_m étant fini ou bien $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, satisfaisant aux *conditions usuelles* c'est à dire :

- les (\mathcal{F}_t) forment une famille croissante et continue à droite de sous-tribus de la tribu \mathcal{A} sur laquelle P est définie,
- les \mathcal{F}_t contiennent tous les ensembles P -négligeables de la tribu complétée de $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$.

De plus, tous les espaces d'Hilbert que nous aurons à considérer seront supposés séparables, sauf mention expresse du contraire, ce qui permettra de confondre les notions de mesurabilité faible, forte ou "abstraite".

1 - Martingales hilbertiennes

Définition 1 : Soit H un Hilbert. Un processus $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ basé sur $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\mathcal{F}_t))$, est dit "*martingale à valeur dans H* " si

- (i) : $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P, H)$ et M_t est \mathcal{F}_t -adapté pour tout $t \in \mathbb{T}$,
- (ii) : pour tout $(s, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ tel que $s \leq t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$ on a :

$$\int_A M_s dP = \int_A M_t dP.$$

Remarque : La Définition 1 garde un sens même si H n'est pas séparable. On peut également remplacer H par un Banach, ou même un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quelconque E , à condition d'avoir défini $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P, E)$ et $\int_A M_s dP$.

Dans la Définition 1 on peut remplacer la condition (ii) par :

- (ii') : Si D est un sous-ensemble total de H , on a :

$$\forall s \leq t, \forall A \in \mathcal{F}_s \text{ et } \forall h \in D, \quad \int_A (M_s, h)_H dP = \int_A (M_t, h)_H dP$$

et dans le cas des martingales banachiques à valeurs dans B par :

(ii) : pour tout x' dans un sous-ensemble du dual B' de B , total pour $\sigma(B', B)$ on a :

$$\forall s \leq t, \forall A \in \mathcal{F}_s, \int_A x'(M_t) dP = \int_A x'(M_s) dP.$$

En particulier en prenant pour D un ensemble dénombrable dense dans la boule unité, la donnée de la martingale (M_t) à valeurs dans H , équivaut à la donnée d'une famille $(M_t^h) = (M_t, h)_H$ de martingales réelles telles que pour tout t :

$$\sup_{h \in D} |M_t^h| \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

Définition 2 : La martingale hilbertienne (M_t) est dite

- " L^2 -martingale" si $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P, H) \quad \forall t \in \mathbb{T}$,
- "*martingale de carré intégrable*" si $\sup_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{E}\{\|M_t\|^2\} < \infty$.

Si (e_n) est une base orthonormée de H , on voit immédiatement que :

• la donnée d'une L^2 -martingale équivaut à la donnée d'une suite $(M^n)_n$ de martingales réelles telle que $\sum_n (M_t^n)^2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout t .

Alors que :

• la donnée d'une martingale à valeurs dans H équivaut à celle d'une suite de martingales réelles telle que $\left(\sum_n (M_t^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout t .

(Prendre $M_t^n = (M_t, e_n)_H$).

Cela nous permettra de nous raccrocher au maximum à la théorie des martingales réelles et d'arriver plus rapidement aux résultats qui nous intéressent.

Soit donc (M_t) une L^2 -martingale à valeurs dans H . Alors $\|M_t\|_H^2 = \sum_n (M_t^n)^2$ est une sous-martingale et de ce fait admet une version càdlàg. Nous allons voir qu'il en est de même pour la martingale (M_t) .

THEOREME 1 : Toute L^2 -martingale hilbertienne admet une modification càdlàg.

Démonstration :

Il suffit évidemment de démontrer le résultat pour $\mathbb{T} = [0, T]$.

Soit D un ensemble dénombrable dense de $[0, T]$ et soit $\varphi \in H$. Il est bien connu que (Inégalité de DOOB) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{t \in D} (M_t, \varphi)_H^2 \right\} &\leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ (M_t, \varphi)_H^2 \right\} \\ &\leq 4 \mathbb{E} \left\{ (M_T, \varphi)_H^2 \right\}. \end{aligned}$$

Donc si (e_n) désigne une base orthonormée de H :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in D} (M_t, e_n)_H^2 \right\} \leq 4 \mathbb{E} \left\{ \|M_T\|_H^2 \right\}.$$

Il existe donc $\Omega_1 \in \mathcal{A}$, tel que $P(\Omega_1) = 1$ et que :

$$\forall \omega \in \Omega_1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in D} (M_t(\omega), e_n)_H^2 < \infty$$

Maintenant chaque martingale $(M_t^n)_{t \in [0, T]}$ admet une modification càdlàg, notée $(\widetilde{M}_t^n)_{t \in [0, T]}$.

Il existe donc Ω_2 avec $P(\Omega_2) = 1$ tel que si $\omega \in \Omega_2$ alors :

$$M_t^n(\omega) = \widetilde{M}_t^n(\omega), \quad \forall n, \forall t \in D.$$

Posons $\widetilde{M}_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} M_t^n(\omega) e_n$ quand cette série converge (dans H) (et zéro autrement).

Si $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, on a évidemment :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in D} |\widetilde{M}_t^n(\omega)|^2 < \infty$$

donc, puisque les \widetilde{M}^n sont càdlàg :

$$\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{T}} |\widetilde{M}_t^n(\omega)|^2 < \infty.$$

Alors la série qui figure dans le second membre de la définition de \widetilde{M}_t converge quel que soit t si $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Je dis que \widetilde{M}_t est càdlàg.

En effet, soit $(s, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, alors :

$$|\widetilde{M}_t^n(\omega) - \widetilde{M}_s^n(\omega)|^2 \leq 4 \sup_{u \in \mathbb{T}} |\widetilde{M}_u^n(\omega)|^2.$$

Donc si $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ la suite numérique : $(|\widetilde{M}_t^n(\omega) - \widetilde{M}_s^n(\omega)|)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à ℓ^2 , et est majorée par la suite de ℓ^2 : $(2 \sup_{u \in \mathbb{T}} |\widetilde{M}_u^n(\omega)|)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que si $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \liminf_{s \downarrow t} \|\widetilde{M}_t(\omega) - \widetilde{M}_s(\omega)\|^2 &= \liminf_{s \downarrow t} \sum_{n=0}^{\infty} |\widetilde{M}_t^n(\omega) - \widetilde{M}_s^n(\omega)|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{s \downarrow t} |\widetilde{M}_t^n(\omega) - \widetilde{M}_s^n(\omega)|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Cette dernière égalité, par le Théorème de Lebesgue appliqué à l'espace ℓ^2).

On a donc démontré la continuité à droite. On démontrerait de la même façon l'existence de limites à gauche.

Enfin il est clair que $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t)$ est une modification de $(M_t)_t$.

— Q.E.D. —

THEOREME 2 : *Toute martingale de carré intégrable est convergente.*

Démonstration :

$\|M\|^2 = (\|M_t\|^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale telle que

$$\sup_t E\{\|M_t\|^2\} < \infty.$$

Donc elle converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire notée N_∞ :

$$\|M_t\|^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} N_\infty.$$

Maintenant :

$$\mathbb{E}\{\|M_t - M_s\|^2\} = \mathbb{E}\{\|M_t\|^2\} - \mathbb{E}\{\|M_s\|^2\},$$

car (M_t) est une martingale, donc la famille $t \rightsquigarrow M_t$ d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P, H)$ est de Cauchy, suivant le filtre de voisinages de ∞ , et elle converge vers M_∞ .

Il est clair en outre que

$$M_t = \mathbb{E}\{N_\infty | \mathcal{F}_t\}.$$

— Q.E.D. —

A partir de là, les notions et résultats de la théorie des martingales réelles de carré intégrable se recopient presque mot pour mot, ainsi que les démonstrations.

(a) On désigne par $\mathcal{M}_\infty^2(H)$ l'espace vectoriel des martingales à valeurs dans H , de carré intégrable, *nulles en zéro pour simplifier*, muni du produit scalaire suivant :
Si $M = (M_t)$ et $N = (N_t)$ appartient à $\mathcal{M}_\infty^2(H)$ on pose :

$$(M | N) = \mathbb{E}\{(M_\infty, N_\infty)_H\}, \text{ si } M_t \longrightarrow M_\infty \text{ et } N_t \longrightarrow N_\infty.$$

C'est un espace d'Hilbert.

On définit par ce produit scalaire l'orthogonalité des martingales de $\mathcal{M}_\infty^2(H)$.

(b) L'espace $\mathcal{M}_\infty^{2,c}(H)$ des martingales continues est un sous-espace fermé de $\mathcal{M}_\infty^2(H)$.

(c) Si $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de martingales de carré intégrable convergeant vers N dans $\mathcal{M}_\infty^2(H)$, il existe une sous-suite (M^{n_k}) convergeant presque sûrement vers N , uniformément en t .

(d) On désigne par $\mathcal{M}^2(H)$ l'espace des L^2 -martingales à valeurs dans H . On le munit d'une structure d'espace de Fréchet au moyen de la famille dénombrable de norme :

$$\|M\|_n^2 = \mathbb{E}\{\|M_n\|^2\}$$

(e) Si $\mathcal{G} = \sigma\{M_t, t \in \mathbb{T}\}$ on a une isométrie de $\mathcal{M}_\infty^2(H)$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, H)$. D'ou l'on déduit :

$$\mathcal{M}_\infty^2(H) \simeq \mathcal{M}_\infty^2(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_2 H$$

et

$$\mathcal{M}_\infty^2(H) \hat{\otimes}_2 K \simeq \mathcal{M}_\infty^2(H \hat{\otimes}_2 K), \text{ si } K \text{ est un autre Hilbert.}$$

2 - Les processus croissants associés à une L^2 -martingale hilbertienne

Définition : Soit (M_t) une L^2 -martingale à valeur dans l'Hilbert H . On appelle "**processus croissant scalaire**" associé à (M_t) , le processus croissant prévisible associé à la sous-martingale $(\|M_t\|^2)$.

