Annales mathématiques Blaise Pascal

Roger Carles

Déformations dans les schémas définis par les identités de Jacobi

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, n° 2 (1996), p. 33-62

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_33_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 2, 1996, pp.33-62

DEFORMATIONS DANS LES SCHEMAS DEFINIS PAR LES IDENTITES DE JACOBI.

Roger CARLES

abstract - Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic zero and Φ_0 a Lie algebra law on the vector space $\mathbb{K}^n$. A deformation of Φ_0 parametrized by a local ring A is a morphism $\mathcal{O} \to A$ where $\mathcal{O}$ is the local ring at the point Φ_0 in the scheme defined by antisymmetric and Jacobi's identities. The category of deformations is constituted of arrows and has an universal object defined by the identity of $\mathcal{O}$.
If A is complete we show that each deformation of Φ_0 up to an equivalence has certain structure constants fixed to constant values. These structure constants correspond to the variation of Φ_0 in its orbit under the canonical action of $GL(n,\mathbb{K})$. This applies to the universal deformation. We so obtain deformations expressed with parameters, called "essential" (with possible nilpotent parameters if the scheme is not reduced at Φ_0), which are running over orbits distinct from the orbit of Φ_0 . The number of the essential parameters is the dimension of the second group of adjoint cohomology of the Lie algebra. The orbit of Φ_0 is open if and only if all the essential parameters are nilpotent. What got a non null obstruction in the theory of *M.Gerstenhaber* of formal deformations and blocked the lifting to an order p for a given tangent vector, corresponds here to a relation $\varepsilon^p=0$ for a parameter $\varepsilon\in\mathcal{O}$. We give as an example the local study of complex Lie algebras $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$ where appears a nilpotent element of order 2 for $n=4p+3>11$.

INTRODUCTION

Un certain nombre de problèmes se formulent de la façon suivante : S est un schéma dont les points géométriques sont des objets d'une certaine catégorie (algèbres de Lie, associatives, etc) sur lequel opère un groupe tel que deux points de S sont conjugués si et seulement si les objets correspondants sont isomorphes. A la suite des premiers travaux de géomètres sur les déformations de structures analytiques, *M.Gerstenhaber* a étudié la variation des lois d'algèbres associatives d'espace vectoriel donné [G2] sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos.
Pour l'espace vectoriel $\mathbb{K}^m$ le schéma est défini par les relations d'associativité (algèbres associatives) ou les identités de *Jacobi* et d'antisymétrie (algèbres de Lie) sur lequel opère canoniquement le groupe linéaire $GL(m,\mathbb{K})$. *Gerstenhaber* définit une déformation de la loi Φ_0 par une série formelle $\Phi(T)=\Phi_0+T.\Phi_1+...+T^p.\Phi_p+...$ vérifiant l'associativité ou les identités de Jacobi et l'antisymétrie. Le vecteur Φ_1 appartient au tangent de Zariski du schéma en Φ_0 identifié au groupe des 2-cocycles $Z^2(\Phi_0,\Phi_0)$ pour une différentielle définie dans la catégorie considérée.
Cette théorie conduit au problème du relèvement des vecteurs tangents. Imposer à

$\Phi(T)$ d'être une loi d'algèbre de Lie donne les équations de déformation qui s'expriment en terme d'obstructions : c'est une suite de 3-classes de cohomologie qui doivent s'annuler successivement. Dans la pratique on est confronté à une double difficulté : la complexité des équations et l'impossibilité de décrire localement le schéma en un point où il est non réduit (c.à.d l'anneau local en ce point contient des éléments nilpotents). Si le groupe de cohomologie adjointe $H^2(\Phi_0,\Phi_0)$ est nul alors l'orbite de Φ_0 est ouverte (*Gerstenhaber*) mais la réciproque est fausse. Si l'orbite de Φ_0 est ouverte, une 2-classe non nulle ne se relève pas en une déformation formelle, on obtient seulement une déformation tronquée à l'ordre défini par l'obstruction. Ceci provient de l'intégrité de l'anneau des séries formelles.
Ce travail, annoncé dans [C2], a pour point de départ le formalisme fonctoriel des schémas d'algèbres de Lie et la définition élargie à un anneau quelconque d'une déformation donnés par *G.Rauch* [Ra]. Ceci conduit à la formulation suivante : une déformation de Φ_0 sur un anneau local A est un morphisme $\mathcal{O} \to A$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau local du schéma au point Φ_0. L'identité pour $A=\mathcal{O}$ est aussi la déformation définie par les germes de fonctions coordonnées, c'est la solution d'un problème universel. La deuxième idée utilisée qui trouve son origine dans un article de *F.Bratzlavsky* [Br] consiste à prendre les valeurs constantes pour un choix de constantes de structure qui donnent une paramétrisation locale de l'orbite dans un sens que l'on précisera (paramètres orbitaux au point Φ_0).
On démontre tout d'abord lorsque A est complet que toute déformation de Φ_0 équivaut à une déformation ayant des valeurs constantes pour un choix donné de paramètres orbitaux. La démonstration utilise un théorème des fonctions implicites formel. Désignons par $(\Phi_0)^k_{ij}+\varepsilon^k_{ij}$ la constante de structure (ou composante) de la déformation indexée par le multi-indice $\binom{k}{ij}$ pour $1\leq i<j\leq n$, $1\leq k\leq n$.
Une nouvelle application de ce théorème aux identités de Jacobi permet d'exprimer les composantes non constantes de la déformation en fonction de certains paramètres ε^k_{ij} appelés *essentiels* dans [Br]. Ces paramètres vérifient des relations déduites des identités de Jacobi restantes. Celles-ci s'expriment par des séries formelles d'ordre ≥ 2 et jouent ici le rôle des obstructions dans [G2]. Il ne figure plus dans la nouvelle déformation équivalente à celle donnée au départ que des paramètres qui décrivent des orbites distinctes de celle de Φ_0 ainsi que des éléments nilpotents. Ceci s'applique à la déformation canonique avec le complété de $\mathcal{O}$ et conduit à l'étude locale du schéma. Le nombre des paramètres essentiels est la dimension de $H^2(\Phi_0,\Phi_0)$ et l'on retrouve les résultats classiques de [G2] et [N-R]. Une algèbre de Lie est rigide (orbite ouverte) si et seulement si sa déformation canonique équivaut à une déformation où tous les paramètres essentiels sont nilpotents. C'est trivialement le cas si $H^2(\Phi_0,\Phi_0)=0$. Dans cette théorie apparaissent des déformations qui n'existent pas sur l'anneau des séries formelles. Par exemple pour $H^2(\Phi_0,\Phi_0)=\mathbb{K}$

l'obstruction empêchant le relèvement à l'ordre p du vecteur tangent correspond ici à une condition de nilpotence $\varepsilon^p=0$ sur le paramètre. Ceci est illustré par l'étude locale des algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$ où $\mathbb{C}^n$ est le $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-module irréductible de dimension n. Cet exemple étudié dans [Ra][Ri] donne pour $n=4p+3>11$ la condition $\varepsilon^2=0$. Cette méthode permet en principe d'expliciter des éléments nilpotents dans l'anneau local du schéma au point considéré. L'étude donnée ici pour la catégorie des algèbres de Lie subsiste sans changement pour celle des algèbres associatives et se généralise à un groupe algébrique opérant algébriquement sur un schéma affine.

Remerciements : *Je remercie ici Monsieur G.Rauch pour de nombreuses discussions sur les déformations et sur ce travail ainsi que mes collègues de l'URA de Poitiers.*

1- GENERALITES SUR LES SCHEMAS D'ALGEBRES DE LIE.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les anneaux considérés sont unitaires commutatifs et munis d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre. Soient e_i, $1\leq i\leq n$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$, A une $\mathbb{K}$-algèbre et $L_n(A)$ l'ensemble des lois d'algèbres de Lie sur A^n définies par les constantes de structure $a^k_{ij}\in A$: $[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n} a^k_{ij}e_k$. Elles vérifient l'antisymétrie $a^k_{ij}=-a^k_{ji}$ et les relations de Jacobi :

1.1 $$\sum_l \left(a^l_{ij}a^m_{lk}+a^l_{jk}a^m_{li}+a^l_{ki}a^m_{lj}\right)=0.$$

Tout morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $f : A\to B$ induit une application $L_n(f) : L_n(A)\to L_n(B)$ par $(a^k_{ij})\to(f(a^k_{ij}))$; L_n est un foncteur de la catégorie des $\mathbb{K}$-algèbres associatives abéliennes vers celle des ensembles. La donnée d'une loi de A-algèbre de Lie sur A^n équivaut à celle d'un $\mathbb{K}$-morphisme d'anneaux $f : \mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac\to A$ où les X^k_{ij}, $1\leq i<j\leq n$, $1\leq k\leq n$, sont des indéterminées et Jac l'idéal engendré par les polynômes :

1.2 $$\sum_l \left(X^l_{ij}X^m_{lk}+X^l_{jk}X^m_{li}+X^l_{ki}X^m_{lj}\right)$$

avec X^k_{ji} égal à $-X^k_{ij}$ pour $j>i$ et à 0 pour $j=i$.

Le foncteur L_n s'écrit $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac,-)$; il est représentable par $\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac$ et s'identifie au schéma $Spec(\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac)$, [Ra]. On appelle $L_n\simeq Spec(\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac)$ le schéma des $\mathbb{K}$-algèbres de Lie de dimension n défini par les identités de Jacobi. L'ensemble des points rationnels de L_n s'identifie à $L_n(\mathbb{K})$. Une loi d'algèbre de Lie $\Phi_0=(c^k_{ij})$ est un point de $L_n(\mathbb{K})$ défini par un $\mathbb{K}$-morphisme λ_0: $\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac\to\mathbb{K}$, ou par l'idéal maximal $Ker\,\lambda_0$, ou encore par l'injection $Spec\,\lambda_0$: $Spec\,\mathbb{K}\to L_n$.

Produit intérieur, cohomologie adjointe.- Soient V le A-module libre A^n et $C(V,V)$ la somme directe des $C^p(V,V)$, $p\in\mathbb{N}$, constitués des applications p-multilinéaires alternées, munie de la loi $\circ$ de A-algèbre définie pour $(f_p,g_q)\in C^p(V,V)\times C^q(V,V)$ par

1.3 $$g_q\circ f_p(x_1,\dots,x_{p+q-1})=\sum_\sigma sgn(\sigma)\; g_q(f_p(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}),\,x_{\sigma(p+1)},\dots,x_{\sigma(p+q-1)})$$

où la somme porte sur les permutations σ de $(1,\dots,p+q-1)$ telles que $\sigma(1)<\dots<\sigma(p)$ et $\sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q-1)$. On en déduit le crochet [ ] défini par A-bilinéarité et

1.4 $\quad [f_p,g_q] = f_p \circ g_q - (-1)^{(p-1)(q-1)}\, g_q \circ f_p$.

Cette loi munit $C(V,V)$ d'une structure de A-superalgèbre de Lie [G1] :

1.5 $\quad (-1)^{(p-1)(r-1)}[[f_p,g_q],h_r]+(-1)^{(q-1)(p-1)}[[g_q,h_r],f_p]+(-1)^{(r-1)(q-1)}[[h_r,f_p],g_q]=0$

1.6 $\quad [g_q,f_p] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[f_p,g_q]$

Une loi $\Phi\in C^2(V,V)$ est celle d'une A-algèbre de Lie si $[\Phi,\Phi]=2\Phi\circ\Phi=0$. Si $A=\mathbb{K}$, à une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de loi Φ_0 sur V (on écrit indifféremment $\mathfrak{g}$ ou Φ_0) on associe le complexe de *Chevalley* sur $C(V,V)$ à valeur adjointe défini par la différentielle d :

1.7 $\quad (df)(x_1,\dots,x_{p+1})=$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}f(\Phi_0(x_i,x_j),x_1\dots\hat{x}_i\dots\hat{x}_j,x_{p+1})+\sum_i(-1)^{i+1}\Phi_0(x_i,f(x_1\dots\hat{x}_i\dots x_{p+1}))$$

où ^ indique l'omission du vecteur correspondant. Avec 1.4 on a pour $f_p\in C^p(V,V)$:

1.8 $\quad [\Phi_0,f_p] = (-1)^{p+1}df_p$.

On désigne respectivement par $B^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $Z^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et $H^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ les espaces des p-cobords, des p-cocycles et des p-classes de cohomologie obtenus.

Schéma réduit associé.- Le schéma L_n n'est pas réduit en général. le spectre de $\mathbb{K}[X^k_{ij}]/\sqrt{Jac}$ noté $L^{\text{réd}}_n$ s'appelle le schéma réduit associé à L_n. Le quotient d'anneaux q : $\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac \to \mathbb{K}[X^k_{ij}]/\sqrt{Jac}$ induit un morphisme injectif *Spec* q : $L^{\text{réd}}_n \to L_n$ qui met en correspondance biunivoque les ideaux maximaux c'est à dire les points. En chaque point, q induit un morphisme d'anneaux locaux, c'est à dire un morphisme d'anneaux unitaires qui envoie l'idéal maximal dans l'idéal maximal, soit q^* : $\mathcal{O} \to \mathcal{O}^{\text{réd}}=\mathcal{O}/\sqrt{\mathcal{O}}$ où $\sqrt{\mathcal{O}}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau local $\mathcal{O}$ au point considéré. Le schéma L_n est dit réduit au point $\mathfrak{g}$ si $\mathcal{O}^{\text{réd}}$ et $\mathcal{O}$ sont égaux.

Espace tangent.- Le tangent de Zariski $T_{\mathfrak{g}}(L_n)(\mathbb{K})$ du schéma L_n au point $\mathfrak{g}$ est caractérisé par la proposition suivante démontrée dans [Ra] :

Proposition 1.9 - *L'espace tangent de Zariski de L_n au point $\mathfrak{g}$ est isomorphe à chacun des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels suivants: (1) $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{O},\mathbb{K})$; (2) l'espace des morphismes $\mathbb{K}$-linéaires $Hom_{\mathbb{K}}(m/m^2,\mathbb{K})$ où m est l'ideal maximal de $\mathcal{O}$; (3) l'espace des parties linéaires des morphismes de $\mathbb{K}$-anneaux locaux $\mathcal{O} \to \mathbb{K}[T]/(T^2)$; (4) $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.*

Remarques 1.10 (a) L'anneau local $\mathcal{O}$ est engendré par les germes au point $\mathfrak{g}$ des fonctions coordonnées notés encore X^k_{ij} qui définissent une loi $\Phi=(X^k_{ij})\in L_n(\mathcal{O})$.

Chaque dérivation D agissant sur l'ensemble des relations de Jacobi $\Phi\circ\Phi=0$ donne $D\Phi\circ\Phi_0+\Phi_0\circ D\Phi=0$ d'où une application $\mathbb{K}$-linéaire injective $D \to D\Phi=(DX^k_{ij})$ de $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{O},\mathbb{K})$ dans $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ d'après 1.8, D étant définie par son action sur les générateurs de $\mathcal{O}$. Pour $\Psi\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ on définit $D\in Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{O},\mathbb{K})$ par $DX^k_{ij}=\Psi^k_{ij}$ d'où l'isomorphie de (1) et (4).

(b) Chaque morphisme $\mathcal{O} \to \mathbb{K}[T]/(T^2)$ est défini par ses valeurs prises sur les générateurs donc sur $\Phi=(X^k_{ij})$ par $\Phi \to \Phi_0+T\ \Theta$ avec $\Theta\in C^2(V,V)$ et $T=T \bmod T^2$. Les relations de Jacobi donnent $(\Phi_0+T\ \Theta)^2=0$ d'où $\Theta\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ ce qui montre l'isomorphie de (3) et (4). Chaque morphisme $\mathcal{O} \to \mathbb{K}[T]/(T^2)$ est défini par $\Phi \to \Phi_0+T.D\Phi$ avec $D\in Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{O},\mathbb{K})$ donc en fait par D, cf(a).

