

ADRIAN CONSTANTIN

**Sur un problème aux limites de la théorie du
transfert de masse et de chaleur**

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, n° 2 (1996), p. 63-66

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_63_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur un problème aux limites de la théorie du transfert de masse et de chaleur

Adrian Constantin

Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, 10012 New York

Résumé - *Nous démontrons l'existence des solutions pour un problème aux limites de la théorie du transfert de masse et de chaleur.*

Dans un problème concernant l'analyse du transfert de masse et de chaleur dans une catalypte poreuse on obtient (voir [2]) le problème aux limites suivant

$$(1) \quad y''(x) = \alpha y(x) \exp\left\{\frac{\gamma\beta(1-y(x))}{1+\beta(1-y(x))}\right\},$$

$$(2) \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

où les quantités γ, β et α sont des constantes positives. Une solution du problème est une fonction $y \in C^2[0, 1]$ qui satisfait (1) et (2).

Pennline [3] a démontré l'existence des solutions du problème (1) – (2) au cas où $\gamma\beta \leq 1$ en transformant le problème dans une équation intégrale et en utilisant des techniques itératives. Le but de cette note est de démontrer l'existence des solutions du problème (1) – (2) pour toutes les valeurs positives des paramètres γ et β en utilisant le résultat suivant (voir [1])

Théorème du point fixe de Schauder. *Soit O un sous-ensemble ouvert d'un ensemble convexe S dans un espace de Banach et supposons que $0 \in O$. Si $A : O \cup (\partial O) \rightarrow S$ est une application compacte, alors*

(i) A a un point fixe dans $O \cup (\partial O)$;

ou

(ii) il y a un point $u \in \partial O$ et un $\lambda \in (0, 1)$ tels que $u = \lambda Au$.

On a noté par ∂O la frontière de l'ensemble ouvert O .

Théorème. *Le problème (1) – (2) admet une solution $y(x)$ telle que $0 \leq y(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.*

Démonstration. On va établir des estimations *a priori*, indépendantes de $\lambda \in (0, 1]$, pour les solutions de la famille de problèmes

$$(3.\lambda) \quad y''(x) = \lambda \alpha y(x) \exp\left\{\frac{\gamma \beta (1 - y(x))}{1 + \beta (1 - y(x))}\right\},$$

$$(4.\lambda) \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Soit $\psi(x)$ une solution du problème (3. λ) – (4. λ) pour un $\lambda \in (0, 1]$.

Montrons que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ pour $0 \leq x \leq 1$.

Supposons que le maximum de $\psi(x)$ sur $[0, 1]$ est plus grand que 1 et qu'il est atteint en un point $x_0 \in [0, 1]$. On ne peut pas avoir $x_0 \in (0, 1)$ car dans ce cas on obtient la contradiction

$$0 \geq \psi''(x_0) = \lambda \alpha \psi(x_0) \exp\left\{\frac{\gamma \beta (1 - \psi(x_0))}{1 + \beta (1 - \psi(x_0))}\right\} > 0.$$

Comme $\psi(1) = 1$ il reste comme seule possibilité $x_0 = 0$. D'autre part les relations $\psi(0) > 1$ et $\psi(1) = 1$ impliquent l'existence d'un point $x_1 \in (0, 1)$ tel que $\psi'(x_1) < 0$ et $\psi(x) \geq 1$ sur l'intervalle $[0, x_1]$, en obtenant

$$\psi''(x) = \lambda \alpha \psi(x) \exp\left\{\frac{\gamma \beta (1 - \psi(x))}{1 + \beta (1 - \psi(x))}\right\} > 0, \quad x \in [0, x_1],$$

ce qui n'est pas possible (on aurait $\psi'(x)$ croissante sur $[0, x_1]$ mais $\psi'(0) = 0$ et $\psi'(x_1) < 0$). Toutes ces considérations montrent que $\psi(x) \leq 1$ sur $[0, 1]$ et similairement on peut voir que $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