On notera par $\langle M \rangle$ ce processus. C'est donc l'unique (à une indistinguabilité près, naturellement) processus croissant prévisible tel que $\|M\|^2 - \langle M \rangle$ soit une martingale nulle en zéro.

Si la martingale est représentée, comme on l'a dit plus haut, par la suite de martingales réelles $M^n = (M, e_n)_H$ on a évidemment :

$$\langle M \rangle_t = \sum_n \langle M^n \rangle_t \text{ converge p.s. et dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

Il est clair que pour tout $t > s$:

$$\mathbb{E} \{ \|M_t - M_s\|^2 | \mathcal{F}_s \} = \mathbb{E} \{ \|M_t\|^2 - \|M_s\|^2 | \mathcal{F}_s \} = \mathbb{E} \{ \langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s | \mathcal{F}_s \}.$$

Remarque : La définition du processus croissant peut, a priori, être généralisée en considérant une martingale à valeurs dans un Banach E et une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ convexe semi-continue inférieurement (par exemple la norme).

En effet si $(M_t)_t$ est une martingale à valeurs dans E , alors $(g(M_t))_t$ est une sous-martingale réelle dont on peut considérer le processus croissant $\langle M \rangle_t^g$, si $g(M_t)$ est intégrable pour tout t . Toutefois la relation, qui est très importante pour la suite :

$$\mathbb{E} \{ g(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s \} = \mathbb{E} \{ \langle M \rangle_t^g - \langle M \rangle_s^g | \mathcal{F}_s \}$$

n'a pas lieu en général (même si E est un Hilbert et g désigne la norme).

Maintenant, comme dans le cas réel, on peut définir le "**crochet oblique**" de deux L^2 -martingales à valeurs **dans le même Hilbert** :

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t)$$

(donc $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle$).

Si l'on considère le processus réel $t \rightsquigarrow (M_t, N_t)_H$, dont on voit immédiatement que c'est une semi-martingale, $\langle M, N \rangle$ est son crochet oblique. **Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :**

1) Pour tout $x \in H$ et $t \geq s$ on a :

$$\langle (x, M) \rangle_s^t \leq \|x\|^2 \langle M \rangle_s^t$$

(avec $\langle (x, M) \rangle_s^t = \langle (x, M) \rangle_t - \langle (x, M) \rangle_s$, notation analogue pour $\langle M \rangle_s^t$).

C'est immédiat en écrivant :

$$(x, M_t - M_s)_H = \sum_n x_n (M_t^n - M_s^n)$$

et en remarquant que chaque martingale

$$(M_t^n - M_s^n), (t \geq s)$$

a pour crochet oblique : $\langle M^n \rangle_s^t$.

2) Il existe un sous-ensemble négligeable $\Omega' \subset \Omega$ tel que pour tout $\omega \notin \Omega'$ et tout couple (s, t) tel que $s \leq t$ on ait

$$|\langle M, N \rangle_s^t(\omega)| \leq \left(\langle M \rangle_s^t(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N \rangle_s^t(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(On pose $\langle M, N \rangle_s^t = \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s$...)

Là encore c'est immédiat en remarquant que :

$$\langle M, N \rangle_s^t = \sum \langle M^n, N^n \rangle_s^t$$

et en utilisant le résultat correspondant, déjà démontré pour les martingales réelles.

3) Il existe un sous-ensemble négligeable $\Omega' \subset \Omega$ telles que pour tout $\omega \notin \Omega'$ et pour toutes fonctions h, k boréliennes sur \mathbb{R} on ait :

$$\int |h(t)k(t)| d|\langle M, N \rangle_t|(\omega) \leq \left(\int h^2 d\langle M \rangle_t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int k^2 d\langle N \rangle_t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On se référera à 2) ou 3) sous le nom générique "**d'inégalité de Kunita-Watanabé**".

4) Si M et N sont des L^2 -martingales à valeurs respectivement dans les Hilbert H et K et si $(x, y) \in H \times K$ on a :

$$|\langle (x, M)_H, (y, N)_K \rangle_t| \leq \|x\|_H \times \|y\|_K \langle M \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle N \rangle_t^{\frac{1}{2}}$$

pour tout t et tout ω en dehors d'un ensemble négligeable, autrement dit en dehors d'un ensemble évanescent (qui peut d'ailleurs dépendre de (x, y)).

C'est immédiat en remarquant que

$$(x, M_t)_H (y, N_t)_K = \sum_{m,n} x^m M_t^m y^n N_t^n$$

avec

$$x^m = (x, e_m) \quad M_t^m = (M_t, e_m) \quad \text{et } (e_m) \text{ base orthonormée.}$$

On va maintenant définir le correspondant tensoriel du processus croissant scalaire.

Le résultat fondamental est le suivant :

THEOREME 3 : *Soient M et N deux L^2 -martingales à valeurs respectivement dans les Hilbert H et K . Il existe un unique (à l'indistinguabilité près) processus prévisible à valeurs dans $H \hat{\otimes}_1 K$, noté $(\ll M, N \gg)_t$ tel que :*

- (i) : $M \otimes N - \ll M, N \gg$ est une \mathcal{F}_t -martingale à valeurs dans $H \hat{\otimes}_1 K$, nulle en zéro.
- (ii) : Pour presque tout ω , $t \mapsto \ll M, N \gg_t(\omega)$ est à variation bornée sur tout intervalle $[0, u]$ contenu dans \mathbb{T} , en tant que fonction à valeurs dans le Banach $H \hat{\otimes}_1 K$.

Démonstration :

Pour tout $(x, y) \in H \times K$ on notera $B_t(x, y)(\omega)$ le crochet oblique des martingales $(x, M)_H$ et $(y, N)_K$.

Soit D (resp. E) un sous-ensemble dénombrable, dense, de H (resp. K) qui soit un \mathbb{Q} -espace vectoriel. Il résulte de la propriété 4) qu'en dehors d'un ensemble négligeable on a :

$$(A) \quad |B_t(x, y)(\omega)| \leq \langle M \rangle_t^{\frac{1}{2}}(\omega) \langle N \rangle_t^{\frac{1}{2}}(\omega) \|x\| \|y\|, \quad \forall (x, y) \in D \times E, \quad \forall t.$$

On peut également supposer que, sauf sur un ensemble négligeable de ω , pour tout t , l'application : $(x, y) \rightsquigarrow B_t(x, y)(\omega)$ définie sur $D \times E$, est \mathbb{Q} -bilinéaire.

Donc en définitive, pour presque tout ω et tout t elle est \mathbb{Q} -bilinéaire et continue, grâce à (A), sur $D \times E$ muni de la topologie induite par $H \times K$. Elle admet donc un unique prolongement, \mathbb{Q} -bilinéaire continu, à $H \times K$. On notera encore par $B_t(\cdot, \cdot)(\omega)$ ce prolongement.

On prolonge alors à $\mathbb{T} \times \Omega$ l'application bilinéaire ci-dessus en posant

$$B_t(\cdot, \cdot)(\omega) = 0, \quad \text{si } \omega \notin \Omega'$$

(où Ω' est l'ensemble des ω pour lesquels $B_t(\cdot, \cdot)(\omega)$ est bilinéaire continue) et on désignera encore par B ce prolongement à $\mathbb{T} \times \Omega$.

Finalement on a construit une application de $\mathbb{T} \times \Omega$ dans $B(H \times K) \simeq \mathcal{L}(H, K)$ telle que, pour tout $(x, y) \in H \times K$:

$$(t, \omega) \rightsquigarrow B_t(x, y)(\omega) \quad \text{est prévisible.}$$

(Cela ne signifie pas que l'application $(t, \omega) \rightsquigarrow B_t(\cdot, \cdot)(\omega)$ de $\mathbb{T} \times \Omega$ dans $\mathcal{L}(H, K)$ est prévisible, mais seulement scalairement prévisible, car $\mathcal{L}(H, K)$ n'est pas séparable en général).

Je dis maintenant que, pour tout (t, ω) , $B_t(\cdot, \cdot)(\omega)$ est *nucléaire*.

C'est en effet évident si elle est nulle. Sinon, soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthonormale finie de H et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une autre de K , alors :

$$\begin{aligned} \sum_i |B_t(e_i, f_i)(\omega)| &= \sum_i |\langle (M, e_i)_H, (N, f_i)_K \rangle| \\ &\leq \sum_i \langle (M, e_i)_H \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle (N, f_i)_K \rangle_t^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \text{(par l'inégalité de Kunita-Watanabé)} \\ &\leq \left(\sum_i \langle (M, e_i)_H \rangle_t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \langle (N, f_i)_K \rangle_t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \langle M \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle N \rangle_t^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

Donc $(t, \omega) \rightsquigarrow B_t(\cdot, \cdot)(\omega)$ est une application à valeurs dans $H \hat{\otimes}_1 K$, scalairement prévisible, donc fortement prévisible ($H \hat{\otimes}_1 K$ étant séparable).

De plus on a démontré que la norme nucléaire de B_t est inférieure à $\langle M \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle N \rangle_t^{\frac{1}{2}}$.