Action de groupe -le groupe $GL(n,A)$ des matrices inversibles $n\times n$ à coefficients *dans* A opère sur $L_n(A)$ sous l'action canonique qui à $(S,\Phi)\in GL(n,A)\times L_n(A)$ associe la loi $S_*\Phi$ définie sur la base canonique e_i de A^n par :

1.11 $$(S_*\Phi)(e_i,e_j) = S(\Phi(S^{-1}e_i,\ S^{-1}e_j))$$

Si $A=\mathbb{K}$, l'orbite $\Omega(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ sous $GL(n,\mathbb{K})$ est une sous-variété algébrique de $L_n(\mathbb{K})$, pour sa structure de schéma réduit, isomorphe au quotient de $GL(n,\mathbb{K})$ par le stabilisateur du point $\mathfrak{g}$ égal au groupe $Aut(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$. On a :

Proposition 1.12- *L'espace tangent à l'orbite* $\Omega(\mathfrak{g})$ *au point* $\mathfrak{g}$ *s'identifie à* $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

2. DEFORMATIONS D'UNE LOI D'ALGEBRE DE LIE.

On suppose à présent que A est un anneau local d'idéal maximal noté $m(A)$ ou m, de corps résiduel $\mathbb{K}$ et d'application quotient $pr : A \to A/m$. Une déformation d'anneau de base A, ou paramétrée par A, de la loi $\Phi_0\in L_n(\mathbb{K})$ est une loi $(a^k_{ij})\in L_n(A)$ telle que $pr(a^k_{ij})=(\Phi_0)^k_{ij}$ pour tout indice [Ra] ; les a^k_{ij} sont appelés composantes ou constantes de structure de la déformation. En d'autres termes c'est un morphisme d'anneaux $f : \mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac \to A$ tel que $pr\circ f=\lambda_0$ avec λ_0 le morphisme $X^k_{ij} \to (\Phi_0)^k_{ij}$ qui définit le point Φ_0 dans le schéma. Ceci équivaut à dire que f envoie $M=Ker\ \lambda_0$ dans $m(A)$. On en déduit un morphisme d'anneaux locaux qui prolonge f du localisé de $\mathbb{K}[X^k_{ij}]/Jac$ par M dans A. Ce localisé est l'anneau local $\mathcal{O}$ du schéma au point Φ_0 et l'on peut énoncer :

Proposition 2.1- *Une déformation de base A d'une loi* Φ_0 *est la donnée équivalente de (i) ou (ii) : (i)* $(a^k_{ij})\in L_n(A)$ *tel que* $pr(a^k_{ij})=(\Phi_0)^k_{ij}$ *pour tout* $(^k_{ij})$;
(ii) un morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O} \to A$.

Pour chaque point Φ_0 on a un foncteur $Déf(\Phi_0;-)$ de la catégorie des anneaux locaux vers celle des ensembles qui à A fait correspondre l'ensemble $Déf(\Phi_0;A)$ des déformations de base A de Φ_0; c'est aussi l'ensemble des flèches $\mathcal{O} \to A$ d'après 2.1. A

chaque morphisme $h : A \to B$ le foncteur $Déf(\Phi_0;-)$ associe l'application $f \to h°f$ de $Déf(\Phi_0;A)$ vers $Déf(\Phi_0;B)$ appelée *un changement de base de la déformation.* Ce foncteur s'écrit $Hom(\mathcal{O},-)$ pour la catégorie des $\mathbb{K}$-anneaux locaux et est représentable par $\mathcal{O}$. On définit la catégorie des déformations du point Φ_0 comme ayant pour objets les flèches $\mathcal{O} \to A$ et pour morphismes les diagrammes commutatifs
$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O} & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & \to & B \end{array}.$$

Isomorphisme de déformations.- Deux déformations de Φ_0 , notées (a^k_{ij}) et (b^k_{ij}), de base A et B respectivement sont isomorphes s'il existe un $\mathbb{K}$-isomorphisme $f : A \to B$ tel que $b^k_{ij}=f(a^k_{ij})$ pour tout ijk. Si $B=A$, deux déformations isomorphes sont conjuguées sous l'action naturelle du groupe des $\mathbb{K}$-automorphismes de A sur $Déf(\Phi_0;A)$.

Déformations particulières : (A) La déformation identité ou canonique:

Definition 2.2.- On appelle *déformation identité ou canonique de* Φ_0 la déformation $id : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ définie par la loi $X=(X^k_{ij})$ des germes des fonctions coordonnées en Φ_0. C'est un objet universel initial dans la catégorie des déformations et toute déformation s'en déduit par changement de base.

(B) Déformation constante : On appelle *déformation constante de base A* le morphisme composé de $pr : \mathcal{O} \to \mathbb{K}$ avec l'injection canonique de $\mathbb{K}$ dans A, soit $pr^A: \mathcal{O} \to A$, qui à x associe $pr(x).1_A$: ses constantes de structure sont celles de Φ_0.

(C) déformations tronquées:

Définition 2.3.- On appelle *déformation tronquée à l'ordre p associée à* $f : \mathcal{O} \to A$ la déformation $f_p = \pi_p°f$ de base A/m^{p+1} où π_p désigne le morphisme quotient $A \to A/m^{p+1}$. En particulier f_1 est *la déformation tangente associée à f* .

Remarque 2.4 - D'après la proposition 1.9(3) les vecteurs tangents au schéma L_n en Φ_0 sont en bijection avec les déformations de base $\mathbb{K}[[T]]/(T^2)$.

Proposition 2.5. - *Soit* ξ_s , $s\in I$, *une famille de m vérifiant* $m = \sum_{s\in I} A.\xi_s + m^2$ *et minimale (c.à.d les* $\pi_1(\xi_s)$ *forment une base de* $\pi_1(m)$*). La déformation tangente associée à* $\Phi\in Déf(\Phi_0;A)$ *s'écrit alors* $\Phi_1=\Phi_0+ \sum_{s\in I}\pi_1(\xi_s)\Psi_s$ *avec* $\Psi_s\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $s\in I$.

preuve- Il suffit d'écrire $\Phi_1=(\pi_1(a^k_{ij}))=\Phi_0+\sum_{s\in I}\pi_1(\xi_s)\Psi_s$ avec $\Psi_s\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et $\Phi_1°\Phi_1=0$.

(D) Déformations au sens de M.Gerstenhaber.

Une *déformation formelle à un paramètre T* ou *au sens de Gerstenhaber* [G2] est un morphisme d'anneaux locaux $f : \mathcal{O} \to \mathbb{K}[[T]]$. Les constantes de structure de la déformation sont $c^k_{ij}(T)=f(X^k_{ij})$ et la loi déformée de $\Phi_0=(c^k_{ij}(0))$ s'écrit

$\Phi(T)=(c^k_{ij}(T))=\sum_{p=0}^{\infty}T^p\Phi_p \in \mathbb{K}[[T]]\otimes C^2(V,V)$. On a $\Phi_1\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et calculer la suite des termes $\Phi_2,...\Phi_p$...de $C^2(V,V)$ s'appelle intégrer Φ_1 ou sa classe $[\Phi_1]$.

Le calcul de Φ_{p+1} se fait en remontant la déformation tronquée f_p donnée par $\Phi_0 + \overline{T}\,\Phi_1 + \overline{T}^p\Phi_p$ en f_{p+1} selon le diagramme commutatif suivant :

(2.6)
$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "f_p"] \arrow[dr, "f_{p+1}"'] & \mathbb{K}[[T]]/(T^{p+1}) \\ & \mathbb{K}[[T]]/(T^{p+2}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On exprime que f_{p+1} est une déformation c.à.d. que $\Psi = \Phi_0 + T\,\Phi_1 + \dots + T^{p+1}\Phi_{p+1}$ vérifie les relations de Jacobi modulo T^{p+2} :

$[\Psi,\Psi]$=(termes de degré $\leq p$)$+T^{p+1}\sum_{i+j=p+1}[\Phi_i,\Phi_j]$+(termes de degré $\geq$p+2).

Le premier groupe de termes est nul puisque f_p est une déformation et la condition $\sum_{i+j=p+1}[\Phi_i,\Phi_j]=0$ fournit la p+1$^{\text{ème}}$ équation de déformation :

(2.7) $$d\,\Phi_{p+1} = 1/2 \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=p+1}} [\Phi_i,\Phi_j].$$

Le terme de droite ne dépend que de f_p et appartient à $Z^3(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ (la preuve utilise 1.5 et l'égalité 2.7 aux ordres inférieurs) ; sa classe $\omega(f_p)\in H^3(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ s'appelle l'obstruction de f_p et vérifie :

(2.8) *f_p se remonte en f_{p+1} si et seulement si* $\omega(f_p)=0$.

(*E*) *Déformations à un paramètre.*

Soit A complet pour la topologie de *Krull* (on prend le complété). Une déformation *à un paramètre dans A* est un morphisme $f : O \to A$ défini par $f(X^k_{ij})=c^k_{ij}(\varepsilon)$ avec $\varepsilon\in m(A)$ et $c^k_{ij}(T)$ une série formelle à une indéterminée T. La loi déformée s'écrit

$\Phi(\varepsilon)=\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p\Phi_p$ avec $\Phi_p\in C^2(V,V)$.

Proposition 2.9 - *Soit f une déformation à un paramètre* $\varepsilon\in m(A)$. *Si* $\{1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^p\}$ *est libre sur* $\mathbb{K}$ *on définit l'obstruction* $\omega(f_p)$ *comme en* 2.8 ; *on a 1) ou 2) :*

1) la suite ε^n *est* $\mathbb{K}$*-libre : la déformation f est formelle et les* $\omega(f_n)$ *sont nuls ;*

2) il existe un plus petit entier p tel que $\{1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^{p+1}\}$ *ne soit pas libre sur* $\mathbb{K}$ *: on a alors* $\varepsilon^{p+1}=0$. *En particulier c'est toujours le cas lorsque* $\omega(f_p)\neq 0$.

preuve : Toute relation non triviale de type formel $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varepsilon^n=0$ s'écrit $\varepsilon^m.h(\varepsilon)=0$ avec $h(0)\neq 0$ pour un entier $m\geq 1$, d'où $\varepsilon^m=0$. Dans le cas 2) on a forcément $\varepsilon^{p+1}=0$. L'expression du crochet $[\Phi(\varepsilon),\Phi(\varepsilon)]=0$ donne $\varepsilon^{p+1}(-2\,d\Phi_{p+1}+\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=p+1}}[\Phi_i,\Phi_j])$ plus des termes de degrés supérieurs de sorte que $\omega(f_p)\neq 0$ entraîne bien $\varepsilon^{p+1}=0$. ■

Actions de groupes- La projection pr du $\mathbb{K}$-anneau local A induit un morphisme de groupes *pr* de $GL(n,A)$ vers $GL(n,\mathbb{K})$ dont l'image inverse de $Aut(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe $Stab(\Phi_0;A)$ qui laisse $Déf(\Phi_0;A)$ invariant sous l'action 1.11. Le noyau de pr est un sous-groupe invariant $G(A)$ égal à l'ensemble $I+M_n(m)$ des matrices S telles que $S_{ij}-\delta_{ij}\in m(A)$ avec δ_{ij} le symbole de *Kronecker*. On a donc $Stab(\Phi_0;A)=Aut(\mathfrak{g})+M_n(m)=Aut(\mathfrak{g}).G(A)$. Suivant M.*Gerstenhaber* adoptons la définition :

Définition 2.10 - Deux déformations de $Déf(\Phi_0;A)$ conjuguées sous l'action * du groupe $G(A)$ sont dite équivalentes. On appelle *déformation triviale de base A* toute déformation équivalente à la déformation constante pr^A.

Remarque 2.11- La définition 2.10 donne une *équivalence forte pour les déformations, l'équivalence faible étant donnée par l'action du groupe* $Stab(\Phi_0;A)$. La question posée par J.L.*Koszul* de la comparaison des deux équivalences reste ouvert. Ces équivalences se conservent par changement d'anneau de base. Le choix fort est principalement motivé par le résultat classique suivant de preuve immédiate :

Proposition 2.12 - *Avec les notations de 2.5 si les déformations* Φ *et* Φ' *sont équivalentes, alors les classes de cohomologie de* Ψ_s *et* Ψ_s' *sont égales pour tout* $s\in I$.

Les classes d'équivalence de déformations tangentes sont en bijection avec les points d'une somme directe de copies de $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. Pour l'équivalence faible elles sont données par les orbites sous l'action canonique du groupe $Aut(\mathfrak{g})$ sur la même somme directe de copies de $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. La classe nulle est la même dans les deux cas.

Définition 2.13 - Une loi Φ_0 est dite *A-rigide* si toute déformation de base A est triviale, autrement dit si $Déf(\Phi_0;A)$ contient une seule G(A)-orbite.

Cette notion de rigidité dépend de A. Si A est l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[T]]$ la A-rigidité équivaut pour l'orbite de $\mathfrak{g}$ d'être ouverte pour la topologie de *Zariski* de $L_n(\mathbb{K})$, [G-S] ; elle est appelée *rigidité géométrique de* $\mathfrak{g}$. Si $A=\mathbb{K}[T]/(T^2)$ la proposition 2.12 entraîne que la A-rigidité équivaut à $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$, appelée *rigidité infinitésimale de* $\mathfrak{g}$. Dans [N-R] le *Théorème de rigidité* dit que *la rigidité infinitésimale entraîne la rigidité géométrique* mais la réciproque est fausse, [Ra][Ri].

3 - FIXATION DES PARAMETRES ORBITAUX.

Une paramétrisation linéaire du tangent à l'orbite $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ définit une paramétrisation de l'orbite $\Omega(\Phi_0)$ au voisinage de Φ_0. La construction se fait pour certains choix d'ensembles $\mathcal{A}$ de multi-indices appelés admissibles. Dans ce paragraphe on montre que toute déformation de Φ_0 sur un anneau A complet équivaut à une déformation dont les constantes de structure multi-indiciées par $\mathcal{A}$ sont fixées. On utilise un théorème des fonctions implicites formel [Bo].

Théorème 3.1 (*inversion locale formelle*) *Soient A un anneau commutatif unitaire et $f_j(T)\in A[[T]]$, $1\leq j\leq n$, des séries formelles à n indéterminées $T=(T_1,...,T_n)$ qui vérifient $f_j(0)=0$. Si le Jacobien $|\partial f_j/\partial T_i(T=0)|$ est inversible dans A alors il existe des séries $g_k(T)\in A[[T]]$ avec $g_k(0)=0$ pour $1\leq k\leq n$ telles que $f=(f_k)_{1\leq k\leq n}$* et *$g=(g_k)_{1\leq k\leq n}$ vérifient $(g\circ f)(T)=T$.*

Remarque 3.2 - Les séries $g(T)$ et $f(T)$ sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 3.3-(*fonctions implicites*) *Soit $f=(f_1,...f_q)\in A[[T_1,...,T_{p+q}]]^q$. Si le Jacobien $|\partial f_j/\partial T_{p+i}(0)|$ est inversible dans A et si $f(0)=0$ alors il existe $\varphi\in A[[T_1,...,T_p]]^q$ unique avec $\varphi(0)=0$ tel que $f(T_1,\ldots,T_p,\varphi(T_1,...,T_p))=0$.*

Ensembles admissibles.

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les multi-indices $\binom{k}{i\,j}$ pour $1\leq i,j,k\leq n$ et $i<j$. On convient de noter $|\mathcal{E}|$ le cardinal d'une partie $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{J}$. Soient $e_k^{i\,j}$ la base canonique de $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ définie par $e_k^{i\,j}(e_p,e_q)=\delta_{ip}\delta_{jq}e_k$ avec δ_{ij} le symbole de *Kronecker* et $e^k_{i\,j}=(e_k^{i\,j})^*$ sa base duale canonique indexée par $\mathcal{J}$. Soit $\lambda^k_{i\,j}$ la restriction à $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ de $e^k_{i\,j}$.