En utilisant la relation $\psi(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$, on obtient

$$|\psi''(x)| \leq \lambda \alpha \psi(x) \exp\left\{\frac{\gamma \beta (1 - \psi(x))}{1 + \beta (1 - \psi(x))}\right\} \leq \alpha \exp(\gamma \beta), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et (tenant compte du fait que $\psi'(0) = 0$)

$$|\psi'(x)| \leq \alpha \int_0^x \exp(\gamma\beta) dt \leq \alpha \exp(\gamma\beta), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

On a donc montré que si $\psi(x)$ est une solution du problème (3.λ) – (4.λ) pour un $\lambda \in (0, 1)$ quelconque, alors

$$\sup_{x \in [0,1]} \{|\psi(x)|\} \leq 1, \quad \sup_{x \in [0,1]} \{|\psi'(x)|\} \leq \alpha \exp(\gamma\beta), \quad \sup_{x \in [0,1]} \{|\psi''(x)|\} \leq \alpha \exp(\gamma\beta).$$

Soit $C[0, 1]$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ avec la norme $\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} \{|u(x)|\}$ pour $u \in C[0, 1]$. Dans $C^1[0, 1]$ on considère la norme $\|u\|_1 = \max \{\|u\|, \|u'\|\}$, $u \in C^1[0, 1]$, et l'espace de Banach $C^2[0, 1]$ est considéré avec la norme $\|u\|_2 = \max \{\|u\|, \|u'\|, \|u''\|\}$ pour $u \in C^2[0, 1]$.

Définissons l'ensemble

$$S = \{u \in C^2[0, 1] : u'(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

L'opérateur $L : S \rightarrow C[0, 1]$ défini par $Lu = u''$ est injectif et surjectif. Soit l'application

$$F : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad F(u(x)) = \alpha u(x) \exp\left(\frac{\gamma\beta(1-u(x))}{1+\beta(1-u(x))}\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et notons par $j : S \rightarrow C^1[0, 1]$ l'injection naturelle. Si

$$O = \{u \in S : \sup_{x \in [0,1]} \{|u(x)|, |u'(x)|, |u''(x)|\} < 1 + \alpha \exp(\gamma\beta)\}$$

on considère $A = L^{-1}Fj : O \cup (\partial O) \rightarrow S$. Clairement l'opérateur A est compact et le choix de l'ensemble O fait que l'équation $u = \lambda Au$ ne peut pas avoir une solution $u \in \partial O$ pour $\lambda \in (0, 1)$. En appliquant le théorème du point fixe de Schauder on déduit que l'application A a un point fixe dans O . Ce point fixe est une solution $y(x)$ du problème (1) – (2) et le début de la démonstration ($\lambda = 1$) montre que $y(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$. □

Remarque. Le problème (1) – (2) a une solution unique $y(x)$ telle que $y(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$ si $\gamma\beta \leq 1$.

En effet, si $\gamma\beta \leq 1$ alors la fonction $f(y) = \alpha y \exp(\frac{\gamma\beta(1-y)}{1+\beta(1-y)})$, définie pour $y \in [0, 1]$, est strictement croissante sur $(0, 1)$.

Supposons que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions distinctes du problème (1) – (2) telles que $y_1(x), y_2(x) \in [0, 1]$ pour $x \in [0, 1]$. Sans perdre de généralité on peut supposer que le maximum de la fonction $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$, $x \in [0, 1]$, est strictement positif. Comme $z(1) = 0$ et $z'(0) = 0$, on obtient qu'au point $a \in [0, 1)$ de maximum, d'une part

$$1 \geq y_1(a) > y_2(a) \geq 0$$

et en même temps on a

$$0 \geq z''(a) = f(y_1(a)) - f(y_2(a))$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $f(y_1(a)) - f(y_2(a)) > 0$.

L'auteur remercie le rapporteur pour ses remarques.

Références

1. A. GRANAS, Sur la méthode de continuité de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **282**(1976), 983-985.
2. M. KUBECEK, V. HLAVACEK, Solution of nonlinear boundary value problems, *Chem. Engrg. Sci.*, **29**(1974), 1695-1699.
3. J. A. PENNLIN, Constructive existence and uniqueness for two-point boundary value problems with a linear gradient term, *Appl. Math. Comput.*, **16**(1984), 233-260.