Il reste donc à démontrer l'assertion relative à la variation bornée, c'est à dire :
si $u \in \mathbf{T}, u < \infty$ alors :

$$\sup \left\{ \sum \|B_{t_{i+1}}(\cdot, \cdot)(\omega) - B_{t_i}(\cdot, \cdot)(\omega)\|_{H \hat{\otimes}_1 K} \right\} < \infty,$$

le supremum étant pris sur toutes les décompositions finies

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = u.$$

En fait, comme plus haut on voit facilement que ,
si $t \geq s$ alors :

$$\|B_t(\cdot, \cdot)(\omega) - B_s(\cdot, \cdot)(\omega)\|_{H \hat{\otimes}_1 K} \leq \left(\langle M \rangle_s^t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N \rangle_s^t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_i \|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\|_{H \hat{\otimes}_1 K} &\leq \sum_i \left(\langle M \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_i \langle M \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \langle N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\langle M \rangle_0^u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N \rangle_0^u\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin l'unicité se déduit trivialement du résultat correspondant dans le cas scalaire.

— Q.E.D. —

Remarque : Si $H = K$ on a :

$$\text{Trace} (\ll M, N \gg) = \langle M, N \rangle.$$

En effet si (e_n) est une base orthonormée de H , alors :

$$\begin{aligned} \text{Trace} (\ll M, N \gg_t) &= \sum \ll M, N \gg_t (e_n, e_n) \\ &= \sum_n \langle (M; e_n), (N; e_n) \rangle_t \\ &= \langle M, N \rangle_t \end{aligned}$$

Si $M = N$ (donc $H = K$) on note $\ll M \gg$ au lieu de $\ll M, M \gg$. Alors $\ll M \gg$ possède les propriétés suivantes :

- $\ll M \gg_t$ définit un opérateur hermitien positif quel que soit t ,
- le processus $\ll M \gg$ à valeur dans $\mathcal{L}_1(H)$ est croissant :
c'est à dire $\ll M \gg_t - \ll M \gg_s$ est hermitien positif si $t \geq s$.

Définition : $\ll M \gg$ est appelé le “processus naturel croissant tensoriel” associé à la L^2 -martingale M .

(Si $H = \mathbb{R}$ on a évidemment $\ll M \gg = \langle M \rangle$).

Corollaire : Avec les notations du Théorème 3, l'application de $\mathcal{M}_\infty^2(H) \times \mathcal{M}_\infty^2(K)$ dans $L^1(\Omega, H \hat{\otimes}_1 K)$:

$$(M, N) \rightsquigarrow M_t \otimes N_t - \ll M, N \gg_t$$

est continue pour tout t .

Démonstration :

En effet :

$$\|M_t \otimes N_t\|_{H \hat{\otimes}_1 K} = \|M_t\|_H \times \|N_t\|_K$$

Donc d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \|M_t \otimes N_t\|_{H \hat{\otimes}_1 K} \right\} &\leq \mathbb{E} \left\{ \|M_t\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \mathbb{E} \left\{ \|N_t\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|M\|_{\mathcal{M}_\infty^2} \times \|N\|_{\mathcal{M}_\infty^2} ; \end{aligned}$$

d'autre part, du fait que

$$\| \ll M, N \gg_t \|_{H \hat{\otimes}_1 K} \leq \langle M \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle N \rangle_t^{\frac{1}{2}},$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \| \ll M, N \gg_t \|_{H \hat{\otimes}_1 K} \right\} &\leq \mathbb{E} \left\{ \langle M \rangle_t \right\}^{\frac{1}{2}} \times \mathbb{E} \left\{ \langle N \rangle_t \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|M\|_{\mathcal{M}_\infty^2} \times \|N\|_{\mathcal{M}_\infty^2}. \end{aligned}$$

— D'où le résultat. —

Maintenant examinons, un peu plus en détail, la relation entre $\ll M \gg$ et $\langle M \rangle$.

THEOREME 4 : *Il existe un unique processus prévisible, noté Q_M à valeur dans $H \hat{\otimes}_1 H$ tel que*

$$(i) : Q_M(t, \omega) \text{ est symétrique positif et } \|Q_M\|_1 = 1$$

$$(ii) : \forall (t, \omega) : \ll M \gg(t, \omega) = \int_{[0, t]} Q_M(s, \omega) d\langle M \rangle_s(\omega).$$

Démonstration :

elle est très voisine de celle donnant l'existence de $\ll M \gg$. En effet $H \hat{\otimes}_1 H$ étant séparable, il suffit de trouver une application Q_M de $[0, \infty[\times \Omega$ dans $H \hat{\otimes}_1 H$ telle que

- $\forall (x, y) \in H \times H$, $Q_M(x, y)$ est un processus réel prévisible,
- $\forall (x, y) \in H \times H$, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} \ll M \gg_t(x, y) &= \int_{[0, t]} Q_M^s(x, y) d\langle M \rangle_s \\ &= \langle (x, M), (y, M) \rangle_t. \end{aligned}$$

Soit D un sous-ensemble dénombrable, dense, de H , qui soit en même temps un \mathbb{Q} -espace vectoriel. Par les propriétés 1) et 2) ci-dessus des processus croissants scalaires, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} |\langle (x, M), (y, M) \rangle| &\leq \left(\langle (x, M) \rangle_s^t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle (y, M) \rangle_s^t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x\| \times \|y\| \langle M \rangle_s^t, \quad \forall (x, y) \in D \times D, \quad \forall s \leq t. \end{aligned}$$

On peut donc choisir une densité $Q_M^t(\omega)(x, y)$, prévisible de $d\langle (x, M), (y, M) \rangle_t$ par rapport à $d\langle M, M \rangle_t$. Comme plus haut on remplace par zéro la densité $Q_M^t(\omega)(x, y)$ si

- $Q_M^t(\omega)(x, y)$ n'est pas Q -linéaire sur D ,
- $Q_M^t(x, y)$ n'est pas bornée par $\|x\| \times \|y\|$ sur $D \times D$.

Avec une telle convention on obtient un prolongement bilinéaire continu à $H \times H$, que l'on note également Q_M : Q_M est alors évidemment à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires continus symétriques sur H .

On démontre enfin que, presque sûrement, Q_M^t est nucléaire et de norme nucléaire égale à 1 pour tout t .

En effet si (e_n) est une base orthonormée de H on a, si $u > v$:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_u^v &= \sum_n \langle (M_t, e_n) \rangle_u^v \\ &= \sum_n \int_{]u,v]} Q_M^s(e_n, e_n) d\langle M \rangle_s \\ &= \int_{]u,v]} \sum Q_M^s(e_n, e_n) d\langle M \rangle_s \quad (\text{par Beppo-Levi}) \end{aligned}$$

Donc

$$p.s., \quad \sum Q_M^s(e_n, e_n) = 1.$$

— Q.E.D. —

De manière analogue au cas réel, à partir des crochets obliques (scalaires, tensoriels) on peut définir des relations d'orthogonalité forte comme suit :

Définition 1 : Soient M et N deux L^2 -martingales à valeurs dans le même Hilbert H . On dit que M et N sont **fortement orthogonales** si le processus (M, N) est une martingale, ou ce qui revient au même si $\langle M, N \rangle = 0$.

Définition 2 : Soient M et N deux L^2 -martingales à valeurs respectivement dans les Hilbert H et K . On dit que M et N sont **très fortement orthogonales** si $\ll M, N \gg = 0$, ou ce qui revient au même, si $M \otimes N$ est une martingale à valeur dans le Banach $H \hat{\otimes}_1 K$.

Il est clair que si M et N sont des martingales de carré intégrable à valeur dans H telles que M_0 ou $N_0 = 0$ et fortement orthogonales, elles sont orthogonales (dans $\mathcal{M}_2(H)$). De même si M et N sont des L^2 -martingales à valeur dans H très fortement orthogonales, elles le sont fortement, la réciproque étant fautive (METIVIER, page 160).

Remarquons enfin que si $u : H \rightarrow H_1$ et $v : K \rightarrow K_1$ sont linéaires continues on a pour tout $(x_1, y_1) \in H_1 \times K_1$:

$$\ll u(M), v(N) \gg (x_1, y_1) = \ll M, N \gg (u^*(x_1), v^*(y_1))$$

comme on le voit immédiatement.

Ce qui s'écrit encore :

$$\ll u(M), v(N) \gg = (u \otimes v) (\ll M, N \gg).$$

En considérant $\ll M, N \gg$ comme une application nucléaire de H dans K , la relation précédente peut s'écrire :

$$\ll u(M), v(N) \gg = v \ll M, N \gg u^*.$$

De même si $u : H \rightarrow H_1$ est linéaire et si M est une L^2 -martingale à valeurs dans H :

$$\begin{aligned} \ll u(M) \gg (t, \omega) &= u \otimes u (\ll M \gg) (t, \omega) \\ &= \int_{[0, t]} u \circ Q_M (s, \omega) \circ u^* d\langle M \rangle_s(\omega). \end{aligned}$$

(Toutefois on n'a pas de relation simple entre $\langle u(M) \rangle$ et $\langle M \rangle$).

Avant d'aborder l'intégrale stochastique isométrique par rapport à une martingale hilbertienne on va établir une égalité qui nous sera utile.