Définition 3.4 - On appelle *ensemble admissible associé à* Φ_0 toute famille $\mathcal{A}$ de multi-indices $\binom{k}{ij}$ telle que les λ^k_{ij} correspondants forment une base de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})^*$.

Posons $e_\alpha=e^k_{i\,j}$ et désignons par $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ l'application linéaire de $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ vers $\mathbb{K}^{|\mathcal{A}|}$ qui à Ψ associe $(e_\alpha(\Psi))_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Par définition de $\mathcal{A}$ sa restriction à $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ notée $\lambda=(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est un isomorphisme linéaire de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{K}^{|\mathcal{A}|}$. L'injection λ^{-1} définit une paramétrisation linéaire de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. Si Λ : $\Omega(\mathfrak{g})\to\mathbb{K}^{|\mathcal{A}|}$ désigne la restriction de l'application linéaire $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ à $\Omega(\mathfrak{g})$, son application tangente au point $\mathfrak{g}$ est l'isomorphisme linéaire λ. Si l'on prend $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ pour fixer les idées, le théorème d'inversion locale classique appliqué aux variétés analytiques $\Omega(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}^{|\mathcal{A}|}$ assure l'existence d'une carte locale au point Φ_0. L'isomorphisme réciproque fournit donc une paramétrisation de $\Omega(\Phi_0)$ au voisinage de Φ_0 définie par $\mathcal{A}$. Pour cette raison on appelle l'ensemble des $X^k_{i\,j}$ indexés par $\mathcal{A}$ *une famille de coordonnées orbitales* (ou *paramètres orbitaux*) *au point* $\mathfrak{g}$.

3.5 $\quad |\mathcal{A}|=\dim B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\dim\Omega(\mathfrak{g})$.

La forme linéaire $-\lambda^k_{ij}\circ d^1$ sur $C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ (1.7) est l'application $\delta\to(\delta.\Phi_0)^k_{ij}$, où le point désigne l'action canonique $(\delta.\Psi)(\ )=\delta\circ\Psi-\Psi(\delta(\ ),\ )-\Psi(\ ,\delta(\ ))$. Un choix de $\mathcal{A}$ donné par 3.4 correspond à celui d'une famille libre maximale de formes linéaires $\delta\to(\delta.\Phi_0)^k_{ij}$. On l'obtient en sélectionnant un sous-système minimal d'équations linéaires en δ, $(\delta.\Phi_0)^k_{ij}=0$, équivalant au système $\delta.\Phi_0=0$. Notons que δ vérifie ce système si et seulement si δ est une dérivation de $\mathfrak{g}$.

Notation 3.6- Si $\Psi\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ est définie par ses composantes Ψ^k_{ij} sur la base e^{ij}_k on notera $\Psi^{\mathcal{A}}$ le vecteur de $\mathbb{K}^{|\mathcal{A}|}$ défini par les composantes indexées par $\binom{k}{ij}\in\mathcal{A}$. Avec cette convention $\mathcal{A}$ vérifie 3.4 si et seulement si les systèmes $(\delta.\Phi_0)^{\mathcal{A}}=0$ et $\delta.\Phi_0=0$ sont équivalents et si $\mathcal{A}$ est minimal pour cette propriété.

Orbites de $Déf(\Phi_0;A)$- Supposons A complet. Etant donné une déformation $Z\in Déf(\Phi_0;A)$ on veut résoudre l'équation $Y=S*Z$ en $(Y,S)\in Déf(\Phi_0;A)\times G(A)$. Pour cela on considère l'expression formelle $f(T,U)=(1+T)*Z-Z-U$ de composantes $f^k_{ij}(T,U)\in A[[T,U]]$ en les indéterminées $(T,U)=(T_{ij},U^m_{pq})$, $1\leq i,j\leq n$, $\binom{m}{pq}\in\mathcal{J}$. Soit $e^j_i\in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $1\leq i,j\leq n$, défini par $e^j_i(e_k)=\delta_{kj}e_i$ avec δ_{kj} le symbole de *Kronecker*. Soient $\mathcal{A}$ un ensemble admissible associé à Φ_0 , $\mathcal{B}$ son complémentaire dans $\mathcal{J}$, θ une partie minimale de $\{1,...,n\}^2$ telle que les $d^1(e^j_i)$, $(i,j)\in\theta$, constituent une base de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et ρ son complémentaire dans $\{1,...,n\}^2$. L'espace vectoriel engendré par les e^j_i pour $(i,j)\in\theta$ est un supplémentaire de $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ dans $C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et l'on a $|\theta|=|\mathcal{A}|=r$. On utilise l'écriture suivante qui regroupe des paquets de composantes $f=(f^{\mathcal{A}},f^{\mathcal{B}})$, $U=(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{B}})$ et $T=(T^\theta,T^\rho)$. Posons $W=(W^\rho,W^{\mathcal{A}})$ avec W^ρ l'ensemble des indéterminées $W_{ij}=T_{ij}$ pour $(i,j)\in\rho$ et $W^{\mathcal{A}}$ l'ensemble des $W^k_{ij}=U^k_{ij}$ pour $\binom{k}{ij}\in\mathcal{A}$. Avec ces notations on peut énoncer :

Théorème 3.7.- *Soient un anneau local complet A, une déformation $Z\in Déf(\Phi_0;A)$ et un ensemble de multi-indices admissible $\mathcal{A}$ associé à Φ_0. Il existe une suite de séries formelles φ indexées par $\theta\cup\mathcal{B}$ appartenant à $A[[W]]$ avec $\varphi(0)=0$ telle que, si $S(W)$ désigne la matrice $1+(W^\rho,\varphi^\theta(W))\in G(A[[W]])$, l'équation $Y=S*Z$ admet la solution suivante sur l'anneau $A[[W]]$:*

(a) $Y^{\mathcal{A}}=Z^{\mathcal{A}}+W^{\mathcal{A}}=(S(W)*Z)^{\mathcal{A}}$; (b) $Y^{\mathcal{B}}=Z^{\mathcal{B}}+\varphi^{\mathcal{B}}(W)=(S(W)*Z)^{\mathcal{B}}$.

De plus chaque substitution μ de W dans le produit cartésien de $|\mathcal{A}|+|\rho|$ copies de $m(A)$ donne une déformation $Y\in Déf(\Phi_0;A)$ équivalente à Z, soit :

(a') $Y^{\mathcal{A}}=Z^{\mathcal{A}}+\mu^{\mathcal{A}}=(S(\mu)*Z)^{\mathcal{A}}$; (b') $Y^{\mathcal{B}}=Z^{\mathcal{B}}+\varphi^{\mathcal{B}}(\mu)=(S(\mu)*Z)^{\mathcal{B}}$.

Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.8 - *Pour tout (i,j) on a* $(\partial f/\partial T_{ij})(0,0)=e^j_i.Z$.

Preuve: L'expression $(\partial f/\partial T_{ij})(0,0)$ est égale à $(\partial(S*Z)/\partial S_{ij})(S=1)$ qui s'écrit encore $e^j_i(Z(\ ))-Z(e^j_i(\ ),\ )-Z(\ ,e^j_i(\ ))$, c'est à dire $e^j_i.Z$. ∎

Preuve du théorème: Par définition de θ et $\mathcal{A}$ la famille des vecteurs $e^j_i.\Phi_0\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ ainsi que celle des vecteurs tronqués $(e^j_i.\Phi_0)^{\mathcal{A}}\in\mathbb{K}^r$, indexées par θ, sont libres sur $\mathbb{K}$. Le déterminant $\Delta(Z)$ des r vecteurs $(e^j_i.Z)^{\mathcal{A}}\in A^r$, $(i,j)\in\theta$, vérifie $pr(\Delta(Z))=\Delta\neq0$, où Δ est le déterminant des r vecteurs $(e^j_i.\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ indexés par θ, de sorte que $\Delta(Z)$ est inversible dans A. On a $f(0,0)=0$ et la matrice jacobienne $M(f)$ des dérivées partielles de f au point (0,0) par rapport aux indéterminées T^θ et $U^{\mathcal{B}}$ s'écrit :

$$M(f) = \left[\begin{array}{c|c} \partial f^{\mathcal{A}}/\partial T^{\theta} & \partial f^{\mathcal{A}}/\partial U^{\mathcal{B}} = 0 \\ \hline \partial f^{\mathcal{B}}/\partial T^{\theta} & \partial f^{\mathcal{B}}/\partial U^{\mathcal{B}} = 1 \end{array}\right]$$

Le déterminant de cette matrice carrée est égal au déterminant du premier bloc, c'est à dire des r vecteurs $(e_i^j.Z)^{\mathcal{A}}$, $(i,j)\in\theta$, d'après 3.8. Il est donc égal à $\Delta(Z)$, inversible dans A, d'après ce qui précède. On peut donc appliquer 3.3 à l'expression $f(T,U)=0$. Avec les notations $W=(T^{\rho},U^{\mathcal{A}})$ il existe une série formelle à $|\theta|+|\mathcal{B}|$ composantes dans $A[[W]]$, soit $\varphi(W)=(\varphi_{ij}(W),\varphi^{m}_{pq}(W))$ où (i,j) varie dans θ et $\binom{m}{pq}$ dans $\mathcal{B}$, telle que $\varphi(0)=0$ et $f(W,\varphi(W))=0$. On écrit encore $T^{\theta}=\varphi^{\theta}(W)$ et $U^{\mathcal{B}}=\varphi^{\mathcal{B}}(W)$. Si l'on explicite f et si $S(W)$ désigne la matrice $1+(W^{\rho},\varphi^{\theta}(W))$ de composantes $S_{ij}(W)$ égales à $\delta_{ij}+W_{ij}$ si $(i,j)\in\rho$ et à $\delta_{ij}+\varphi_{ij}(W)$ si $(i,j)\in\theta$ avec δ_{ij} le symbole de *Kronecker*, on obtient la solution suivante de l'équation $Y=S*Z$ en (Y,S) sur l'anneau $A[[W]]$:

3.9 $\quad Z+(W^{\mathcal{A}},\varphi^{\mathcal{B}}(W))=S(W)*Z.$

Revenons aux déformations sur A. Toute substitution qui à $W=(W_1,...,W_V)$ associe $\mu=(\mu_1,...,\mu_V)\in m(A)^V$ va associer à chaque série formelle $h(W)\in A[[W]]$ un élément $h(\mu)\in A$ puisque A est complet. Chaque substitution dans (3.9) respectera l'égalité et donne une solution de l'équation $Y=S*Z$ sur A, soient (a') et (b') dans (3.7). ∎

Dans 3.7(a') on peut choisir μ de sorte que les composantes de $Y^{\mathcal{A}}-(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ soient arbitraires dans $m(A)$. Si l'on fait le choix nul pour ces composantes donné par $\mu^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}-Z^{\mathcal{A}}$ et $\mu^{\rho}=(0,...,0)$ on pose $\sigma(Z^{\mathcal{A}})=1+(0,\varphi^{\theta}(0,(\Phi_0)^{\mathcal{A}}-Z^{\mathcal{A}}))\in G(A)$ et la déformation s'écrit :

3.10 $\quad Y=\sigma(Z^{\mathcal{A}})*Z$,

avec $Y^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$; d'où le corollaire :

Corollaire 3.11 - *Pour tout choix d'ensemble admissible $\mathcal{A}$, chaque déformation $Z\in Déf(\Phi_0;A)$ équivaut à une déformation Y vérifiant $Y^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ donnée par 3.10.*

Remarque 3.12. L'égalité $Y^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ pour Y se conserve par changement de base.

Le schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$.

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble admissible associé à Φ_0, soit $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ le sous-schéma de L_n défini par les équations de Jacobi et les équations $X^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ où les X^k_{ij} désignent ici les fonctions coordonnées. Géométriquement $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}(\mathbb{K})$ s'interprète comme la variété des lois Φ d'algèbres de Lie sur $\mathbb{K}^n$ dont les constantes de structure $\Phi^{\mathcal{A}}$ sont fixées à $\Phi_0^{\mathcal{A}}$; on peut la considérer plongée dans $C^2(V,V)^{\mathcal{B}}$. Le tangent de *Zariski* de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ en Φ_0 est le noyau de la surjection $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \to \mathbb{K}^{|\mathcal{A}|}$ qui à Ψ associe $\Psi^{\mathcal{A}}$, soit $\{\Psi\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g});\Psi^{\mathcal{A}}=0\}$. Par définition de $\mathcal{A}$ (3.4) c'est un supplémentaire de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ dans $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. La déformations 3.10 est en fait une déformations de Φ_0 dans $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ et 3.11 exprime une propriété de transversalité de $\Omega(\Phi_0)$ et de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ au point Φ_0.

proposition 3.13 *Toute composante de $\Omega(\Phi_0)\cap V_{\Phi_0,\mathcal{A}}(\mathbb{K})$ contenant Φ_0 est égale à $\{\Phi_0\}$.*

preuve : Si F est une telle composante irréductible, son tangent de Zariski réduit en Φ_0 est contenu dans l'intersection des tangents de *Zariski* de $\Omega(\Phi_0)$ et de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ au point Φ_0 qui est nulle. La dimension algébrique de F vaut donc zéro et $F=\{\Phi_0\}$. ∎

En d'autres termes on peut énoncer :

Corollaire 3.14 *Il existe un voisinage de Φ_0 ne rencontrant $\Omega(\Phi_0)\cap V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ qu'en Φ_0.*

Remarque 3.15. L'intersection d'une orbite quelconque avec $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ n'est pas finie en général. Ce sera le cas en particulier pour $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$, n=3,5,7,11, cf propos.8.38.

Soient O_V l'anneau local au point Φ_0 du sous-schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ de L_n et $q : O \to O_V$ le morphisme canonique d'anneaux locaux au point Φ_0 déduit de l'inclusion. Une déformation de base A de Φ_0 dans $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ est un morphisme d'anneaux locaux $g : O_V\to A$, elle est définie par les constantes de structure $g(X_{ij}^k)=a_{ij}^k$, $\binom{k}{ij}\in\mathcal{B}$. On obtient une déformation dans L_n au point Φ_0 par composition et 3.11 peut encore s'écrire :

Corollaire 3.16 - *Pour une partie admissible $\mathcal{A}$, chaque déformation de Φ_0 dans L_n équivaut à une déformation $g\circ q$ où $g : O_V \to A$ est une déformation de Φ_0 dans $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$.*

4 - CONSTRUCTION DES DEFORMATIONS A EQUIVALENCE PRES .

Après la première réduction du problème de recherche des déformations à équivalence près fournie par le théorème 3.7 et son corollaire, on va construire la déformation Y donnée par ce corollaire. Notons les multi-indices de $\mathcal{J}$ par des lettres grecques α,β,γ... Les composantes d'une déformation $Y\in Déf(\Phi_0;A)$ s'écriront $Y_\gamma=c_\gamma+\varepsilon_\gamma$ avec $\gamma\in\mathcal{J}$, $c_\gamma=(\Phi_0)_\gamma$ et $\varepsilon_\gamma\in m(A)$. Si $\varepsilon=(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{J}} = \sum_{\substack{k\\ i<j}} \varepsilon_{ij}^k e_k^{ij}$ on a $Y=(Y_\gamma)=\Phi_0+\varepsilon$.

La tripartition $\mathcal{J}=\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ associée à un point Φ_0.