Tout d'abord, comme dans le cas réel, on établit facilement que si (M_t) est une L^2 -martingale à valeur dans H , si $s \leq t$ et si f est une variable aléatoire réelle \mathcal{F}_s -mesurable et bornée on a :

$$\mathbb{E} \left\{ f (M_t - M_s)^{\otimes 2} \right\} = \mathbb{E} \left\{ f (M_t^{\otimes 2} - M_s^{\otimes 2}) \right\} = \mathbb{E} \left\{ f \ll M \gg_s^t \right\}.$$

Cela étant, soit K un autre Hilbert et $a : H \rightarrow K$ linéaire continue. On a :

$$\begin{aligned} (E) \quad \mathbb{E} \left\{ f \|a(M_t - M_s)\|_K^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ f \text{Trace} (a(M_t - M_s))^{\otimes 2} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f \text{Trace} (a(M_t) - a(M_s))^{\otimes 2} \right\} \\ &= \text{Trace} \mathbb{E} \left\{ f (a(M_t) - a(M_s))^{\otimes 2} \right\} \\ &= \text{Trace} \mathbb{E} \left\{ f a \ll M \gg_s^t a^* \right\} \\ &= \text{Trace} \mathbb{E} \left\{ f \int_0^\infty 1_{]s, t]}(u) a \circ Q_M^u \circ a^* d\langle M \rangle_u \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f \int_0^\infty 1_{]s, t]}(u) \text{Trace} (a \circ Q_M^u \circ a^*) d\langle M \rangle_u \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f \int_0^\infty 1_{]s, t]}(u) \|a \circ (Q_M^u)^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 d\langle M \rangle_u \right\}. \end{aligned}$$

Cette relation sera utilisée pour la définition de l'intégrale stochastique isométrique.

Jusqu'à présent on a défini les crochets obliques, mais on peut de manière tout à fait analogue définir les "*crochets droits*", comme on va l'indiquer brièvement maintenant.

1 . Si M est une L^2 -martingale à valeur dans H , $[M]$ est l'unique processus croissant tel que :

- a) $\|M\| - [M]$ soit une martingale nulle en zéro,
- b) $\Delta([M]) = \Delta(\|M\|^2)$.

Si (e_n) est une base orthonormée de H on a :

$$[M]_t = \sum [(M; e_n)]_t$$

(convergence p.s. et dans L^1).

On définit ensuite

$$[M, N] = \frac{1}{4}([M + N] - [M - N])$$

si N est une L^2 -martingale à valeurs dans H .

Les crochets droits satisfont aux mêmes propriétés 1) à 4) que les crochets obliques.

2 . Si M et N sont des L^2 -martingales à valeurs respectivement dans les Hilbert H et K , en considérant pour tout $(x, y) \in H \times K$ l'expression

$$B'_t\{(x, y) (\omega) := [(x; M)_H; (y, N)_K],$$

on obtient le théorème suivant :

THEOREME 3' : Soient M et N deux L^2 -martingales à valeurs respectivement dans les Hilbert H et K . Il existe un unique processus, noté $[[M, N]]$ à valeurs dans $H \hat{\otimes}_1 K$ tel que

- (i) : $M \otimes N - [[M, N]]$ est une \mathcal{F}_1 -martingale nulle en zéro,
- (ii) : pour presque tout $\omega, t \rightarrow [[M, N]_t] (\omega)$ est à variation finie sur \mathbb{T} ,
- (iii) : $\Delta ([[M, N]]) = \Delta M \otimes \Delta N$

Démonstration :

La démonstration de (i) et de (ii) est en tout point identique à celle du Théorème 3.

Pour la démonstration de (iii) :

Soit (e_n) (resp. (f_m)) une base orthonormée de H (resp. K), alors $[[M, N]]$ a un saut si et seulement si, il existe un couple (e_n, f_m) tel que :

$$[[M, N]](e_n, f_m) = [(M, e_n)_H, (N, f_m)_K] \text{ a un saut.}$$

Propriété analogue pour $M \otimes N$ et (M, e_n) (N, f_m) .

La même méthode que pour démontrer (iii) permet de démontrer l'unicité : on utilise l'unicité de $[(M, e_n), (N, f_m)]$ pour chaque (e_n, f_m) . Naturellement ce crochet droit nous sera utile lors de la démonstration de la formule d'Itô.

Enfin on peut définir le crochet droit scalaire de deux L^2 -martingales à valeurs dans le même Hilbert par la formule

$$[M, N]_t = \sum_n [(M, e_n)_H, (N, e_n)_H]_t$$

(où e_n est une base orthonormée de H).

— Q.E.D. —

3 - L'intégrale stochastique isométrique par rapport à une L^2 -martingale hilbertienne

Soit (M_t) une martingale de carré intégrable à valeurs dans l'Hilbert H et soit $X = (X_t)$ un processus prévisible élémentaire à valeurs dans $\mathcal{L}(H, G)$ où G est un autre Hilbert :

$$X = k_0 b_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n k_i a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

avec b_0, a_i ($1 \leq i \leq n$) : des éléments de $\mathcal{L}(H, G)$,

$$0 = t_1 < t_2, \dots < t_{n+1},$$

k_0 : une variable aléatoire réelle bornée \mathcal{F}_0 -mesurable,

et chaque k_i : une variable aléatoire réelle bornée \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.

Comme d'habitude on pose :

$$\int X dM = k_0 b_0(M_0) + \sum_i k_i a_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

Maintenant $\mathbb{E}\{\|\int X dM\|_G^2\}$ est la somme des termes suivants :

$$(A) \quad 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}\left\{k_i k_j (a_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}), a_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}))\right\}_G.$$

$$(B) \quad 2 \sum_j \mathbb{E}\left\{k_0 k_j (b_0(M_0), a_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}))\right\}_G.$$

$$(C) \quad \sum_j \mathbb{E}\left\{k_j^2 \|a_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\|_G^2\right\}.$$

$$(D) \quad \mathbb{E}\left\{k_0^2 \|b_0(M_0)\|_G^2\right\}.$$

Il est facile de voir que chaque terme qui figure dans la somme de (A) est nul, car :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{k_i k_j (a_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}), a_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}))\right\}_G \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\{\dots | \mathcal{F}_{t_j}\}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{k_i k_j (a_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}), a_j(\mathbb{E}\{M_{t_{j+1}} - M_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}\}))\right\}_G \\ &= 0 \end{aligned}$$

De la même façon la somme qui figure dans (B) est nulle.

En ce qui concerne les termes qui figurent dans (C), d'après l'égalité (E) établie à la fin du numéro précédent :

$$\begin{aligned} \sum_j \mathbb{E}\{k_j^2 \|a_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\|_G^2\} &= \mathbb{E}\left\{\int_{[0, \infty[} \sum_j k_j^2 1_{]t_j, t_{j+1}[}(u) \|a_j \circ (Q_M^u)\|_{H.S}^2 d\langle M \rangle_u\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\int_{[0, \infty[} \|X \circ (Q_M^{\frac{1}{2}})\|_{H.S}^2 d\langle M \rangle_u\right\}. \end{aligned}$$

Enfin, on voit facilement que :

$$\mathbb{E}\{k_0^2 \|b_0(M_0)\|_G^2\} = \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(0)\|^2 \langle M \rangle_0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left\{\|\int_{[0, \infty[} X dM\|_G^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\int_{[0, \infty[} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(u)\|_{H.S}^2 d\langle M \rangle_u\right\}.$$

Munissons l'ensemble des processus prévisibles élémentaires de la structure préhilbertienne suivante :

$$\begin{aligned} (X, Y) &\rightsquigarrow \mathbb{E} \left\{ \int_{[0, \infty[} \text{Trace} (X \circ Q_M \circ Y^*) d\langle M \rangle_t \right\} \\ &= \int_{[0, \infty[} \text{Trace} (X \circ Q_M \circ Y^*) d\alpha_M \end{aligned}$$

où $[0, \infty[= [0, \infty[\times \Omega$ et où $d\alpha_M$ désigne la mesure $d\langle M \rangle_+ \otimes dP$.

On a obtenu ainsi une isométrie de l'espace des processus élémentaires prévisibles dans l'espace hilbertien $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; G)$.

Définition : On appelle $\Lambda^2(M; H, G)$ le complété séparé de l'espace des processus prévisibles élémentaires, muni de la structure préhilbertienne définie ci-dessus.

$\Lambda^2(M; H, G)$ est évidemment un espace d'Hilbert, dont nous allons décrire les éléments.

Lemme 1 : Soit (X_n) une suite de processus prévisibles élémentaires de Cauchy pour la norme dans $\Lambda^2(M; H, G)$. Pour α_M -presque tout (t, ω) dans $[0, \infty[$, il existe un couple $(D_t(\omega), X_t(\omega))$ tel que

- a) $D_t(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de H , contenant $I_m((Q_M^t)^{\frac{1}{2}})$
- b) $X_t(\omega)$ est une application linéaire de $D_t(\omega)$ dans G
- c) $X_t(\omega) \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(\omega) \in \mathcal{L}_2(H, G)$ pour tout (t, ω)
- d) $(t, \omega) \rightsquigarrow X_t(\omega) \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(\omega)$ est prévisible et

$$\int_{[0, \infty[} \|X_t \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 d\alpha_M < \infty.$$

La condition c) équivaut à :

$$\forall h \in H, X_t \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(h) \text{ est prévisible.}$$

$(Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(\omega)$ sera noté également : $Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega)$.

Démonstration :

Soit $Y_n(t, \omega) = X_n(t)(\omega) \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(\omega)$, alors la condition du Lemme 1 signifie que Y_n est de Cauchy dans $L^2\left(\llbracket 0, \infty \llbracket, \mathcal{P}, \alpha_M, \mathcal{L}_2(H, G)\right)$, (\mathcal{P} étant la tribu prévisible).