Pour une loi Φ_0 considérons l'expression $Y=\Phi_0+U$ avec des indéterminées $U=(U_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{J}}$. Les polynômes de Jacobi 1.2 donnent par substitution de Y à X des expressions en U

notées $J^m_{ijh}(U)\in U.\mathbb{K}[U]$, $1\leq m\leq n$, $1\leq i<j<h\leq n$, où $U.\mathbb{K}[U]$ est l'idéal engendré par les U_γ, $\gamma\in\mathcal{J}$. Ce sont des polynômes sans terme constant de degré 2 en U que l'on écrira avec une indexation lexicographique pour $\nu=n^2(n-1)(n-2)/6$:

4.1 $\quad J_k(U)\in U.\mathbb{K}[U]$, $1\leq k\leq\nu$, et soit $J(\Phi_0)$ l'idéal engendré par les $J_k(U)$.

Soit $U=(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{B}})$ comme en §3 ; on définit des polynômes $Q_k(U^{\mathcal{B}})$ par :

4.2 $\quad Q_k(U^{\mathcal{B}})=J_k(0,U^{\mathcal{B}})\in U^{\mathcal{B}}.\mathbb{K}[U^{\mathcal{B}}]$, $1\leq k\leq\nu$.

En quotientant par $U^2.\mathbb{K}[U]$, on obtient des expressions en $\bar{U}\equiv U$ modulo $U^2.\mathbb{K}[U]$:

4.3 $\quad \bar{Q}_k(\bar{U}^{\mathcal{B}}) = \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\lambda_{k\beta}\bar{U}_\beta$, $1\leq k\leq\nu$.

Les formes linéaires $\bar{Q}_k$ qui à $(x_\beta)\in\mathbb{K}^{|\mathcal{B}|}$ associent $\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\lambda_{k\beta}x_\beta$ définissent une application linéaire $\bar{Q}:\mathbb{K}^{|\mathcal{B}|}\to\mathbb{K}^\nu$ par la matrice $[\lambda_{k\beta}]$. Si $s\leq|\mathcal{B}|$ est le rang de cette matrice identifiée à $\bar{Q}$, on énoncera :

Définition 4.4 *(tripartition associée à Φ_0)* On appelle *ensemble de multi-indices* $\mathcal{C}$ toute partie de $\mathcal{B}$ telle qu'il existe une sous-matrice carrée de déterminant non nul maximale de $\bar{Q}$, soit $[\lambda_{k\gamma}]$ avec $(k,\gamma)\in\{1,...,s\}\times\mathcal{C}$ après réarrangement des indices k. A partir de $\mathcal{C}$ on définit $\mathcal{L}=\mathcal{B}-\mathcal{C}$ d'où *une tripartition $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ de $\mathcal{J}$ associée à Φ_0*.

La matrice $[\lambda_{k\gamma}]$ indexée par $\{1,...,s\}\times\mathcal{C}$ est la matrice Jacobienne des dérivées partielles du polynôme à s composantes $Q_k(U^{\mathcal{B}})$, $1\leq k\leq s$, par rapport aux variables U_γ, $\gamma\in\mathcal{C}$, au point 0. Par définition de $\mathcal{C}$ cette matrice est inversible et par (3.3) il existe un unique $\varphi\in(U^{\mathcal{L}}.\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]])^s$ tel que

4.5 $\quad Q_k(\varphi(U^{\mathcal{L}}),U^{\mathcal{L}})=0$ pour $1\leq k\leq s$.

Proposition 4.6 *On a* $|\mathcal{L}|=\dim H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=n^2(n-1)/2-|\mathcal{A}|-|\mathcal{C}|$.

Preuve: Le tangent de *Zariski* de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ au point Φ_0 s'identifie au noyau de $\bar{Q}$ dont la dimension vaut $|\mathcal{B}|-|\mathcal{C}|=|\mathcal{L}|$, 4.4. C'est aussi un supplémentaire de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ dans $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ d'où la première égalité. La partition $\mathcal{J}=\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ donne $|\mathcal{A}|+|\mathcal{C}|+|\mathcal{L}|=n^2(n-1)/2$.∎

Les expressions restantes.

Le choix de $\mathcal{C}$ avait permis d'obtenir les équations 4.5 pour $1\leq k\leq s$. Etudions à présent les expressions restantes $Q_k(U^{\mathcal{B}})$ pour $\nu\geq k>s$. Par définition de $\mathcal{C}$ (4.4) on peut toujours trouver des combinaisons linéaires avec $c_{ki}\in\mathbb{K}$ telles que :

4.7 $\quad Q'_k(U^{\mathcal{B}})=Q_k(U^{\mathcal{B}})-\sum_{i=1}^{s}c_{ki}Q_i(U^{\mathcal{B}})\in(U^{\mathcal{B}})^2.\mathbb{K}[U^{\mathcal{B}}]$, $\nu\geq k>s$.

Si l'on substitue $\varphi(U^{\mathcal{L}})$ à $U^{\mathcal{C}}$ dans 4.7 , cf 4.5, on obtient des séries formelles en $U^{\mathcal{L}}$ notées $R_k(U^{\mathcal{L}})$, soit en écrivant lexicographiquement $U^{\mathcal{L}}=T=(T_1,...,T_l)$, $l=|\mathcal{L}|$:

4.8 $\quad R_k(T)=Q'_k(\varphi(T),T)=Q_k(\varphi(T),T)\in T^2\mathbb{K}[[T]],\ s<k\leq v.$

L'anneau local $\mathcal{O}_V$.

L'anneau $\mathcal{O}$ est le localisé de $\mathbb{K}[U]/J(\Phi_0)$ par l'idéal maximal engendré par U. L'anneau local $\mathcal{O}_V$ de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ au point Φ_0 s'obtient en remplaçant $J(\Phi_0)$ par $J(\Phi_0)+<U^{\mathcal{A}}>$ dans la construction précédente soit, en posant $Q_k=Q_k(U^{\mathcal{B}})$ pour $1\leq k\leq v$:

Lemme 4.9- *L'anneau $\mathcal{O}_V$ est le localisé de $\mathbb{K}[U^{\mathcal{B}}]/<Q_k, 1\leq k\leq v>$ par l'idéal maximal engendré par $U^{\mathcal{B}}$. Le morphisme $q : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_V$ est induit par l'application qui vaut 0 sur $U^{\mathcal{A}}$ et l'identité sur $U^{\mathcal{B}}$.*

Construction des déformations- Avec ce qui précède on énoncera le théorème de construction des déformations à équivalence près.

Théorème 4.10. *Soit une tripartition $\mathcal{J}=\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ définie en 4.4 associée au point Φ_0. Toute déformation $Z\in Déf(\Phi_0;A)$ sur un anneau local complet A est égale à $S*Y$ avec $S\in G(A)$ et Y une déformation qui s'écrit de la façon suivante pour un choix de paramètres $\varepsilon^{\mathcal{L}}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_l)\in(m(A))^l$ annulant des séries formelles R_k, $s<k\leq v$, 4.8 :*

$$Y_\alpha = c_\alpha \ , \text{ pour } \ \alpha\in\mathcal{A} \ ;$$
$$Y_\lambda = c_\lambda+\varepsilon_\lambda \ , \text{ pour } \ \lambda\in\mathcal{L} \ ;$$
$$Y_\gamma = c_\gamma+\varphi_\gamma(\varepsilon_1,...,\varepsilon_l) \ , \text{ pour } \gamma\in\mathcal{C} \ .$$

Les séries formelles φ et R_k définies par 4.5 et 4.8 ne dépendent pas de A mais uniquement de Φ_0 et de la tripartition choisie.

Preuve : La matrice Jacobienne des différentielles partielles par rapport aux indéterminées $U^{\mathcal{B}}$ en 0 de la série formelle à $|\mathcal{B}|$ composantes $F(U^{\mathcal{B}})=(Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}})$ est de déterminant non nul par définition de $Q_1,...,Q_s$. D'après 3.1 il existe une série formelle G à $|\mathcal{B}|$ composantes, vérifiant $G(0)=0$ et réciproque de F, soit :

4.11 $\quad G(Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}}) = U^{\mathcal{B}}$.

Cette expression peut s'écrire $(G^1(Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}}),U^{\mathcal{L}})$, d'où

4.12 $\quad U^{\mathcal{C}}=G^1(Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}})$.

Les séries formelles F et G définissent des automorphismes réciproques de l'anneau complet $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]$ de sorte que $\mathbb{K}[[Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}}]]$ est égal à $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]$. Si I désigne l'idéal engendré par les polynômes Q_k , $1\leq k\leq v$, on aura un isomorphisme :

$$\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I = \mathbb{K}[[Q_1,...,Q_s,U^{\mathcal{L}}]]/<Q_1,...,Q_v> \cong \mathbb{K}[[\bar{U}^{\mathcal{L}}]]/<\bar{Q}'_{s+1},...,\bar{Q}'_v>$$

où Q'_k est le polynôme défini en 4.7 si $\bar{\ }$ désigne le quotient de $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]$ par l'idéal engendré par $Q_1,...,Q_s$. Si l'on remarque que la série formelle φ introduite en 4.5

vérifie $\varphi(U^{\mathcal{L}})=G^1(0,...,0,U^{\mathcal{L}})$ on aura, cf 4.12 :

4.13 $\qquad \bar{U}^{\mathcal{C}}=G^1(\bar{0},...,\bar{0},\bar{U}^{\mathcal{L}})=\varphi(\bar{U}^{\mathcal{L}})$;

d'où en tenant compte de 4.8 : $\bar{Q}'_k=Q'_k(\bar{U}^{\mathcal{C}},\bar{U}^{\mathcal{L}})=Q'_k(\varphi(\bar{U}^{\mathcal{L}}),\bar{U}^{\mathcal{L}})=R_k(\bar{U}^{\mathcal{L}})$, pour $k>s$.

Si l'on note $U^{\mathcal{L}}$ au lieu de $\bar{U}^{\mathcal{L}}$ alors $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I$ est isomorphe à $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/<R_{s+1},...,R_\nu>$. L'anneau local $\mathcal{O}_V$, lemme 4.9, est considéré ici comme plongé dans son complété $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I$. Si l'on exprime $U^{\mathcal{B}}$ à l'aide de 4.12 en effectuant le quotient dans le complété, $\mathcal{O}_V$ s'identifie au localisé de $\mathbb{K}[U^{\mathcal{L}},\varphi(U^{\mathcal{L}})]/<R_{s+1},...,R_\nu>$ par l'idéal maximal engendré par $U^{\mathcal{L}}$ et $\varphi(U^{\mathcal{L}})$.

Une déformation $Z\in Déf(\Phi_0;A)$ de base complète A vérifie le corollaire 3.11. Elle est caractérisée (à conjugaison près) par un morphisme d'anneaux locaux $g : \mathcal{O}_V \to A$, 3.16, que l'on complète en $\hat{g} : \mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I \to A$. Ceci équivaut à se donner le morphisme $\tilde{g}$ qui rend commutatif le diagramme suivant, h étant l'isomorphisme défini plus haut :

4.14
$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\hat{g}"'] & \mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/< R_{s+1},...,R_\nu> \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\tilde{g}$ est défini par ses valeurs sur les générateurs $\bar{U}_\lambda=U_\lambda$ modulo $<R_{s+1},...,R_\nu>$, soient $\tilde{g}(\bar{U}_\lambda)=\varepsilon_\lambda$, $\lambda\in\mathcal{L}$, de sorte que la déformation $Y=\Phi_0+\varepsilon$ ainsi construite est entièrement déterminée par une famille $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{L}}\in(m(A))^l$ vérifiant $R_k(\varepsilon^{\mathcal{L}})=0$ pour $s<k\leq\nu$. Les égalités 4.13 donnent $\varepsilon^{\mathcal{C}}=\varphi(\varepsilon^{\mathcal{L}})$, d'où le théorème . ∎

Les anneaux qui interviennent dans cette preuve vérifient le corollaire :

Corollaire 4.15 *Les anneaux suivants sont isomorphes au complété de l'anneau local* $\mathcal{O}_V$ *du sous-schéma* $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ *en* Φ_0 : $\hat{\mathcal{O}}/<X^{\mathcal{A}}-(\Phi_0)^{\mathcal{A}}>\cong\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I\cong\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/<R_{s+1},...,R_\nu>$.

preuve : L'anneau local $\mathcal{O}_V$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{O}$ par l'idéal engendré par les $X_\alpha-(\Phi_0)_\alpha$, $\alpha\in\mathcal{A}$. Le complété de ce quotient est égal au quotient du complété $\hat{\mathcal{O}}$ par l'idéal engendré dans $\hat{\mathcal{O}}$ par les composantes de $X^{\mathcal{A}}-(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ et noté $< X^{\mathcal{A}}-(\Phi_0)^{\mathcal{A}}>$. Ce quotient peut s'écrire $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I$ et l'on conclut par l'isomorphisme 4.14.

Remarque 4.16. L'ensemble des déformations $Y^{\mathcal{A}}=(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ sur A complet s'identifie à l'ensemble des flèches $\tilde{g}$ du diagramme 4.14. Quand A reste complet, ces déformations constituent une catégorie dont les objets sont les morphismes d'anneaux locaux $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/< R_k> \to A$ et les morphismes les diagrammes commutatifs construits de façon analogue au §2. Cette catégorie a un objet universel initial donné par l'identité de $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/<R_k>$ d'où une déformation canonique. Si $\bar{U}_\lambda$ est la classe de U_λ modulo $<R_{s+1},...,R_\nu>$, elle vérifie les relations $R_k(\bar{U}^{\mathcal{L}})=0$, $s<k\leq\nu$, et s'écrit :

$$4.17 \qquad \begin{aligned} Y_\alpha &= c_\alpha \ , \alpha \in \mathcal{A} \ ; \\ Y_\lambda &= c_\lambda + \bar{U}_\lambda \ , \lambda \in \mathcal{L} \ ; \\ Y_\gamma &= c_\gamma + \varphi_\gamma(\bar{U}^{\mathcal{L}}) \ , \gamma \in \mathcal{C} \ . \end{aligned}$$

Lorsque l'on applique le théorème 4.10 à la déformation canonique X, 2.2, sur $\hat{O}$ la déformation Y obtenue est donnée par 4.17. Remarquons que les générateurs $\varepsilon^{\mathcal{L}}=\bar{U}^{\mathcal{L}}$ dans 4.17 sont $\mathbb{K}$-linéairement indépendants modulo $(\bar{U}^{\mathcal{L}})^2.\mathbb{K}[[\bar{U}^{\mathcal{L}}]]$.

Définition 4.18 La famille des paramètres $\varepsilon^{\mathcal{L}}$ dans 4.10 sera appelée *une famille de paramètres essentiels de la déformation Z, associée à la tripartition* $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$. Le nombre des paramètres essentiels, égal à *dim* $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, ne dépend que de Φ_0.

Définition 4.19 Les séries formelles $R_k \in (U^{\mathcal{L}})^2.\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$, $s<k\leq\nu$, pour une tripartition $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ associée au point Φ_0, seront appelées *les obstructions (relativement à cette tripartition) aux déformations de* Φ_0 *dans le schéma* L_n. L'idéal R engendré par les R_k , $s<k\leq\nu$, s'appellera *l'idéal des obstructions aux déformations de* Φ_0.

Cette définition qui ne dépend que du choix de la tripartition est compatible avec celle de la théorie formelle. Les séries non nulles $R_k(U^{\mathcal{L}})\in\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$ représentent exactement les obstructions au sens de [G2] à la déformation formelle de paramètres essentiels $U^{\mathcal{L}}$ sur l'anneau $A=\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$. En effet il n'existera pas de morphisme $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R \to A$ qui vale U_λ sur chaque générateur $\bar{U}_\lambda$, $\lambda \in \mathcal{L}$, lorsque $R\neq0$.

Remarque 4.20 La dépendance pour φ et R_k , $s<k\leq\nu$, du choix d'une tripartition $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ reste un problème ouvert. L'anneau $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R$, d'après 4.14, ne dépend pas à isomorphisme près du choix de $\mathcal{C}$ (c'est à dire de $\mathcal{L}$) dans $\mathcal{B}$. On peut conjecturer qu'il ne dépend pas non plus du choix de la tripartition à isomorphisme près.