Il existe donc Y , processus prévisible à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, G)$, de carré intégrable et une suite extraite de (Y_n) tels que

$$Y_n \xrightarrow{L_2} Y \quad \text{et} \quad Y_{n_k} \longrightarrow Y, \quad \text{p.s. } \alpha_M\text{-p.s. .}$$

Maintenant si $Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega)h = 0$ alors

$$Y_{n_k}(t, \omega)(h) = 0 \quad \forall k,$$

donc

$$Y(t, \omega)(h) = 0.$$

Il existe donc $X(t, \omega) : \text{Im}(Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega)) \rightarrow G$ tel que

$$Y(t, \omega) = X(t, \omega) \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega).$$

On peut prendre $D(t, \omega) = \text{Im}(Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega))$ et le couple $(D(t, \omega), X(t, \omega))$ satisfait aux conditions du lemme .

La condition *d*) de ce lemme signifie que le processus $(t, \omega) \rightsquigarrow X_t(\omega) \circ (Q_M^t)^{\frac{1}{2}}(\omega)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, G)$ est de carré intégrable par rapport à la mesure α_M définie sur la tribu prévisible. Donc par un abus d'écriture évident :

$$X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \in L^2\left(\llbracket 0, \infty \llbracket, \mathcal{P}, \alpha_M, \mathcal{L}_2(H, G)\right).$$

— *Le Lemme 1 est démontré.* —

Remarque : $X(t, \omega)$ n'est pas en général un opérateur continu de H dans G , ni défini partout comme le montre l'exemple suivant :

Soit Ω un ensemble réduit à un élément, H et G deux Hilbert (séparables) de dimension infinie. Soit (h_n) une base orthonormée de H , (g_n) une base orthonormée de G .

Soit $M = (M_t)$ la H -martingale définie par

$$M_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} h_n \quad \forall t.$$

Alors

$$\langle M \rangle_t \equiv 1 \text{ et } \ll M \gg_t = M_t^{\otimes 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n \otimes h_n.$$

Donc

$$Q_M^t = \ll M \gg_t \text{ et } (Q_M^t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} h_n \otimes h_n.$$

Soit $X_t = X$ l'opérateur (non partout défini) de H dans G défini par :

- $\text{Dom } X = \{h \in H, \sum n(h, h_n)_H^2 < \infty\} \neq H$
- $X(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (h, h_n)_H g_n \quad (X = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} h_n \otimes g_n).$

Alors

$$X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2^n}} (h, h_n) g_n.$$

Donc

$$\|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

et

$$\int_{[0, \infty[} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 d\alpha_M < \infty$$

(car $\alpha_M = \delta_{(\omega_0)} \otimes \delta_{\{0\}}$).

D'autre part X peut être approché au sens de la norme de Λ^2 par les processus élémentaires $X_k(t, \omega) = \sum_{n=1}^k \sqrt{n} h_n \otimes g_n$, et il est clair que X est non borné et non partout défini.

Cet exemple est très voisin d'un exemple donné par METIVIER .

La réciproque du Lemme 1 est vraie, et l'on a donc une caractérisation des éléments de $\Lambda^2(M; H, G)$.

Pour le démontrer nous aurons besoin de résultats intermédiaires.

Lemme 2 : *Tout processus prévisible X à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, G)$ tel que*

$$\int_{\llbracket 0, \infty[} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 d\alpha_M < \infty$$

définit un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$.

Démonstration :

D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, X et $Q_M^{\frac{1}{2}}$ étant prévisibles, $X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}$ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, G)$, dont l'intégrale ci-dessus a un sens. La condition du Lemme 2 signifie simplement que :

$$X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \in L^2(\llbracket 0, \infty[, \mathcal{P}, \alpha_M, \mathcal{L}_2(H, G)).$$

Le lemme est vrai si X est borné. En effet, il existe une suite (X_n) de processus prévisibles élémentaires telle que

$$X_n \longrightarrow X \text{ dans } \mathcal{L}_2(H, G)$$

et

$$\|X_n\|_{H-S} \leq \|X\|_{H-S} \leq M.$$

Alors

$$X_n \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \longrightarrow X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \text{ dans } \mathcal{L}_2(H, G) \text{ (et même dans } \mathcal{L}_1(H, G)).$$

Mais

$$\|X_n \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S} \leq \|X_n \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_1 \leq \|X_n\|_{H-S} \|Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S} = \|X_n\|$$

et le Théorème de Lebesgue peut s'appliquer.

Le cas général s'en déduit facilement en approchant X par les processus

$$X_n \mathbf{1}_{\{\|X\|_{H-S} \leq M\}}.$$

— Le Lemme 2 est démontré. —

Il reste maintenant à démontrer que tout processus dans $\Lambda^2(M; H, G)$ peut être approché par un processus qui satisfait aux conditions du Lemme 2.

Pour ce faire nous aurons besoin de résultats auxiliaires.

Tout d'abord soit H un Hilbert quelconque et R un opérateur continu de H dans H , auto-adjoint et positif; pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $J_\lambda := (I + \lambda R)^{-1}$ existe.

En outre :

- a) $\|J_\lambda\| \leq 1$, $\|I - J_\lambda\| \leq 1$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme dans $\mathcal{L}(H, H)$,
- b) $I - J_\lambda = \lambda J_\lambda \circ R = \lambda R \circ J_\lambda$,
- c) $J_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \text{proj}_{\text{Ker } R}$ pour la topologie de convergence simple forte.

a) et b) sont bien connus, c) est démontré par Asperti.

On peut d'ailleurs retrouver facilement ces résultats par la théorie spectrale :

A J_λ correspond un opérateur de multiplication dans un espace $L^2(R^+, \mu)$ par la fonction $x \rightsquigarrow \frac{1}{1 + \lambda x}$ et :

$$\frac{1}{1 + \lambda x} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 1_{\{0\}}(x), \quad x \geq 0.$$

Ces notations étant fixées on a le lemme suivant :

Lemme 3 : Soit $U \in \mathcal{L}_2(H, G)$ et R comme ci-dessus. On suppose que $\text{Ker } R \subset \text{Ker } U$ (ce qui implique $\text{Im}(U^*) \subset (\text{Ker } R)^\perp$). Alors $U \circ (I - J_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} U$ dans $\mathcal{L}_2(H, G)$.

Démonstration :

Il est clair que

$$U \circ (I - J_\lambda) \in \mathcal{L}_2(H, G)$$

et que

$$\|U \circ (I - J_\lambda)\|_2 \leq \|U\|_2$$

on a évidemment

$$U - U \circ (I - J_\lambda) = U \circ J_\lambda.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|U \circ J_\lambda\|_2^2 &= \|J_\lambda \circ U^*\|_2^2 \\ &= \sum_n \|J_\lambda \circ U^*(g_n)\|_H^2 \end{aligned}$$

où (g_n) est une base orthonormée de G .

Pour tout $\lambda > 0$, considérons la suite d'éléments de $H : (J_\lambda \circ U^*(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$, alors :

- elle définit un élément de $\ell^2(H)$ (de norme $\|U \circ J_\lambda\|_2$)
- elle est "majorée" par un élément de $\ell^2(H)$ car :

$$\sum_n \|J_\lambda U^*(g_n)\|_H^2 \leq \sum_n \|U^*(g_n)\|^2$$

- pour tout n , $J_\lambda U^*(g_n) \rightarrow 0$, car $\text{Im}(U^*) \subset (\text{Ker } R)^\perp$ et $J_\lambda \rightarrow \text{proj}_{\text{Ker } R}$ comme on l'a rappelé plus haut.

Donc par le théorème de Lebesgue :

$$\|U \circ J_\lambda\|_2^2 = \sum_n \|J_\lambda \circ U^*(g_n)\|_H^2 \text{ tend vers zéro quand } \lambda \rightarrow \infty.$$

Ce qui signifie que

$$U \circ (I - J_\lambda) \rightarrow U \text{ dans } \mathcal{L}_2(H, G).$$

— Le Lemme 3 est démontré. —

Finalement on a le théorème de caractérisation de $\Lambda^2(M; H, G)$:

THEOREME 5 : *Soit pour α_M -presque tout $(t, \omega) \in [0, \infty[$ un couple $(D_t(\omega), X_t(\omega))$ tel que :*

- a) $D_t(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de H , contenant $\text{Im}((Q_M^t)^\frac{1}{2}(\omega))$,
- b) $X_t(\omega)$ est une application linéaire de $D_t(\omega)$ dans G ,
- c) $X_t(\omega) \circ (Q_M^t)^\frac{1}{2}(\omega) \in \mathcal{L}_2(H, G)$ pour α_M -presque tout (t, ω) ,
- d) $(t, \omega) \rightsquigarrow X_t(\omega) \circ (Q_M^t)^\frac{1}{2}(\omega)$ est prévisible et $\int_{[0, \infty[} \|X \circ Q_M^\frac{1}{2}\|_{H-S}^2 d\alpha_M < \infty$.

Alors la famille $(D_t(\omega), X_t(\omega))$ définit un (unique) élément de $\Lambda^2(M; H, G)$.

Démonstration :

Il suffit de trouver une famille $(X^\lambda)_{\lambda > 0}$ de processus prévisibles à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, G)$, tels que pour tout λ :

$$X^\lambda \circ Q_M^\frac{1}{2} \in L^2([0, \infty[, \mathcal{P}, \alpha_M, \mathcal{L}_2(H, G))$$

et que l'on ait en outre :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} - X^\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 d\alpha_M = 0.$$

Soit pour $\lambda > 0$:

$$J_\lambda(t, \omega) = (1 + \lambda Q_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega))^{-1}$$

et

$$X^\lambda = \lambda X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \circ J_\lambda$$

X^λ est évidemment prévisible car J_λ l'est (voir §1) et $X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}$ l'est par hypothèse.