5 - COMPARAISON DE R ET DES OBSTRUCTIONS AU SENS DE GERSTENHABER.

Une déformation à un paramètre de Φ_0 dans L_n, c.à.d ayant pour base un quotient A de $\mathbb{K}[[T]]$ où T est une seule indéterminée, équivaut à une déformation à 1 paramètre de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ que l'on exprimera par un morphisme g : $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{B}}]]/I \to A$. Une telle déformation peut se voir comme une déformation de L_n et s'écrire, pour $A=\mathbb{K}[[T]]/(T^{p+1})$, $g_p(\bar{U}_\beta)=(T\Phi_1+...+T^p\Phi_p)_\beta$ où les Φ_i s'obtiennent successivement comme solutions de 2.7. Par définition de $\mathcal{A}$ il existera pour chaque $\Phi\in C^2(V,V)$ un $\Psi\in B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ tel que $(\Phi+\Psi)^{\mathcal{A}}=0$ de sorte qu'une solution Φ_{p+1} de 2.7 peut être choisie telle que $\Phi^{\mathcal{A}}_{p+1}=0$. On prend donc $\Phi^{\mathcal{A}}_i=0$ pour $1\leq i\leq p$. Tenant compte de 4.14, g_p est défini par $\bar{g}_p$: $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R \to A$, c.à.d par les constantes de structure $g_p(\bar{U}_\lambda)=T(\Phi_1)_\lambda+...+T^p(\Phi_p)_\lambda$, $\lambda\in\mathcal{L}$, les autres étant données par, cf 4.10 :

5.1 $g_p(U_\alpha)=(T\Phi_1+...+T^p\Phi_p)_\alpha=0,\ \alpha\in\mathcal{A},$

$g_p(U_\gamma)=(T\Phi_1+...+T^p\Phi_p)_\gamma=\varphi_\gamma(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}}),\ \gamma\in\mathcal{C}.$

Ceci montre que la déformation est complètement déterminée par φ, théo.4.10, et les vecteurs tronqués $\Phi_1^{\mathcal{L}},...,\Phi_p^{\mathcal{L}}\in C^2(V,V)^{\mathcal{L}}$. Le fait que g_p soit une déformation s'exprime par $\tilde{g}_p(R_k(U^{\mathcal{L}}))=R_k(\tilde{g}_p(U^{\mathcal{L}}))=R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})=0$ pour $s<k\leq v$, ce qui s'écrit encore

5.2 $\langle R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})\rangle\subseteq(T^{p+1})$

avec $\langle R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})\rangle$ l'idéal de $\mathbb{K}[[T]]$ engendré par les $R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})$, $s<k\leq v$.

Remarque 5.3 - Pour une tripartition donnée, l'espace $C^2(V,V)^{\mathcal{L}}$ est isomorphe à $T_{\Phi_0}V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ par l'application $\Psi^{\mathcal{L}}\to\Psi$ où Ψ est définie par $\Psi^{\mathcal{A}}=0$ et $\Psi_\gamma=(D\varphi_\gamma)(0).\Psi^{\mathcal{L}}$ pour $\gamma\in\mathcal{C}$ si D désigne la différentielle habituelle. Le sous-espace $T_{\Phi_0}V_{\Phi_0,\mathcal{A}}\subseteq Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ est isomorphe à $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ par l'application qui à Ψ associe sa classe $[\Psi]$ d'où l'isomorphisme linéaire $\Psi^{\mathcal{L}}\to[\Psi]$ de $C^2(V,V)^{\mathcal{L}}$ sur $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

Le rapport existant entre l'obstruction $\omega(g_p)$, 2.7, et l'idéal R est précisé par :

Proposition 5.4 - *Une déformation g_p de base $\mathbb{K}[T]/(T^{p+1})$ de Φ_0 dans $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ s'écrit $\Phi_0+T\Phi_1+...+T^p\Phi_p$ et vérifie 5.1. Les relations de Jacobi s'écrivent alors 5.2 et les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\omega(g_p)=0$; *ii)* $\langle R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})\rangle\subseteq(T^{p+2})$.

preuve : La condition i) équivaut à dire que g_p se remonte en g_{p+1}, ou que (T^{p+2}) contient $\langle R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^{p+1}\Phi_{p+1}^{\mathcal{L}})\rangle$ pour $\Phi_{p+1}\in C^2(V,V)$ en utilisant 5.2 pour p+1. On a ii) en remarquant qu'un terme $T^{p+1}\Phi_{p+1}^{\mathcal{L}}$ n'apporte que des contributions d'ordre $\geq$p+2 dans les séries $R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^{p+1}\Phi_{p+1}^{\mathcal{L}})$, $s<k\leq v$. ∎

Corollaire 5.5- *Un morphisme g de base $\mathbb{K}[[T]]$ définit une déformation formelle de Φ_0 dans le schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ si l'on a i) ou ii) : i) la suite des $\omega(g_p)$ est nulle ;*

ii) la suite des $R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})$ converge vers 0 quand $p\to\infty$, c'est à dire $R_k(\sum_{p=1}^{\infty}T^p\Phi_p^{\mathcal{L}})=0$, pour $s<k\leq v$.

Si F est une série entière à plusieurs indéterminées on note F^p son terme homogène de degré p et $o(F)$ son ordre, c.à.d le plus petit p tel que $F^p\neq 0$. Soit ρ le minimum des $o(R_k)$ pour $s<k\leq v$. Discutons le relèvement de g_p en fonction de p :

- Si $p<\rho$, toute expression $T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^p\Phi_p^{\mathcal{L}}$ définit une déformation tronquée g_p dont les constantes de structure $(\Phi_0+T\Phi_1+...+T^p\Phi_p)_\beta$ sont données par 5.1.

- Si $p=\rho$, alors $g_{\rho-1}$ se remonte en une déformation g_ρ si et seulement si l'inclusion 5.4 ii) est vérifiée pour $p=\rho-1$, ce qui s'exprime par

(5.6) $\qquad R_k^\rho(\Phi_1^{\mathcal{L}})=0$, pour tout $s<k\leq v$.

Ces égalités définissent un fermé de Zariski de $C^2(V,V)^{\mathcal{L}}$ ou de $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ avec 5.3.

- Si $p=\rho+1$, alors g_ρ se remonte en $g_{\rho+1}$ si 5.4 ii) est vérifiée pour $p=\rho$ c.à.d , tenant compte de 5.6, si on a les égalités supplémentaires

(5.7) $\qquad (DR_k^\rho)(\Phi_1^{\mathcal{L}}).\Phi_2^{\mathcal{L}}+R_k^{\rho+1}(\Phi_1^{\mathcal{L}})=0,\ s<k\leq v,$

qui sont des conditions polynômiales en $\Phi_1^{\mathcal{L}}$ et $\Phi_2^{\mathcal{L}}$.

- Pour $i\geq 1$, $g_{\rho+i-1}$ se remonte en $g_{\rho+i}$ si et seulement si le terme de degré $\rho+i$ de $R_k(T\Phi_1^{\mathcal{L}}+...+T^{\rho+i-1}\Phi_{\rho+i-1}^{\mathcal{L}})$ est nul pour $s<k\leq v$, ce qui s'écrit

(5.8) $\qquad (DR_k^\rho)(\Phi_1^{\mathcal{L}}).\Phi_{i+1}^{\mathcal{L}}=P_{k,i}(\Phi_1^{\mathcal{L}},...,\Phi_i^{\mathcal{L}})$

où $P_{k,i}$ est polynômial en $\Phi_1^{\mathcal{L}},...,\Phi_i^{\mathcal{L}}$. L'équation (5.8) équivaut à $\omega(g_{\rho+i-1})=0$, elle porte sur les vecteurs $\Phi_1^{\mathcal{L}},...,\Phi_{i+1}^{\mathcal{L}}$, le choix des ρ-1 derniers $\Phi_{i+2}^{\mathcal{L}}$,..., $\Phi_{\rho+i}^{\mathcal{L}}$ restant arbitraire.

Le cas $|\mathcal{L}|=1$. Dans ce cas $U^{\mathcal{L}}$ se réduit à une seule indéterminée U et l'anneau $\mathbb{K}[[U]]$ est principal de sorte que $R=0$ ou bien $R=(U^\rho)$ avec $\rho>1$. Chaque vecteur tronqué $\Phi_i^{\mathcal{L}}$ se réduit à un nombre $c_i\in\mathbb{K}$. Supposons $R\neq 0$. Toute expression $c_1T+...+c_{\rho-1}T^{\rho-1}$ définit une déformation tronquée à l'ordre ρ-1, soit $\Phi_0+T\Phi_1+...+T^{\rho-1}\Phi_{\rho-1}$, où les Φ_i sont donnés par $\Phi_i^{\mathcal{L}}=c_i$ avec 5.1. D'après la discussion précédente le relèvement a lieu à l'ordre ρ si et seulement si 5.6 est vérifié, ce qui donne $(c_1)^\rho=0$ et $c_1=0$ ou de façon équivalente $[\Phi_1]=0$. On peut donc énoncer dans ce cas :

Corollaire 5.9 *Supposons* $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{K}$. *Une 2-classe non nulle* $[\Phi_1]$ *vérifie i) ou ii) :*

i) $[\Phi_1]$ *s'intègre en une déformation formelle* $\Phi_0+\sum_{p>0}T^p\Phi_p$;

ii) $[\Phi_1]$ *se relève en une déformation tronquée à l'ordre* ρ-1, $\Phi_0+T\Phi_1+...+T^{\rho-1}\Phi_{\rho-1}$, *mais ne se relève pas à l'ordre* ρ *où* ρ *est un nombre qui ne dépend que de* Φ_0.

Dans les deux cas l'obstruction au relèvement à un ordre p+1 *ne dépend pas du choix des solutions* Φ_2 ,..., Φ_p *trouvées pour 2.7.*

Remarque 5.10 Ce résultat n'est plus vrai pour $|\mathcal{L}|>1$ où l'ordre de l'obstruction au relèvement de $[\Phi_1]$ dépend du choix des solutions $\Phi_2,...,\Phi_p$ de 2.7 déjà trouvées.

6 - APPLICATION A L'ETUDE LOCALE DU SCHEMA.

Connaître le schéma L_n au voisinage de Φ_0 équivaut à connaître l'anneau local $\mathcal{O}$ et donc la déformation canonique ou, ce qui revient au même, toutes les déformations. Considérons le tangent de Zariski au schéma L_n en Φ_0, propos.1.9. Par analogie avec la définition 3.4, toute famille $\mathcal{P}$ de multi-indices $\xi\in\mathcal{J}$ telle que les restrictions $e_\xi|Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ constituent une base du dual de $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ indexe une paramétrisation du schéma au voisinage de Φ_0. Ceci équivaut à dire que les formes linéaires $D \to DX_\xi$ pour chaque germe de fonction coordonnée X_ξ , $\xi\in\mathcal{P}$, constituent une base de $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{O},\mathbb{K})^*$ ou encore que les X_ξ modulo m^2, $\xi\in\mathcal{P}$, constituent une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel m/m^2. Toute partie $\mathcal{P}$ est réunion d'un sous-ensemble admissible $\mathcal{A}$ de multi-indices $\alpha\in\mathcal{P}$ tels que les restrictions $e_\alpha|B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ constituent une base de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})^*$ et d'un sous-ensemble indexant une famille de paramètres essentiels $\mathcal{L}=\mathcal{P}-\mathcal{A}$ au sens de 4.18. On obtient une tripartition $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ au sens de 4.4 avec $\mathcal{C}=\mathcal{J}-\mathcal{P}$.

Avec $U^{\mathcal{J}}=(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{C}},U^{\mathcal{L}})$, §4, l'anneau $\mathcal{O}$ égal au localisé de $\mathbb{K}[U^{\mathcal{J}}]/J(\Phi_0)$ par l'idéal maximal engendré par $U^{\mathcal{J}}$ est canoniquement isomorphe au quotient par l'idéal engendré par les J_k , cf 4.1, du localisé B de $\mathbb{K}[U^{\mathcal{J}}]$ par l'idéal $<U^{\mathcal{J}}>$. Si l'on remarque que B se plonge canoniquement dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{J}}]]$, l'anneau $\mathcal{O} \cong B/<J_k>$ s'injecte canoniquement dans son complété $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{J}}]]/<J_k>$ où $<J_k>$ désigne encore l'idéal engendré par les J_k dans l'anneau ambiant ; ceci résulte du théorème de *Krull* appliqué aux anneaux noethériens considérés.

L'ensemble $\mathcal{C}$ permet de définir une sous-matrice carrée inversible, cf 4.4, et d'appliquer le théorème des fonctions implicites formel aux relations J_k déduites des relations de Jacobi. Ceci permet d'exprimer les coordonnées X_γ , $\gamma\in\mathcal{C}$, comme séries formelles $\Psi_\gamma(\bar{U}^{\mathcal{P}})$ en les variables $\bar{U}^{\mathcal{P}}=\bar{X}^{\mathcal{P}}-(\Phi_0)^{\mathcal{P}}$ où $^-$ désigne le quotient par l'idéal $<J_k>$. On obtient ainsi une paramétrisation locale $((\Phi_0)^{\mathcal{P}}+\bar{U}^{\mathcal{P}}, \Psi_{\mathcal{C}}(\bar{U}^{\mathcal{P}}))$ du schéma L_n au point Φ_0. Il faut tenir compte aussi de relations supplémentaires d'ordre ≥ 2 pour épuiser les relations de Jacobi, elles engendrent un idéal $\mathcal{R}(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}})$ contenu dans $(U^{\mathcal{P}})^2.\mathbb{K}[[U^{\mathcal{P}}]]$ qui permet d'obtenir l'isomorphisme d'anneaux complets:

$$(6.1) \qquad \hat{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{K}[[U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}}]]/\ \mathcal{R}(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}}).$$

Le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_V$ du sous-schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ au point Φ_0 est isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}/< U^{\mathcal{A}}>$ d'après 4.15 et donc à $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}}]]/<\mathcal{R}(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}})+<U^{\mathcal{A}}>>$. Si l'on note $\mathcal{R}(0,U^{\mathcal{L}})$ l'ensemble des $f(0,U^{\mathcal{L}})$ pour $f\in\mathcal{R}(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}})$ on a $\mathcal{R}(U^{\mathcal{A}},U^{\mathcal{L}})+<U^{\mathcal{A}}>=\mathcal{R}(0,U^{\mathcal{L}})+< U^{\mathcal{A}}>$, d'où $\hat{\mathcal{O}}_V\simeq\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/\mathcal{R}(0,U^{\mathcal{L}})$, soit avec l'idéal R défini en 4.19 pour la même tripartition :

$$(6.2) \qquad R = \mathcal{R}(0,U^{\mathcal{L}}) .$$

Remarque 6.3.- Notons que réciproquement la donnée d'une tripartition $\mathcal{A}+\mathcal{C}+\mathcal{L}$ au point Φ_0 donne une paramétrisation locale du schéma pour $\mathcal{P}=\mathcal{A}+\mathcal{L}$.

On exprime que le schéma est lisse en un point (point simple ou régulier) par :

Proposition 6.4 - *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Le schéma L_n est lisse au point Φ_0 ;
ii) (G.Rauch) Pour toute déformation tangente $f_1 : \mathcal{O} \to \mathbb{K}[T]/(T^2)$, il existe une déformation $f : \mathcal{O} \to \mathbb{K}[[T]]$ telle que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{K}[[T]] \arrow[dl] \\ & \mathbb{K}[T]/(T^2) & \end{tikzcd}$$

iii) $\mathcal{R}(U^{\mathcal{A}}, U^{\mathcal{L}}) = 0$;
iv) L'idéal des obstructions $R \subseteq (U^{\mathcal{L}})^2 \mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$ est nul ;
v) Le sous-schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ est lisse au point Φ_0.

preuve: Le fait que le schéma soit lisse au point Φ_0 équivaut à ii) qui signifie que toute déformation tangente est intégrable sur l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[T]]$, [Ra]. Ceci équivaut à dire que $\hat{\mathcal{O}}$ est isomorphe à un anneau de séries formelles et les conditions i) et iii) sont équivalentes d'après (6.1). La condition iii) entraîne $R=\mathcal{R}(0,U^{\mathcal{L}})=0$ d'après 6.2, d'où i*v*). Remarquant que i*v*) et *v*) sont deux formulations équivalentes, 4.15, il reste à prouver que *v*) entraîne i).
Si Φ_0 est régulier dans le sous-schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ il appartient à une seule composante irréductible W de $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ de dimension algébrique égale à $|\mathcal{L}|$. Soient F l'adhérence de $GL(n,\mathbb{K})*W$ dans $L_n(\mathbb{K})$ et $g : GL(n,\mathbb{K})\times W \to F$ le morphisme algébrique $g(s,\varphi)=s*\varphi$. La variété F est irréductible et g est dominant. Un résultat classique dit que la dimension de toute composante irréductible de $g^{-1}(\Phi_0)$ est minorée par n^2+dim$W$-dim$F$. La projection de $g^{-1}(\Phi_0)$ sur W est égale à $\Omega(\Phi_0)\cap W$. La projection d'une composante de $g^{-1}(\Phi_0)$ qui contient le point (id,Φ_0) est irréductible donc égale à $\{\Phi_0\}$ d'après 3.13. Une telle composante de $g^{-1}(\Phi_0)$ est la composante neutre de $Aut(\Phi_0)\times\{\Phi_0\}$ de dimension $n^2-|\mathcal{A}|$, 3.5 ; d'où dim$F\geq|\mathcal{A}|+|\mathcal{L}|$. La dimension du tangent de Zariski de L_n en Φ_0 , égale à $|\mathcal{A}|+|\mathcal{L}|$ d'après 4.6, minore donc la dimension algébrique de F et Φ_0 est point simple du schéma L_n. ∎

Remarque 6.5 Le point Φ_0 est simple si et seulement si on a $\dim_{\Phi_0} L_n=|\mathcal{A}|+|\mathcal{L}|$, les $U^{\mathcal{P}}$ sont alors des paramètres au sens géométrique habituel et la déformation canonique est une déformation formelles à $|\mathcal{A}|+|\mathcal{L}|$ indéterminées.

condition d'orbite ouverte- La rigidité géométrique de Φ_0 exprime que l'orbite $\Omega(\Phi_0)$ est ouverte dans $L_n(\mathbb{K})$ ce qui équivaut à dire que la dimension algébrique de L_n au point Φ_0 est celle de $\Omega(\Phi_0)$. Ceci se traduit dans les anneaux locaux par :

Proposition 6.6 *Les conditions suivantes sont équivalentes (Rigidité géométrique) :*
i) L'orbite de Φ_0 est un ouvert de Zariski ;
ii) L'idéal R des obstructions contient une puissance p>1 de $U^{\mathcal{L}}.\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$
(c.à.d $\hat{\mathcal{O}}$ est extension algébrique de l'anneau $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{A}}]]$) ;

iii) Toute déformation de Φ_0 est équivalente à une déformation Y vérifiant le théorème 4.10, telle que $\varepsilon_i{}^p=0$ pour tout $1 \leq i \leq |\mathcal{L}|$ et un entier $p>1$.

Preuve : La condition i) équivaut à dire que les composantes de $U^{\mathcal{A}}$ constituent un système de paramètres de l'anneau local O. Ceci signifie que l'idéal $<U^{\mathcal{A}}>$ engendré par les U_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, dans O est m-primaire de sorte qu'il existe un entier p tel que $m^p \subseteq <U^{\mathcal{A}}>$ puisque O est noethérien. Si l'on remarque que O_V est isomorphe à $O/<U^{\mathcal{A}}>$ ceci équivaut à dire que tout élément de $m(O_V)$ est nilpotent d'ordre $\leq p$. Dans ce cas l'anneau O_V est complet et isomorphe à $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R$, cf 4.15 ; il existe donc une puissance de $U^{\mathcal{L}}.\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]$ contenue dans R, soit ii).

L'équivalence de ii) et iii) résulte du fait que la donnée de Y équivaut à celle d'un morphisme $\bar{f}$: $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R \to A$; la condition ii) entraîne que les U_λ , donc les $\varepsilon_\lambda = \bar{f}(U_\lambda)$, sont nilpotents iii). La réciproque utilise l'identité sur $A = \mathbb{K}[[U^{\mathcal{L}}]]/R$. ∎

Remarques 6.7 - a) Dans iii) on peut remplacer "toute déformation" par "la déformation canonique".

b) La condition i) équivaut à dire que le complété de l'anneau local du schéma réduit au point Φ_0 est isomorphe à $\mathbb{K}[[U^{\mathcal{A}}]]$.

c) Si i) est vrai et si $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \neq 0$, il existe des déformations non triviales de base $\hat{O}$ qui sont, à équivalence près, combinaisons linéaires de $\varepsilon_1^{n1} \ldots \varepsilon_l^{nl}$, $n_i < p$.

d) Le nombre p tel que 6.6 ii) vérifie $p \geq \rho$ où ρ est défini au §5.

Le théorème de rigidité de *Gerstenhaber-Nijenhuis-Richardson* se formule ainsi où l'équivalence des déformations est prise sur le complété de l'anneau de base :

Proposition 6.8 *Les conditions i)→iv) sont équivalentes (Rigidité infinitésimale) :*

i) $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$;

ii) Le schéma est réduit au point $\mathfrak{g}$ et l'orbite est ouverte ;

iii) Toute déformation de Φ_0 est triviale ;

iv) La déformation canonique est triviale .

Preuve: la condition i) s'écrit $\mathcal{L} = \emptyset$ ou $O_V \cong \mathbb{K} \cong O/<U^{\mathcal{A}}>$ d'après 4.15, d'où $\hat{O} \cong \mathbb{K}[[U^{\mathcal{A}}]]$. L'équivalence avec ii) utilise 6.7(b), et avec iii) et iv) utilise 4.10. ∎

Le cas $|\mathcal{L}|=1$- Les exemples d'algèbres de Lie géométriquement rigides avec $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \neq 0$ publiés dans [Ri][Ra][C1] vérifient $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$. L'idéal R est alors nul ou bien engendré par U^ρ pour un entier $\rho>1$ défini au §5 ; on a :

Proposition 6.9 *Si $|\mathcal{L}|=1$ l'idéal R des obstructions associé à Φ_0 vérifie i) ou ii)*

i) $R=0$ et le schéma est lisse au point $\mathfrak{g}$ (paramètre essentiel géométrique),

ii) $R=(U^\rho)$ $(\rho \geq 2)$; l'orbite est ouverte et le schéma n'est pas réduit au point considéré (Le paramètre essentiel est nilpotent d'ordre ρ).

Remarque 6.10 Le cas i) donne deux interprétations possibles du paramètre :

(a) Il décrit exactement la variation de l'orbite et donne une famille continue d'algèbres de Lie à isomorphisme près. Ceci correspond au fait que la réunion des orbites de dimension $dim\Omega(\Phi_0)$ est un voisinage de Φ_0.
(b) Tout voisinage de Φ_0 rencontre une orbite $\Omega(\Phi_0')$ de dimension strictement supérieure à celle de Φ_0 : $\Omega(\Phi_0')$ est ouverte à cause de $|\mathcal{L}|=1$ et $\Phi_0\in\overline{\Omega}(\Phi_0')$.
Le cas i(a) sera illustré par 7.10 et i(b) et ii) par l'étude de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$, §7.

Recherche des éléments nilpotents- La déformation canonique X admet, d'après 3.10 pour un ensemble admissible $\mathcal{A}$, une déformation équivalente $Y=\sigma(X^{\mathcal{A}})_*X$ où $\sigma(X^{\mathcal{A}})$ est une matrice $\sigma(X^{\mathcal{A}})_{ij}=\delta_{ij}+\mu_{ij}$ avec $\mu_{ij}\in m(\hat{O})$ une série formelle en $X^{\mathcal{A}}\text{-}(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ sans terme constant. En explicitant l'action $_*$ on voit que chaque composante Y_λ s'écrit $X_\lambda+\sum_{\gamma\in\mathcal{J}} X_\gamma g_\gamma(X^{\mathcal{A}})$ où les $g_\gamma(X^{\mathcal{A}})$ sont des séries formelles en $X^{\mathcal{A}}\text{-}(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ sans terme constant. Pour un choix de paramètres essentiels $\varepsilon^{\mathcal{L}}$ de Y on aura donc :

6.11 pour $\lambda\in\mathcal{L}$; $\varepsilon_\lambda = X_\lambda\text{-} (\Phi_0)_\lambda+\sum_{\gamma\in\mathcal{J}} X_\gamma g_\gamma(X^{\mathcal{A}}) \in m(\hat{O})$.

Les paramètres $\varepsilon^{\mathcal{L}}$ doivent annuler les relations R_k , $s<k\leq\nu$. Une obstruction donnée par une relation $(\varepsilon_\lambda)^p=0$ entraîne l'existence d'un élément nilpotent exprimé par 6.11 dans $\hat{O}$. C'est toujours le cas lorsque $|\mathcal{L}|=1$ et $R\neq0$, cf 6.9.

7 - DEFORMATION DANS LE SCHEMA $L_3(\mathbb{C})$.

Le but de ce § est de montrer pour n=3 comment on obtient les déformations d'une loi. Il suffit de construire la déformation canonique à équivalence près, théorème 4.10, puisque toute autre déformation s'en déduit. Indiquons tout d'abord les étapes du calcul pratique pour n quelconque en remarquant que cette démarche donne lieu à des calculs effectifs sur ordinateur lorsque Φ_0 a ses constantes de structure dans $\mathbb{Z}$ et n est raisonnable. Un programme est en préparation à l'université de Poitiers.

7.1 On écrit les identités de Jacobi pour $Y^k_{ij}=(\Phi_0)^k_{ij}+\varepsilon^k_{ij}$ ce qui donne un système d'équations $J_k(\varepsilon)=0$, $1\leq k\leq\nu$, cf 4.1.

7.2 On cherche un ensemble admissible $\mathcal{A}$, ce qui se ramène à calculer le rang d'une matrice $n^2\times n^2(n\text{-}1)/2$; on reporte ensuite les valeurs $\varepsilon^{\mathcal{A}}=0$ dans les équations $J_k(\varepsilon)=0$, ce qui donne un système d'équations plus simple $Q_k(\varepsilon^{\mathcal{B}})=0$, $1\leq k\leq\nu$, cf 4.2.

7.3 On calcule la matrice $\dot{Q}$ de dimension $\nu\times|\mathcal{B}|$ donnée par la partie linéaire de $Q=(Q_k)$. On cherche ensuite un sous-ensemble de multi-indices $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$ correspondant à une sous-matrice carrée de déterminant non nul maximale de $\dot{Q}$ (calcul de rang).

7.4 Le complémentaire $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ donne la dimension $|\mathcal{L}|$ de $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, ainsi qu'un choix de paramètres essentiels de la déformation. Il reste à déterminer les paramètres ε_γ , $\gamma\in\mathcal{C}$, en fonction de $\varepsilon^{\mathcal{L}}$ ainsi que les obstructions.
On simplifie les systèmes d'équations obtenus à chaque étape du calcul .

Etude de la dimension 3 sur le corps des nombres complexes.

Rappelons la classification des algèbres de Lie complexes de dimension 3 où sont donnés les crochets non nuls $[e_i,e_j]$,$i<j$, cf Jacobson "Lie algebras" par exemple :

$\mathbb{C}^3$; $\mathfrak{n}_3$: $[e_1,e_2]=e_3$;

$\mathfrak{r}_{3,t}$: $[e_1,e_2]=te_2$, $[e_1,e_3]=e_3$ (on a $\mathfrak{r}_{3,t}\cong\mathfrak{r}_{3,t'}$ si et seulement si $tt'=1$) ;

$\mathfrak{r}'_3$: $[e_1,e_2]=e_2+e_3$, $[e_1,e_3]=e_3$;

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: $[e_1,e_2]=-e_2$, $[e_1,e_3]=e_3$, $[e_2,e_3]=2e_1$.

Les contractions de ces algèbres où la flèche $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ indique que $\mathfrak{g}$ se contracte sur $\mathfrak{g}'$ sans objet intermédiaire sont données par :

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{r}_{3,-1} \to \mathfrak{n}_3 \to \mathbb{C}^3$; $\mathfrak{r}_{3,t}(t\neq 1) \to \mathfrak{n}_3 \to \mathbb{C}^3$; $\mathfrak{r}'_3 \to \mathfrak{n}_3 \to \mathbb{C}^3$; $\mathfrak{r}'_3 \to \mathfrak{r}_{3,1} \to \mathbb{C}^3$.

Ecrivons les équations de Jacobi avec les 9 variables Y^k_{ij} pour $1\leq i<j\leq 3$ et $1\leq k\leq 3$.

7.5 $\quad Y^2_{12}Y^1_{23} - Y^2_{23}Y^1_{12} - Y^3_{23}Y^1_{13} + Y^3_{13}Y^1_{23} = 0$;

7.6 $\quad Y^1_{12}Y^2_{13} - Y^3_{23}Y^2_{13} - Y^1_{13}Y^2_{12} + Y^3_{13}Y^2_{23} = 0$;

7.7 $\quad Y^1_{12}Y^3_{13} + Y^2_{12}Y^3_{23} - Y^2_{23}Y^3_{12} - Y^1_{13}Y^3_{12} = 0$.

Etude locale de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: On écrit le système $\delta.\Phi_0=0$ où chaque équation $(\delta.\Phi_0)^k_{ij}= \sum_l(c^l_{ij}d^k_l-c^k_{lj}d^l_i-c^k_{il}d^l_j)=0$ est désignée par $\binom{k}{ij}$:

$\binom{1}{12}$ $-d^1_2+2d^3_1=0$; $\binom{2}{12}$ $d^1_1=0$; $\binom{3}{12}$ $-2\ d^3_2=0$; $\binom{1}{13}$ $d^1_3-2d^2_1=0$; $\binom{2}{13}$ $2d^2_3=0$;
$\binom{3}{13}$ $-d^1_1=0$; $\binom{1}{23}$ $2d^1_1-2d^2_2-2d^3_3=0$; $\binom{2}{23}$ $2d^2_1-d^1_3=0$; $\binom{3}{23}$ $2d^3_1-d^1_2=0$.

On a des équations équivalentes $\binom{1}{12}\simeq\binom{3}{23}$, $\binom{2}{12}\simeq\binom{3}{13}$ et $\binom{1}{13}\simeq\binom{2}{23}$ de sorte que l'on peut prendre l'ensemble admissible $\mathcal{A}$ constitué de $\binom{k}{12}$ pour k=1,2,3, $\binom{k}{13}$ pour k=1,2 et $\binom{1}{23}$. D'autres choix sont évidemment possibles. En reportant $Y=\Phi_0+\varepsilon$ et $\varepsilon^{\mathcal{A}}=0$ dans 7.5, 7.6, 7.7, il vient

7.8 $\quad \varepsilon^3_{13} = 0$; $(1 + \varepsilon^3_{13})\ \varepsilon^2_{23} = 0$; $\varepsilon^3_{23} = 0$;

ce qui fixe à 0 les trois paramètres indexés sur $\mathcal{B}$. On a $|\mathcal{L}|=0$ et la déformation obtenue est constante d'où (6.8) la rigidité géométrique de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.