De plus

$$X^\lambda(t, \omega) \in \mathcal{L}_2(H, G) \text{ pour tout } (t, \omega)$$

et

$$(A) \quad \begin{aligned} \|X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2 &= \|\lambda X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \circ J_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2 \\ &\leq \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2 \end{aligned}$$

car

$$\|\lambda J_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\| = \|I - J_\lambda\| \leq 1,$$

d'après les propriétés a) et b) précédant l'énoncé du Lemme 3 .

Donc $X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}$ est un processus prévisible, à valeurs dans $\mathcal{L}_2(H; G)$ et de carré α_M -intégrable pour tout $\lambda > 0$.

Enfin

$$\begin{aligned} X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} - X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}} &= X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} - \lambda X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \circ J_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \\ &= X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} - X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \circ (I - J_\lambda) \\ &= X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \circ J_\lambda. \end{aligned}$$

et ce dernier terme tend, pour tout (t, ω) , vers zéro, dans $\mathcal{L}_2(H, G)$ quand λ tend vers l'infini. On a donc :

$$X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \longrightarrow X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \text{ simplement dans } \mathcal{L}_2(H; G)$$

et

$$\|X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\| \leq \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|.$$

Donc par Lebesgue :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \|X_\lambda \circ Q_M^{\frac{1}{2}} - X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2 d\alpha_M = 0.$$

— Q.E.D. —

En définitive on a démontré que, sur l'ensemble $\tilde{\Lambda}_2(M; H, G)$ des applications de $\llbracket 0, \infty \llbracket$ dans l'ensemble des applications linéaires non partout définies de H dans G satisfaisant aux conditions c) et d) ci-dessus, on peut définir une structure préhilbertienne par :

$$\begin{aligned} (X, Y) \rightsquigarrow (X, Y)_{\Lambda^2} &= \int_{\llbracket 0, \infty \llbracket} (X \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}, Y \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}})_{H-S} d\alpha_M \\ &= \int_{\llbracket 0, \infty \llbracket} \text{Trace} \left((X \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}) \circ (Y \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}})^* \right)_{H-S} d\alpha_M. \end{aligned}$$

et les processus prévisibles élémentaires sont denses dans $\tilde{\Lambda}_2(M; H, G)$.

Si $\Lambda^2(M; H, G)$ désigne le complété séparé associé à $\tilde{\Lambda}_2$ (donc $\Lambda^2(M; H, G)$ est un Hilbert), l'intégrale stochastique, définie sur les processus élémentaires, se prolonge en une isométrie de $\Lambda^2(M; H, G)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'image d'un X de $\Lambda^2(M; H, G)$ est appelée "*l'intégrale stochastique isométrique*" de X par rapport à M et on la note $\int X dM$. On a donc :

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \int X dM \right\|_G^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left\| \int_{\llbracket 0, \infty \llbracket} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2 dt \right\| \right\}.$$

On omettra souvent le terme isométrique, et on écrit souvent Λ^2 au lieu de $\Lambda^2(M; H, G)$.

Cela étant, comme dans le cas réel, on peut définir les "*intégrales stochastiques (isométriques) jusqu'à l'instant t* " par :

$$(X \circ M)_t = \int_{\llbracket 0, t \llbracket} X \circ dM := \int (1_{\llbracket 0, t \llbracket} X) \circ dM$$

et $t \rightsquigarrow (X \circ M)_t$ définit une martingale de carré intégrable notée $X \circ M$ dont la variable terminale est $\int X \circ dM$. On a alors une isométrie de Λ^2 dans \mathcal{M}^2 .

Par la suite il sera commode d'utiliser la notation suivante :

Soient G_1 et G_2 deux Hilbert et soient $X \in \Lambda^2(M; H, G_1)$ et $Y \in \Lambda^2(M; H, G_2)$ (M étant un élément de $\mathcal{M}^2(H)$).

Alors $(X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}) \circ (Y \circ Q_M^{\frac{1}{2}})^*$ est un processus prévisible à valeurs dans $G_1 \widehat{\otimes}_2 G_2$.

On l'écrira encore

$$(X \otimes Y)(Q_M) \text{ ou } X \circ Q_M \circ Y^*$$

par abus d'écriture.

Dans le cas où X (resp. Y) est à valeurs dans $\mathcal{L}(H, G_1)$ (resp. $\mathcal{L}(H, G_2)$) cette notation est conforme à celle que nous avons définie au §1 pour le produit tensoriel d'applications linéaires continues (et partout définies).

De même on utilisera la notation :

$$\text{Trace}(X \circ Q_M \circ Y^*) \text{ ou } \text{Trace}(X \otimes Y(Q_M))$$

au lieu de

$$\text{Trace}((X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}) \circ (Y \circ Q_M^{\frac{1}{2}})^*) = (X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}, Y \circ Q_M^{\frac{1}{2}})_{H-S}.$$

Ces notations seront utilisées pour le Théorème 6 et ses corollaires.

THEOREME 6 : Soient G_1 et G_2 deux Hilbert $X \in \Lambda^2(M; H, G_1)$ et $Y \in \Lambda^2(M; H, G_2)$, M étant une martingale de carré intégrable à valeurs dans H . On a alors (à une indistiguabilité près) :

$$\ll X \circ M; Y \circ M \gg = (X \otimes Y)(Q_M) \circ \langle M \rangle = (X \circ \widetilde{Q}_M \circ Y^*) \circ \langle M \rangle$$

(les expressions figurant dans les membres de droite sont les intégrales par rapport au processus croissant réel $\langle M \rangle$).

Démonstration :

Puisque

$$X \circ \widetilde{Q}_M \circ Y^* = (X \circ \widetilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}) \circ (Y \circ \widetilde{Q}_M^{\frac{1}{2}})^*,$$

d'après la définition de Λ^2 , le processus $X \circ \widetilde{Q}_M \circ Y^*$ est prévisible, à valeurs dans $G_1 \widehat{\otimes}_1 G_2$.

De plus, toujours d'après la définition de Λ^2 , l'intégrale stochastique par rapport à $\langle M \rangle$ qui figure dans l'énoncé du théorème a un sens (pour presque tout ω) et définit un processus prévisible.

Posant alors

$$Z_t = (X \circ M)_t \otimes (Y \circ M)_t$$

et

$$U_t = \int_{]0,t]} (X \circ \tilde{Q}_M \circ Y^*) (s, \omega) d \langle M \rangle_s,$$

il nous suffit de démontrer que pour tout couple (s, t) tel que $s \leq t$ et tout $F \in \mathcal{F}_s$:

$$\mathbb{E}\{1_F(Z_t - Z_s)\} = \mathbb{E}\{1_F(U_t - U_s)\}$$

a) Supposons d'abord

$$X = 1_{]a,b]} \circ A, \quad (A \in \mathcal{L}(H, G_1))$$

et

$$Y = 1_{]c,d]} \circ B, \quad (B \in \mathcal{L}(H, G_2)).$$

Alors

$$Z_t = A \otimes B \left[(M_{t \wedge b} - M_{t \wedge a}) \otimes (M_{t \wedge d} - M_{t \wedge c}) \right].$$

Si $]a, b] =]a, b] \cap]c, d]$, on a :

$$\mathbb{E}\{1_F(Z_t - Z_s)\} = (A \otimes B) \mathbb{E} \left\{ 1_F \ll M \gg_{s \vee a}^{t \wedge b} \right\} \quad \text{si } s \vee a \leq t \wedge b$$

et

$$\mathbb{E}\{1_F(Z_t - Z_s)\} = 0 \quad \text{autrement}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{1_F(Z_t - Z_s)\} &= (A \otimes B) \mathbb{E} \left\{ 1_F \int_{]s \vee a, t \wedge b]} Q_M \circ d \langle M \rangle_u \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ 1_F \int_{]s \vee a, t \wedge b]} (A \otimes B)(Q_M) d \langle M \rangle_u \right\} \quad \text{si } s \vee a \leq t \wedge b. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(X \otimes Y)(Q_M) = 1_{]a,b]} \times 1_{]c,d]} A \otimes B(Q_M)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ 1_F(U_t - U_s) \} &= \mathbb{E} \left\{ 1_F \int_{]s,t]} 1_{]a,b]}(u) A \otimes B(Q_M)_u d \langle M \rangle_u \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ 1_F \int_{a \vee s \leq b \wedge t} A \otimes B(Q_M)_u d \langle M \rangle_u \right\} \quad \text{si } a \vee s \leq b \wedge t \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\{1_F(U_t - U_s)\} = 0 \quad \text{autrement.}$$

— Le Théorème est démontré dans ce cas. —

b) Si X et Y sont prévisibles élémentaires, le résultat est démontré en utilisant la bilinéarité du crochet oblique tensoriel .

c) Le cas général s'obtient par continuité :

Soient $X \in \Lambda^2(M; H, G_1)$ et $Y \in \Lambda^2(M; H, G_2)$ et soit X_n (resp. Y_n) une suite de processus élémentaires convergeant vers X (resp. Y) dans $\Lambda^2(M; H, G_1)$ (resp. $\Lambda^2(M; H, G_2)$) .