Etude locale de $\mathfrak{r}_{3,t}(t\in\mathbb{C})$: Le système $\delta.\Phi_0=0$ s'écrit

$\binom{1}{12}$ $t\ d^1_2=0$; $\binom{2}{12}$ $t\ d^1_1=0$; $\binom{3}{12}$ $(t-1)\ d^3_2=0$; $\binom{1}{13}$ $d^1_3=0$;
$\binom{2}{13}$ $(1-t)d^2_3=0$; $\binom{3}{13}d^1_1=0$; $\binom{1}{23}$ $0=0$; $\binom{2}{23}$ $td^1_3=0$; $\binom{3}{23}$ $d^1_2=0$.

En remarquant que les relations $\binom{3}{23}$, $\binom{3}{13}$ et $\binom{1}{13}$ entraînent les relations $\binom{1}{12}$, $\binom{2}{12}$ et $\binom{2}{23}$ respectivement , le système équivaut à :

$\binom{3}{12}$ $(t-1)d^3_2=0$; $\binom{1}{13}$ $d^1_3=0$; $\binom{2}{13}$ $(1-t)d^2_3=0$; $\binom{3}{13}$ $d^1_1=0$; $\binom{3}{23}$ $d^1_2=0$.

Si $t\neq 1$ on prend $\mathcal{A}=\{\binom{3}{12},\binom{1}{13},\binom{2}{13},\binom{3}{13},\binom{3}{23}\}$. Si $t=1$ on prend $\mathcal{A}=\{\binom{1}{13},\binom{3}{13},\binom{3}{23}\}$.

Pour $t\neq 1$, on obtient après report de $Y=\Phi_0+\varepsilon$ et $\varepsilon^{\mathcal{A}}=0$ dans 7.5, 7.6 et 7.7 :

7.9 $\quad (1+t+\varepsilon^2_{12})\ \varepsilon^1_{23}\ -\varepsilon^2_{23}\varepsilon^1_{12}=0\ ;\ \ \varepsilon^2_{23}=0\ ;\ \ \varepsilon^1_{12}=0\ ;$

d'où $(1+t+\varepsilon^2_{12})\varepsilon^1_{23}=0$.

Si $t\neq\pm 1$ on peut diviser par $1+t+\varepsilon^2_{12}$ dans l'anneau local ce qui donne $\varepsilon^1_{23}=0$ et le système 7.9 devient $\varepsilon^1_{12}=\varepsilon^1_{23}=\varepsilon^2_{23}=0$. Il reste un seul paramètre libre ε^2_{12} ($\mathcal{L}$ se réduit ici à $\{({}^{2}_{12})\}$) qui décrit la famille continue $\mathrm{r}_{3,t}$ au voisinage du point donné par $t\neq\pm 1$ et engendre la composante résoluble de $L_3(\mathbb{C})$, [C-D]. On a $\dim H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=|\mathcal{L}|=1$ et la déformation canonique est équivalente à :

7.10 $\quad Y^1_{12}=0\ ,\ Y^2_{12}=t+\varepsilon^2_{12}\ ,\ Y^3_{12}=Y^1_{13}=Y^2_{13}=0\ ,\ Y^3_{13}=1\ ,\ Y^1_{23}=Y^2_{23}=Y^3_{23}=0.$

Si $t=-1$ le système 7.9 s'écrit $\varepsilon^1_{12}=\varepsilon^2_{23}=\varepsilon^2_{12}\varepsilon^1_{23}=0$. Sa partie linéaire permet d'obtenir $\mathcal{E}=\{({}^{1}_{12}),({}^{2}_{23})\}$ de sorte qu'il reste deux paramètres ε^2_{12} et ε^1_{23} indexés par $\mathcal{L}$ et soumis à la condition $\varepsilon^2_{12}\varepsilon^1_{23}=0$. Ceci signifie que $\mathrm{r}_{3,-1}$ est point singulier à l'intersection des deux composantes de L_3 : ε^2_{12} décrit la composante résoluble et ε^1_{23} l'orbite de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. On a $\dim H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=|\mathcal{L}|=2$ et la déformation canonique équivaut à

7.11 $\quad Y^1_{12}=0,\ Y^2_{12}=-1+\varepsilon^2_{12}\ ,\ Y^3_{12}=Y^1_{13}=Y^2_{13}=0,\ Y^3_{13}=1,\ Y^1_{23}=\varepsilon^1_{23}\ ,\ Y^2_{23}=Y^3_{23}=0\ (\ \varepsilon^2_{12}\varepsilon^1_{23}=0).$

Si $t=1$ avec $\mathcal{A}$ défini plus haut et reportant $\varepsilon^{\mathcal{A}}=0$ dans les équations de Jacobi on a

7.12 $\quad 2\varepsilon^1_{23}+\varepsilon^2_{12}\varepsilon^1_{23}-\varepsilon^2_{23}\varepsilon^1_{12}=0\ ,\ \varepsilon^1_{12}\varepsilon^2_{13}+\varepsilon^2_{23}=0\ ,\ \varepsilon^1_{12}-\varepsilon^2_{23}\varepsilon^3_{12}=0.$

La linéarisation de ce système conduit à prendre $\mathcal{E}=\{({}^{1}_{23}),({}^{2}_{23}),({}^{1}_{12})\}$, d'où les paramètres essentiels ε^2_{12} , ε^3_{12} , ε^2_{13} associés à $\mathcal{L}$. On tire aisément de 7.12 les égalités $\varepsilon^1_{12}=\varepsilon^1_{23}=\varepsilon^2_{23}=0$ et la déformation canonique sera équivalente à :

7.13 $\quad Y^1_{12}=0\ ,\ Y^2_{12}=1+\varepsilon^2_{12}\ ,\ Y^3_{12}=\varepsilon^3_{12}\ ,\ Y^1_{13}=0\ ,\ Y^2_{13}=\varepsilon^2_{13}\ ,\ \ Y^3_{13}=1,\ Y^1_{23}=Y^2_{23}=Y^3_{23}=0.$

On a $\dim H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=|\mathcal{L}|=3$, le point est régulier et les paramètres prennent toutes les valeurs de $\mathbb{C}$. Les traces des orbites sur le sous-schéma $V_{\Phi_0,\mathcal{A}}$ identifié ici à l'espace $\mathbb{C}^3$ des triplets $(\varepsilon^2_{12},\ \varepsilon^3_{12},\ \varepsilon^2_{13})$ sont : le point (0,0,0) pour l'orbite de $\mathrm{r}_{3,1}$, le plan $\{0\}\times\mathbb{C}^2$ privé de (0,0,0) pour l'orbite de r'_3 et le plan $\{t-1\}\times\mathbb{C}^2$ pour l'orbite de $\mathrm{r}_{3,t}$ avec $t\neq 1$. La variation de ε^2_{12} décrit la famille continue tandis que les variations de ε^3_{12} et ε^2_{13} expriment que $\mathrm{r}_{3,1}$ est adhérent à l'orbite de r'_3.

Etude locale de r'_3 : Le système $\delta.\Phi_0=0$ s'écrit :

$({}^{1}_{12})\ \ d^1_2+d^1_3=0\ ;\ ({}^{2}_{12})\ \ d^2_3-d^1_1=0\ ;\ ({}^{3}_{12})\ d^3_3-d^1_1-d^2_2=0\ ;\ ({}^{1}_{13})\ d^1_3=0\ ;\ ({}^{2}_{13})\ 0=0\ ;$

$({}^{3}_{13})\ \ d^3_1+d^2_3=0\ ;\ ({}^{1}_{23})\ 0=0\ ;\ ({}^{2}_{23})\ d^1_3=0\ ;\ ({}^{3}_{23})\ \ -d^1_2+d^1_3=0.$

On a $({}^{1}_{13})\simeq({}^{2}_{23})$; $({}^{2}_{13})$ et $({}^{1}_{23})$ ne donnent rien ; $({}^{1}_{12})$ et $({}^{1}_{13})$ entraînent $({}^{3}_{23})$ et l'on peut choisir $\mathcal{A}=\{({}^{1}_{12}),({}^{2}_{12}),({}^{3}_{12}),({}^{1}_{13}),({}^{3}_{13})\}$. On en déduit les équations

7.14 $\quad \varepsilon^1_{23}=0\ \ ;\ \ -\varepsilon^3_{23}\varepsilon^2_{13}+\varepsilon^2_{23}=0\ \ ;\ \ \varepsilon^3_{23}-\varepsilon^2_{23}=0.$

Ce système équivaut à $\varepsilon^{k}_{23}=0$, $k=1,2,3$. La déformation Y s'exprime à l'aide du paramètre libre ε^{2}_{13} et r'_3 se déforme sur la famille continue $r_{3,t}$; dim $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=|\mathscr{L}|=1$.

8 - DEFORMATION DES ALGEBRES DE LIE $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$.

Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$ produits semi-directs de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ par les $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modules irréductibles $\mathbb{C}^n$ étudiées par *G.Rauch* et *Richardson* [Ra][Ri] interdisent la réciproque du théorème de rigidité ; en effet on a :

(a) $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$ *pour* $n = 2p$ *et* $n = 4p + 1$ $(p\geq 2)$;

(b) $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$, *pour* $n=4p+3$ $(p\geq 3)$ *l'orbite de* $\mathfrak{g}$ *est ouverte et l'application quadratique de D.S.Rim est non nulle* [Ra] ;

(c) *Si* n *est égal à* 3, 5, 7 *ou* 11, *on a* $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{C}$ *et* $\mathfrak{g}$ *se déforme sur les orbites d'algèbres de Lie semi-simples de type* $A_1\times A_1$, A_2, B_2 *et* G_2 *respectivement* .

Nous allons retrouver ces résultats en cherchant une déformation Y équivalente à la déformation canonique par la méthode précédente.

Recherche d'un sous-ensemble admissible- Avec les bases e_+, e_-, e_0 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et $u_i(1\leq i\leq n)$ de $\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{g}$ est définie par les crochets :

8.1 $[e_+,e_-] = e_0$, $[e_0,e_+] = 2e_+$, $[e_0,e_-] = -2e_-$, $[e_0,u_i] = (n-2i+1)\, u_i$,
$[e_-,u_i] = i\, u_{i+1}$ $(1\leq i<n)$, $[e_+,u_i] = (n-i+1)\, u_{i-1}$ $(1<i\leq n)$.

Convenons d'indexer les bases par une lettre latine pour $\mathbb{C}^n$, grecque pour $\mathfrak{g}$. Le système $\delta.\phi_0=0$ est constitué d'équations repérées par les multi-indices $({}^{\gamma}_{\alpha\beta})$:

8.2 $({}^{\gamma}_{\alpha\beta})$: $(\delta.\Phi_0)^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda} (c^{\lambda}_{\alpha\beta}\, d^{\gamma}_{\lambda} - d^{\lambda}_{\alpha}\, c^{\gamma}_{\lambda\beta} - d^{\lambda}_{\beta}\, c^{\gamma}_{\alpha\lambda}) = 0$;

où $[d_{\alpha}{}^{\beta}]$ est la matrice de la dérivation dans la base choisie.

En écrivant les différentes équations, on peut choisir comme ensemble admissible $\mathscr{A}$ la famille des multi-indices suivant pour $n>3$:

$({}^{+}_{0\pm})$, $({}^{-}_{0+})$, $({}^{0}_{0\pm})$, $({}^{0}_{+-})$, $({}^{k}_{0+})$ pour $2k+1\neq n$, $({}^{k}_{0-})$ pour $1\leq k\leq n$, $({}^{k}_{+-})$ pour $2k=n+1$,
8.3 $({}^{+}_{0j})$ pour $2j+1\neq n$, $({}^{0}_{0j})$ pour $2j\neq n+1$, $({}^{-}_{0j})$ pour $2j\neq n+3$, $({}^{+}_{-j})$ pour $2j+3=n$,
$({}^{0}_{-j})$ pour $2j+1=n$, $({}^{-}_{+j})$ pour $2j=n+5$, $({}^{k}_{0j})$ pour $k\neq j$, $({}^{j-1}_{+j})$ pour $j>1$.

Ceci conduit à fixer les constantes de structure correspondantes de Y, soit :

$Y^{+}_{0+}=2$, $Y^{0}_{+-}=1$, $Y^{-}_{0+}=Y^{0}_{0\pm}=Y^{+}_{0-}=0$, $Y^{k}_{0+}=0$ $(2k+1\neq n)$, $Y^{k}_{0-}=0$ $(1\leq k\leq n)$, $Y^{k}_{+-}=0$ $(2k=n+1)$,
8.4 $Y^{+}_{0j}=0$ $(n\neq 2j+1)$, $Y^{0}_{0j}=0$ $(n+1\neq 2j)$, $Y^{-}_{0j}=0$ $(n+3\neq 2j)$, $Y^{+}_{-j}=0$ $(2j+3=n)$, $Y^{0}_{-j}=0$
$(2j+1=n)$, $Y^{-}_{+j}=0$ $(2j=n+5)$, $Y^{k}_{0j}=0$ $(k\neq j)$, $Y^{j-1}_{+j}=n-j+1$ $(j>1)$.

Remarque 8.5 : Pour $n=3$ on prend en plus de 8.3 les multi-indices $({}^{0}_{+3})$ et $({}^{1}_{12})$ ce qui fixe en plus de 8.4 les valeurs $Y^{0}_{+3}=0$ et $Y^{1}_{12}=0$. Dans tous les cas $|\mathscr{A}|=n^2+5n+5$.

Utilisation des équations de Jacobi.

Les composantes de la déformation Y vérifient les équations de Jacobi :

8.6 $\binom{\delta}{\alpha\beta\gamma}$: $\sum_\lambda (Y^\lambda_{\alpha\beta}\, Y^\delta_{\lambda\gamma} + Y^\lambda_{\beta\gamma}\, Y^\delta_{\lambda\alpha} + Y^\lambda_{\gamma\alpha}\, Y^\delta_{\lambda\beta})=0.$

Le report de 8.4 dans 8.6 fixera beaucoup d'autres coordonnées.

Les relations de Jacobi $\binom{\delta}{+-0}$ avec $\delta=\pm,0,k$ imposent :

8.7 $Y^-_{0-}=-2$; $Y^\pm_{+-}=Y^k_{0+}=Y^k_{+-}=0$ $(1\le k\le n)$.

Les relations de Jacobi 8.6 pour $(\alpha,\beta)=(+,0)$, $(0,-)$, $(-,+)$ et $\gamma=k$ $(1\le k\le n)$ fixent avec 8.4 et 8.7 toutes les constantes de structure $Y^\gamma_{\alpha\beta}$ avec $\alpha=\pm,0$:

Lemme 8.8 *Le choix de l'ensemble admissible 8.3 donne* $Y^\gamma_{\alpha\beta}=(\Phi_0)^\gamma_{\alpha\beta}$ *pour* $\alpha=\pm,0$, *c.à.d la déformation obtenue Y préserve la représentation adjointe de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *dans* $\mathfrak{g}$.

Remarque 8.9 Plus généralement si $\mathfrak{g}$ est produit semi-direct d'une partie réductive $\mathfrak{k}$ et du plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$, on peut choisir $\mathcal{A}$ tel que la déformation Y préserve la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$. Un tel choix allège les calculs.

Considérons les relations 8.6 avec $\alpha=0,\pm$; $\beta=i$, $\gamma=j$ pour $1\le i<j\le n$. Si $\alpha=0$ on obtient $(n+1-i-j-1/2.Y^\delta_{0\delta}).Y^\delta_{ij}=0$, d'où pour $\delta=\pm,0$ et k :

8.10 $(n-i-j)\, Y^+_{ij} = 0$;

8.11 $(n+2-i-j)\, Y^-_{ij} = 0$;

8.12 $(n+1-i-j)\, Y^0_{ij} = 0$;

8.13 $[n+1+2(k-i-j)]\, Y^k_{ij} = 0$.

Si $\alpha=+$, on a $\sum_\lambda Y^\lambda_{ij}\, Y^\delta_{\lambda+}+(n+1-i)\, Y^\delta_{i-1,j}+(n+1-j)\, Y^\delta_{i,j-1}=0$, d'où pour $\delta=\pm$, 0 et k, en convenant que $Y^\delta_{i-1,j}$ est nul pour $i=1$ ainsi que $Y^{k+1}_{\alpha\beta}$ pour $k=n$:

8.14 $2\, Y^0_{ij}+(n+1-i)\, Y^+_{i-1,j}+(n+1-j)\, Y^+_{i,j-1}=0$;

8.15 $(n+1-i)\, Y^-_{i-1,j}+(n+1-j)\, Y^-_{i,j-1}=0$;

8.16 $-\, Y^-_{ij}+(n+1-i)\, Y^0_{i-1,j}+(n+1-j)\, Y^0_{i,j-1}=0$;

8.17 $(n-k)\, Y^{k+1}_{ij}=(n+1-i)\, Y^k_{i-1,j}+(n+1-j)\, Y^k_{i,j-1}$.

Si $\alpha=-$ on obtient $\sum_\lambda Y^\lambda_{ij}\, Y^\delta_{\lambda-}+i\, Y^\delta_{i+1,j}+j\, Y^\delta_{i,j+1}=0$ d'où pour $\delta=\pm,0$ et k, avec les conventions précédentes :

8.18 $i\, Y^+_{i+1,j}+j\, Y^+_{i,j+1}=0$;

8.19 $-2\, Y^0_{ij}+i\, Y^-_{i+1,j}+j\, Y^-_{i,j+1}=0$;

8.20 $Y^+_{ij}+i\, Y^0_{i+1,j}+j\, Y^0_{i,j+1}=0$;

8.21 $(k-1)\, Y^{k-1}_{ij}=i\, Y^k_{i+1,j}+j\, Y^k_{i,j+1}$;

De 8.10 et 8.18 on tire :

8.22 ε^{+}_{ij} vaut 0 pour $n\neq i+j$ et $(-1)^{i+1}(n-2)!/(i-1)!(n-i-1)!\ \varepsilon^{+}_{1,n-1}$ pour $i+j=n$.

De 8.12, 8.14 et 8.22 on tire :

8.23 ε^{0}_{ij} vaut 0 pour $i+j\neq n+1$ et $(-1)^{i}(n-2i+1)(n-2)!/2(i-1)!(n-i)!\ \varepsilon^{+}_{1,n-1}$ pour $i+j=n+1$.

De 8.11 et 8.16 ($1<i<j\leq n$) on tire :

8.24 ε^{-}_{ij} vaut 0 pour $i+j\neq n+2$ et $(-1)^{i+1}(n-2)!/(i-2)!(n-i)!\ \varepsilon^{+}_{1,n-1}$ pour $i+j=n+2$.

On vérifie que ces solutions sont compatibles avec les autres équations.

Remarque 8.25 : Si $n=2p$, on a $\varepsilon^{+}_{p-1,p+1}=0$ en faisant $i=p-1$ et $j=p$ dans 8.18, d'où $\varepsilon^{+}_{1,n-1}=0$.

Calcul des Y^{k}_{ij}: Les coordonnées Y^{k}_{ij} se calculent à l'aide de 8.13, 8.17 et 8.21. Si $n=2p$ les Y^{k}_{ij} sont nuls, 8.13, et avec 8.22, 8.23, 8.24 et 8.25 on a $Y^{0}_{ij}=Y^{\pm}_{ij}=0$, d'où

Lemme 8.26 *Si $n=2p$, la déformation Y est constante et* $H^{2}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.

Si n est impair les Y^{k}_{ij} non nuls vérifient $n+1+2k=2(i+j)$, 8.13. La formule 8.21 pour $k=1$ donne $i\ Y^{1}_{i+1,j}+j\ Y^{1}_{i,j+1}=0$, d'où :

8.27 $Y^{1}_{i+1,j}=(-1)^{i}((n-1)/2)!/i!((n-1)/2-i)!\ \varepsilon^{1}_{1,(n+1)/2}$, pour $i<j$ et $2(i+j)=n+1$.

Avec 8.17 on en déduit les autres Y^{k}_{ij} :

8.28 $Y^{k}_{ij}=A^{k}_{ij}\ \varepsilon^{1}_{1,(n+1)/2}$ avec $A^{k}_{ij}\in\mathbb{C}$.

Remarque 8.29 *:* pour $n=4p+1\geq5$, si l'on fait $k=1$, $i=p$ et $j=p+1$ dans 8.21 il vient $(p+1)Y^{1}_{p,p+2}=-p\ Y^{1}_{p+1,p+1}=0$ de sorte que $\varepsilon^{1}_{1,(n+1)/2}$ s'annule, 8.27, ainsi que tous les Y^{k}_{ij}.

Autres relations et obstructions.

Les relations de Jacobi avec $\alpha=i$, $\beta=j$, $\gamma=k$ s'écrivent :

8.30 $$\oint_{ijk}(Y^{+}_{ij}\ Y^{\delta}_{+k}+Y^{-}_{ij}\ Y^{\delta}_{-k}+Y^{0}_{ij}\ Y^{\delta}_{0k})=-\oint_{ijk}(\sum_{l=1}^{n}Y^{l}_{ij}Y^{\delta}_{lk})$$

où $\oint_{ijk}$ indique que la somme est prise sur les permutations circulaires de ijk .

Si $\delta=\pm,0$ le premier membre de 8.30 est nul. Si $\delta=d\in\{1,...,n\}$ l'égalité 8.30 n'est pas triviale pour $i+j+k=n+1+d$.

Pour $n=4p+1$ ($p>1$) la relation 8.30 pour $d=1$, $i=2$, $j=2p$ et $k=2p+1$ donne $Y^{+}_{2p,2p+1}=0$, d'où $\varepsilon^{+}_{1,n-1}=0$, 8.22. Tenant compte de 8.22, 8.23, 8.24 et 8.29 on a :

Lemme 8.31 *Si $n=4p+1$ ($p>1$) la déformation Y est constante et* $H^{2}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.

Cas $n=5$: Les relations 8.30 non triviales pour les $\delta=d$ tels que $i+j+k=6+d$, sont vérifiées par 8.22, 8.23 et 8.24. Remarquant que $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ se contracte en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^5$ au sens d'*Inonu-Wigner* pour un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ triplet bien choisi [I-W][K][Ri], on a :

Lemme 8.32 *Si $n=5$ on a $Y=\Phi_0+\varepsilon^+_{14}\Psi_1$ où Ψ_1 est un deux-cocycle de classe non nulle. Le paramètre ε^+_{14} est continu et décrit l'orbite de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.*

Cas $n=4p+3$. Si l'on pose $d=1$, $i=3$, $j=4$, $k=4p-2$ dans 8.30, le premier membre s'annule et l'on a pour $p>2$:

8.33 $$Y^{2p}_{4,4p-2}\,Y^1_{2p,3} + Y^{2p-1}_{4p-2,3}\,Y^1_{2p-1,4} = 0\,.$$

Ceci donne une obstruction $Q(p)\,\varepsilon^{2p-3}_{1,4p-2}\,\varepsilon^1_{1,2p+2} = 0$ avec un polynôme $Q(p)=8p^5-60p^4+30p^3+125p^2+67p+10$ non nul pour $p\geq3$. En tenant compte de 8.28 on a :

8.34 $$(\varepsilon^1_{1,2p+2})^2= 0\,.$$

Le terme de droite de 8.30 est nul pour $\delta=d$ à cause de 8.34 pour $p\geq3$. En particulier pour $d=1$, $i=2$, $j=3$, $k=4p$ on a $Y^+_{3,4p}Y^1_{+2}=0$, d'où $\varepsilon^+_{1,n-1}=0$, 8.22. Le seul paramètre restant est $\varepsilon^1_{1,2p+2}$ soumis à 8.34, les autres relations 8.30 étant vérifiées.

Lemme 8.35 *Si $n=4p+3$ ($p>2$), on a $Y=\Phi_0+\varepsilon^1_{1,2p+2}\Psi_1$ où Ψ_1 est un 2-cocycle de classe non nulle, de composantes non nulles $(\Psi_1)^k_{ij}=A^k_{ij}$, 8.28, et $\varepsilon^1_{1,2p+2}$ un élément nilpotent non nul d'ordre 2.*

Cas $n=4p+3$ pour $p=0,1,2$.
Si $p=0$ on doit imposer $\varepsilon^1_{12}=0$ d'où un seul paramètre (continu) ε^+_{12} et la déformation s'écrit $Y=\Phi_0+\varepsilon^+_{12}\Psi_1$ où Ψ_1 est un 2-cocycle de classe non nulle.
Si $p=1,2$ les relations 8.30 donnent les égalités :

8.36 $$\varepsilon^+_{16} = 3/20\,(\varepsilon^1_{14})^2 \quad \text{pour } p=1\ ;$$

8.37 $$\varepsilon^+_{1,10} = 5/756\,(\varepsilon^1_{16})^2 \quad \text{pour } p=2\ ;$$

d'où la déformation $Y=\Phi_0+\varepsilon\Psi_1+\varepsilon^2\Psi_2$ avec $\varepsilon=\varepsilon^1_{1,2p+2}$, Ψ_1 un 2-cocycle de classe non nulle et $\Psi_2\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.
Les algèbres de Lie semi-simples de type $A_2\times A_2$, B_2 et G_2 se contractent au sens d'*Inonu-Wigner* en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^{4p+3}$ pour $p = 0$, 1 et 2 respectivement en utilisant un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ triplet bien choisi [I-W][K][Ri]. Les déformations non triviales obtenues décrivent donc les orbites de $A_2\times A_2$, B_2 et G_2. Cette étude se résume ainsi :

Proposition 8.38 *L'étude locale des algèbres de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$ est donnée ainsi où Y désigne une déformation équivalente à la déformation canonique , 4.17 :*
- Cas $n=2p$: La déformation Y est constante, l'orbite de $\mathfrak{g}$ est ouverte et $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.

- *Cas $n=4p+1$: Si $p=1(n=5)$ on a $Y=\Phi_0+\varepsilon_{14}^+\Psi_1$ où ε_{14}^+ est un paramètre continu et Ψ_1 un 2-cocycle de classe non nulle, $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{C}$ et Y décrit l'orbite de A_2.*
Si $p>1$, la déformation Y est constante, l'orbite de $\mathfrak{g}$ est ouverte et $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.
- *Cas $n=4p+3$: Si $p=0(n=3)$ on a $Y=\Phi_0+\varepsilon_{12}^+\Psi_1$ où ε_{12}^+ est un paramètre continu et Ψ_1 un 2-cocycle de classe non nulle, $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{C}$ et Y décrit l'orbite de $A_1\times A_1$.*
Si $p>0$ on a $Y=\Phi_0+\varepsilon\Psi_1+\varepsilon^2\Psi_2$ avec $\varepsilon=\varepsilon_{1,2p+2}^1$ et Ψ_1 un 2-cocycle de classe non nulle, $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{C}$. Pour $p=1,2$ $(n=7,11)$ le paramètre ε n'est pas nilpotent et décrit l'orbite de B_2 et G_2 respectivement.
Pour $p\geq 3$ le paramètre ε est nilpotent d'ordre 2 et l'orbite de $\mathfrak{g}$ est ouverte.

Remarque 8.39 *:* La relation de nilpotence dans le cas $n=4p+3$, $p\geq 3$, correspond exactement à la première obstruction rencontrée dans la théorie formelle, donnée par l'application quadratique de *Rim*, cf [Ra]. Elle correspond à un élément nilpotent d'ordre 2 de $m(\hat{O})$ de la forme suivante, cf 6.11 :

8.40 $$\varepsilon_{1,2p+2}^1 = X_{1,2p+2}^1 + \sum_{\gamma\in\mathcal{J}} X_\gamma g_\gamma(X^{\mathcal{A}}) \ ;$$

où chaque $g_\gamma(X^{\mathcal{A}})$ est une série formelle en $X^{\mathcal{A}}-(\Phi_0)^{\mathcal{A}}$ sans terme constant.

CONCLUSION

Ce travail s'applique intégralement à l'étude générale des déformations d'un point $\mathfrak{g}$ d'un schéma sur lequel opère algébriquement un groupe algébrique. On peut aussi l'appliquer dans un cadre analytique. Cette généralisation perd l'interprétation des espaces tangents au schéma et à l'orbite en terme de $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ et de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ qui est tout à fait fortuite. Cette interprétation en termes de cocycles et cobords d'un complexe adapté à la catégorie pour laquelle on construit le schéma est valable pour les algèbres de Lie (complexe de *Chevalley*), les algèbres associatives (complexe de *Hochschild*), les algèbres de *Leibniz* récemment introduites par *Loday* (complexe développé par *C.Cuvier*), etc. Si cet usage de la cohomologie semble fondamental chez *Gerstenhaber* (qui se place en dimension finie ou infinie) il n'est cependant pas essentiel ici mais permet une belle formulation de la théorie.
L'étude des déformations proposée ici ne s'écarte jamais des équations qui définissent le schéma au voisinage du point. La pratique utilise des techniques d'algèbre linéaire, calcul de rang, fonctions implicites pouvant être obtenues par un algorithme jusqu'à un ordre donné. Chacune des étapes du calcul est donc accessible à l'ordinateur où seul le problème du temps de calcul en limite les investigations.
Vu la complexité croissante des équations avec la dimension, une étude locale plus fine des schémas s'impose et nécessite la mise en valeur de la structure particulière de l'objet $\mathfrak{g}$ à déformer. On l'a déjà vu pour les lois $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^n$, §8, où le choix de $\mathcal{A}$ n'était pas au hasard. Ceci correspondait à la propriété suivante : si

$\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{n}$ est une décomposition de *Chevalley* d'une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$, on peut déformer $\mathfrak{g}$ (à équivalence près) en conservant la représentation adjointe de la partie réductive $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. La méthode consiste encore à fixer d'autres constantes de structure selon une démarche déjà utilisée dans cet article. D'autres propriétés entièrement différentes sont utilisées pour les algèbres associatives (carquois), etc.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] N.BOURBAKI, Algèbre, chap. 4 à 7, Masson (1981)

[Br] F.BRATZLAVSKY, Sur les algèbres admettant un tore d'automorphismes donné . J.of Alg. 30 , 305-316 (1974).

[C1] R.CARLES, Sur certaines classes d'algèbres de Lie rigides. Math.ann. 272, 477-488 (1985).

[C2] R.CARLES, Déformations et éléments nilpotents dans les schémas définis par les identités de Jacobi. C.R.A.S. 312 , 671-674 (1991).

[C-D] R.CARLES, Y.DIAKITE, Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension ≤7. J.of Alg. 91, 53-63 (1984).

[G1] M.GERSTENHABER, The cohomology structure of an associative ring. Ann.of Math. 78, 2, 267-288 (1963).

[G2] M.GERSTENHABER, On the deformations of rings and algebras. Ann.of Math. 79, 59-103 (1964).

[G-S] M.GERSTENHABER, S.D.SCHACK, Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein. J. of Pure and Appl. Alg. 43 , 53-74 (1986).

[I-W] E.INONU, E.P.WIGNER, On the contraction of groups and their representation, Proc.Nat.Acad.Sci. 39, 510-526 (1953).

[K] B.KOSTANT, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. Math. 81, 973-1032 (1959).

[N-R] A.NIJENHUIS, R.W.RICHARDSON, Cohomology and deformations in graded Lie Algebras, Bull.Amer.Math.Soc. 72, 1 (1966).

[Ra] G.RAUCH, Effacement et déformation. Ann.Inst.Fourier 22, 239-269 (1972).

[Ri] R.W.RICHARDSON, The rigidity of semi-direct products of Lie algebras. Pacific J.of Math. 22, 339-344 (1967).

Roger CARLES
Université de Poitiers, URA CNRS D 1322
40, avenue du Recteur Pineau,
86 022 Poitiers, France.