Alors

$$X_n \circ M \longrightarrow X \circ M \text{ dans } \mathcal{M}_\infty^2(G_1)$$

et

$$Y_n \circ M \longrightarrow Y \circ M \text{ dans } \mathcal{M}_\infty^2(G_2).$$

Donc d'après le corollaire du Théorème 3, pour tout t :

$$\langle X_n \circ M \rangle_t \otimes \langle Y_n \circ M \rangle_{t-} \ll X_n \circ M, Y_n \circ M \gg_t$$

tend dans $L^1(\Omega, G_1 \hat{\otimes}_2 G_2)$ vers

$$\langle X \circ M \rangle_t \otimes \langle Y \circ M \rangle_{t-} \ll X \circ M, Y \circ M \gg_t .$$

Or par définition de la topologie de Λ^2 :

$$\ll X_n \circ M, Y_n \circ M \gg_t = \int_{[0,t]} X_n \otimes Y_n(Q_M) d\langle M \rangle_s$$

converge vers $\int_{[0,t]} X \otimes Y(Q_M) d\langle M \rangle_s$.

— Q.E.D. —

Corollaire 1 : Sous les conditions du Théorème 6 :

$$\langle X \circ M, Y \circ M \rangle_t = \text{Trace} (X \circ Q_M \circ Y^*) \circ \langle M \rangle$$

(le membre de droite étant une intégrale de STIELTJES par rapport à $d\langle M \rangle$).

C'est évident.

Soit $N = X \circ M$ et Q_N la densité de $\ll N \gg$ relativement à $\langle N \rangle$:

$$\ll N \gg = Q_N \circ \langle N \rangle$$

On a alors le Corollaire suivant :

Corollaire 2 : On a la relation :

$$Q_N = \frac{1}{\text{Trace}(X \otimes X(Q_M))} \circ (X \otimes X)(Q_M),$$

ou ce qui revient au même :

$$\hat{Q}_N = \frac{1}{\|X \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}\|_{H.S}^2} (X \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}) \circ (X \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}})^*.$$

(Avec la convention : $\frac{1}{\text{Trace}(X \otimes X(Q_M))} (X \otimes X)(Q_M) = 0$, si $X \otimes X(Q_M) = 0$).

Démonstration :

C'est immédiat car :

$$\ll N \gg = Q_N \circ \langle N \rangle$$

et

$$\ll N \gg = X \otimes X(Q_M) \circ \langle M \rangle$$

et enfin :

$$\langle N \rangle = \text{Trace}(X \circ \hat{Q}_N \circ X^*) \langle M \rangle.$$

— Le Corollaire 2 est démontré. —

Corollaire 3 : Soient H, G, K trois Hilbert et M une martingale de carré intégrable à valeurs dans H . Si $X \in \Lambda^2(M; H, G)$ et $Y \in \Lambda^2(X \circ M; G, K)$ alors $Y \circ X \in \Lambda^2(M; H, K)$ et l'on a l'égalité :

$$Y \circ (X \circ M) = (Y \circ X) \circ M.$$

Démonstration :

Soit $N = X \circ M$. En tenant compte des relations entre Q_M et Q_N d'une part, $\langle M \rangle$ et $\langle N \rangle$ d'autre part (Corollaires 1 et 2) et du fait que :

$$\text{Trace}(X \circ \hat{Q}_M \circ X^*) = \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H-S}^2$$

on voit que :

$$\|Y\|_{\Lambda^2(N; G, K)}^2 = \|Y \circ X\|_{\Lambda^2(M; H, K)}^2.$$

Donc les deux applications

$$Y \rightsquigarrow (Y \circ X) \circ M$$

et

$$Y \rightsquigarrow Y \circ (X \circ M)$$

de $\Lambda^2(N; G, K)$ dans $L^2(\Omega)$ sont des isométries.

D'autre part il est facile de voir que $(Y \circ X) \circ M$ et $Y \circ (X \circ M)$ sont égales si Y est élémentaire.

— Le Corollaire 3 est démontré. —

Corollaire 4 : Soit M et X définis comme dans le Corollaire 3 et soit $u \in \mathcal{L}(G, K)$. Alors $u \circ X \in \Lambda^2(M; H, K)$ et :

$$u \left(\int X dM \right) = \int (u \circ X) dM.$$

C'est absolument immédiat.

Remarque : Soient M et X comme dans le Corollaire et soit $v : H \rightarrow H$ linéaire continue. On n'a pas forcément $M \in \Lambda^2(v(M); H, G)$ comme le montre l'exemple suivant :

Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien réel et soit (M_t) la martingale à valeurs dans $H = \mathbb{R}^2$ définie par $M_t = (B_t, B_t)$. Soit d'autre part (X_t) le processus à valeurs dans $\mathcal{L}(H, \mathbb{R}) \simeq H$ défini par

$$X_t = \left(e^{B_t^2}, -e^{B_t^2} \right).$$

On a alors

$$\langle M \rangle_t = 2t; \quad \ll M \gg_t = \begin{vmatrix} t & t \\ t & t \end{vmatrix}; \quad Q_{M_t} = Q_{M_t}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

Donc $X_t \circ Q_{M_t}^{\frac{1}{2}} = 0$ et $X \in \Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ avec $X \circ M = 0$.

Soit maintenant $v : H \rightarrow H$ définie par $v(x, y) = (x, 0)$, ($x, y \in \mathbb{R}$) et soit $N_t = u(M_t) = (B_t, 0)$, alors

$$\langle N \rangle_t = t; \quad \ll N \gg_t = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad Q_{N_t} = Q_{N_t}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

De plus

$$X_t \circ Q_{N_t}^{\frac{1}{2}} = e^{B_t^2}$$

et

$$\mathbb{E}(\int_0^\infty e^{B_t^2} dt) = +\infty.$$

4 - Exemples de calcul d'intégrale stochastique et notations

L'exemple que nous venons de considérer prouve que l'intégrale stochastique par rapport à une martingale hilbertienne (M_t) n'est pas la somme d'intégrales stochastiques par rapport aux martingales réelles $M_n = (M, e_n)_H$.

Toutefois donnons un cas où il en est bien ainsi.

Supposons qu'il existe une base orthonormée de H , soit (e_n) telle que les martingales (M, e_n) soient deux à deux orthogonales. M est dite "*diagonale*" (relativement à e_n) et la martingale est dite "*diagonalisable*" s'il existe une base dans laquelle elle est diagonale.

Si M est diagonale relativement à la base (e_n) , l'opérateur $\ll M \gg$ relativement à cette base s'exprime par une matrice diagonale (infinie si $\dim H = \infty$) :

$$(\ll M \gg_t)_{n,n} = \langle M_n \rangle_t.$$

Q_M est également diagonale et l'on a pour toute fonction $(t, \omega) \rightsquigarrow f(t, \omega)$ prévisible positive :

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{[0,t]} f(s, \omega) (Q_M(s))_{(n,n)} d\langle M \rangle_s \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_{[0,t]} f(s, \omega) d\langle M_n \rangle_s \right\}$$

(avec, rappelons-le, $\langle M \rangle_t = \sum \langle M_n \rangle_t$).

Proposition : Soit M une martingale de carré intégrable à valeurs dans l'Hilbert H , diagonale relativement à la base (e_n) et soit $X \in \Lambda^2(M; H, G)$. Alors pour tout n le processus $(t, \omega) \rightsquigarrow X(e_n)(t, \omega)$ à valeurs dans G appartient à $\Lambda^2(M_n, \mathbb{R}, G)$ et l'on a

$$X \circ M = \sum_n X(e_n) \circ M_n$$

et

$$\|X \circ M\|_{L^2(\Omega, G)}^2 = \sum_n \|X(e_n) \circ M_n\|_{L^2(\Omega, G)}^2.$$

Démonstration :

C'est trivial si X est élémentaire : $X = \sum_i a_i 1_{]s_i, t_i]}$, *sans aucune hypothèse quant à la "diagonalité"*, car

$$\begin{aligned} X \circ M &= \sum_i a_i (M_{t_i} - M_{s_i}) = \sum_i a_i \left(\sum_n (M_{t_i} - M_{s_i}, e_n)_H e_n \right) \\ &= \sum_n \sum_i a_i (e_n) \circ [(M_{t_i}, e_n)_H - (M_{s_i}, e_n)_H], \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Soit maintenant $X \in \Lambda^2(M; H, G)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \int_{[0, \infty[} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_{H.S}^2 d\langle M \rangle \right\} &= \sum_n \mathbb{E} \left\{ \int_{[0, \infty[} \|X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} e_n\|_G^2 d\langle M \rangle \right\} \\ &= \sum_n \mathbb{E} \left\{ \int_{[0, \infty[} \|X(e_n)\|_G^2 (Q_M)_{n,n} d\langle M \rangle \right\} \\ &\quad (e_n \in \text{Im}(Q_M^{\frac{1}{2}}), \text{ donc } X(e_n) \text{ a un sens}) \\ &= \sum_n \mathbb{E} \left\{ \int_{[0, \infty[} \|X(e_n)\|_G^2 d\langle M_n \rangle \right\}. \end{aligned}$$

En vertu de l'orthogonalité des (M_n) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left\| \sum_n \int X(e_n) dM_n \right\|^2 \right\} &= \sum_n \mathbb{E} \left\{ \int \|X(e_n)\|^2 d\langle M_n \rangle \right\} \\ &= \sum_n \mathbb{E} \left\{ \left\| \int X(e_n) dM_n \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

En définitive on a démontré que $X \in \Lambda^2(M; H, G)$ implique que pour tout n :

$$X(e_n) \in \Lambda^2(M_n; \mathbb{R}, G)$$

et que les deux applications suivantes

$$X \rightsquigarrow \int X dM \quad \text{et} \quad X \rightsquigarrow \sum_n \int X(e_n) dM_n,$$

à valeurs dans $L^2(\Omega)$ sont des isométries et coïncident sur les processus élémentaires.

— Cela suffit à démontrer le résultat. —

Remarque : Soit M une martingale de carré intégrable à valeurs dans l'Hilbert H . Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base donnée de H et pour tout (t, ω) soit $T_t(\omega)$ l'opérateur unitaire diagonalisant $Q_M(t, \omega)$ comme il est dit à la suite de la démonstration du Théorème 4 du paragraphe 1.

Il est facile de voir que $T \in \Lambda^2(M; H, H)$ et que si $N = T \circ M$ alors N est diagonale dans la base (e_n) .

La formule $\langle T \circ M \rangle_t = \text{Trace}(T \circ Q_M \circ T^{-1}) \langle M \rangle_t$ montre que $\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_t$.

Enfin d'après ce que l'on a vu plus haut on a $M = T^{-1} \circ N$ et si K est un Hilbert on a l'équivalence :

$$X \in \Lambda^2(M; H, K) \iff T^{-1} \circ X \in \Lambda^2(N; H, K).$$

Ce résultat sera utile pour démontrer le Théorème de représentation.

Soit $M \in \mathcal{M}_\infty^2(H)$. On appelle "*sous-espace stable associé à M* " l'espace stable de $\mathcal{M}_\infty^2(\mathbb{R})$ engendré par les martingales $(M, e)_H$.

On a alors le lemme suivant :

Lemme : Soit $M \in \mathcal{M}_\infty^2(H)$ et U une martingale réelle de carré intégrable. On a équivalence entre les deux énoncés :

- a) U appartient au sous-espace stable associé à M ,
- b) il existe $X \in \Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ tel que $U = X \circ M$.

Démonstration :

Il est clair que le sous-espace stable engendré par M est contenu dans l'espace des intégrales stochastiques car chaque $(M, e)_H$ est une intégrale stochastique et l'espace des $X \circ M$ avec $X \in \Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{M}_\infty^2(\mathbb{R})$.

Donc a) \Rightarrow b).

Démontrons maintenant que b) \Rightarrow a).

Supposons d'abord N diagonale. Alors le résultat est clair car

$$\int X \circ dM = \sum \int X_i dM_i, \quad X_i = X(e_i) : M_i = M(e_i)$$

où (e_i) est une base orthonormée (la série étant convergente dans $\mathcal{M}_\infty^2(\mathbb{R})$).

— Le Lemme est démontré dans ce cas. —

Dans le cas général, avec les notations ci-dessus

$$\int X \circ dM = \int (X \circ T^{-1}) d(T \circ M) = \sum_i \int (X \circ T^{-1})_i d(T \circ M)_i$$

et on a encore le résultat puisque $(T \circ M)_i$ appartient au sous-espace stable de M .

— Le Lemme est démontré .—

On en déduit alors immédiatement le théorème suivant :

THEOREME 7 : Soit H et K deux Hilbert; $M \in \mathcal{M}_\infty^2(H)$ et $U \in \mathcal{M}_\infty^2(K)$. On a équivalence de

a) Il existe $X \in \Lambda^2(M; H, K)$ tel que $U = \int X \circ dM$

et

b) Pour tout $k \in K$, la martingale réelle $(U, k)_K$ appartient au sous-espace stable associé à M .

Démonstration :

a) \Rightarrow b) par le Lemme 1 précédent

b) \Rightarrow a). En effet : pour tout $k \in K$ il existe $X_k \in \Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ tel que

$$(U, k) = X_k \circ M.$$

L'application $k \rightsquigarrow X_k$ de K dans $\Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ est linéaire, d'Hilbert-Schmidt. En effet si (k_n) est une base orthonormée de K , on a

$$\sum_n \|X_{k_n}\|_{\Lambda^2}^2 = \sum_n \|(U, k_n)\|_{\mathcal{M}_\infty^2(\mathbb{R})}^2 = \|U\|_{\mathcal{M}_\infty^2(K)}^2$$

Comme

$$\Lambda^2(M; H, \mathbb{R}) \hat{\otimes}_2 K = \Lambda^2(M; H, K)$$

(ce qui se vérifie facilement), on a donc le résultat.

— Q.E.D. —

Convention : Si $X \in \Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ on notera parfois $\int (X, dM)_H$ ou $\int (X, dM)$ au lieu de $\int X \circ dM$.

Fixons maintenant quelques notations :

Soient H et K deux Hilbert séparables et $(x, y) \in H \times K$. On peut définir les applications linéaires continues suivantes :

$$\begin{aligned} L(x) : K &\rightarrow H \widehat{\otimes}_2 K \text{ définie par } L(x)k = x \otimes k, \quad \forall k \in K, \\ G(y) : H &\rightarrow H \widehat{\otimes}_2 K \text{ définie par } G(y)h = h \otimes y, \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

Naturellement

$$\|L(x)\|_{\mathcal{L}(K, H \widehat{\otimes}_2 K)} = \|x\|$$

et

$$\|G(y)\|_{\mathcal{L}(H, H \widehat{\otimes}_2 K)} = \|y\|.$$

Cela étant si $M \in \mathcal{M}_\infty^2(H)$ et si X est prévisible à valeurs dans K tel que

$$\int_{[0, \infty[} \|X\|_K^2 d\alpha_M < \infty,$$

alors $\mathcal{X} = L(X)$ est un processus à valeurs dans $\mathcal{L}(H, H \widehat{\otimes}_2 K)$.

Je dis qu'il appartient à $\Lambda^2(M; H, H \widehat{\otimes}_2 K)$. En effet :

$$\forall (t, \omega), L(X(t, \omega)) \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega) \in \mathcal{L}_2(H, H \widehat{\otimes}_2 K)$$

puisque $\tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}$ est Hilbert-Schmidt ;

$$(t, \omega) \rightsquigarrow \mathcal{X}(t, \omega) \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}(t, \omega) \text{ est prévisible}$$

d'après la Proposition 2 du §1 et puisque \tilde{Q}_M l'est, ainsi que $\mathcal{X}(t, \omega)$ (X étant prévisible).

Enfin

$$\begin{aligned} \|L(X) \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H, H \widehat{\otimes}_2 K)}^2 &= \sum_n \|L(X) \circ \tilde{Q}_M^{\frac{1}{2}}(e_n)\|_{H \widehat{\otimes}_2 K}^2 \\ &\leq \|L(X)\|_{\mathcal{L}_2(H, H \widehat{\otimes}_2 K)}^2 \sum_n \|Q_M^{\frac{1}{2}}(e_n)\|_H^2 \\ &= \|X\|^2 \end{aligned}$$

(e_n désignant une base orthonormée de H).

Donc

$$\int_{[0, \infty[} \|L(X) \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|^2 d\alpha_M < \infty.$$

Par conséquent l'intégrale $\int L(X) \circ dM$ a un sens.

On la note :

$$\int dM \otimes X, \quad \text{ou} \quad (dM \otimes X)_t;$$

$dM \otimes X$ est donc une martingale à valeurs dans $H \widehat{\otimes}_2 K$.

De la même façon, si $N \in \mathcal{M}_\infty^2(K)$ et si Y est un processus prévisible à valeurs dans H tel que

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \|Y(t, \omega)\|^2 d\langle N \rangle_t \right\} < \infty,$$

on peut définir l'intégrale stochastique $\int G(Y) \circ dN$ que l'on note

$$\int Y \otimes dN \quad \text{ou} \quad Y \otimes dN.$$

Il est facile de voir que pour $(h, k) \in H \times K$ on a :

$$dM \otimes X(h, k) = (X, k)_K \circ d(M, h)_H$$

et

$$Y \otimes dN(h, k) = (Y, h)_H d(N, k)_K.$$

A partir de là on peut, si M et N sont des martingales de carré intégrable à valeurs dans H et K respectivement, considérer le processus **à valeurs dans** $H \widehat{\otimes}_2 K$, défini par :

$$\llbracket M, N \rrbracket := M \otimes N - M_- \otimes dN - dM \otimes N_-;$$

$\llbracket M, N \rrbracket$ coïncide avec l'image du crochet droit $[M, N]$ par l'injection canonique

$$H \widehat{\otimes}_1 K \rightarrow H \widehat{\otimes}_2 K.$$

On peut donc écrire :

$$\llbracket M, N \rrbracket = M \otimes N - M_- \otimes dN - dM \otimes N_- .$$

De la même façon si M et N sont des martingales de carré intégrable à valeurs dans le même Hilbert, il est facile de voir que

$$[M, N] = (M, N)_H - (M_-, dN)_H - (N_-, dM)_H.$$

En conclusion les martingales hilbertiennes de carré intégrable et leurs intégrales stochastiques ont des propriétés identiques aux martingales réelles (ou à valeurs dans des espaces de dimension finie). Nous avons développé les démonstrations nécessitant une certaine gymnastique tensorielle.

Indiquons maintenant, sans développer, les propriétés dont la démonstration est en tout point identique au cas réel :

- a) arrêt pour les L^2 -martingales
- b) $(X \circ M)_T = X^T \circ M = X \circ M^T$.

On peut d'ailleurs, pour les démontrer, s'appuyer sur le résultat "réel" en considérant pour tout $h \in H$ la martingale réelle

$$(h, (X \circ M)_T)_H = (X^*(h) \circ dM)_T.$$