

ABDELHAK MAZOUZ

**Analyse p -adique et congruences des coefficients
de la série e^{xe^x}**

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, n° 2 (1996), p. 171-181

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_171_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Analyse p -adique et congruences des coefficients de la série e^{xe^x}

MAZOUZ Abdelhak

Université Cadi Ayyad

Faculté des Sciences-Semlalia

Département de Mathématiques

BP S15 MARRAKECH

(Maroc)

1 Introduction

Nous avons étudié dans [M.A.] par des méthodes d'analyse p -adique des congruences satisfaites par les nombres de Bell généralisés $P(n, \lambda)$ introduits par Carlitz. Ces nombres ont pour fonction génératrice: $\sum_{n \geq 0} P(n, \lambda) \frac{x^n}{n!} = \exp(\lambda \cdot x + (e^x - 1))$. Nous étudions ici des nombres B_n introduits par P. Barrucand [B.P.] assez proches des $P(n, \lambda)$ qui ont pour fonction génératrice exponentielle: $\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{xe^x}$. De la série génératrice exponentielle, on tire facilement la relation suivante :

$$B_0 = 1 \text{ et } B_n = \sum_{j=1}^n j^{(n-j)} \binom{n}{j} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*.$$

Le but de notre travail est de montrer les congruences suivantes

- si p premier impair, on a pour $h \geq 1$ et $n \geq p^{2h}(1 + h + p^{-1})$: $B_{n+(p-1)p^{3h}} \equiv B_n \pmod{p^h}$
- si $p = 2$, on a pour $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(h + 2^{-1})$: $B_{n+2^{3h+1}} \equiv B_n \pmod{2^h}$

Notre méthode consiste à montrer que la fonction génératrice des nombres B_n est un élément analytique p -adique sur un quasi-connexe de \mathbb{C}_p . Les théorèmes généraux de l'analyse p adique, théorème de Mittag-Leffler p adique [R.Ph.] et inégalités de Cauchy [A.Y.], pour les éléments analytiques p -adiques sur des quasi-connexes de \mathbb{C}_p , permettent alors de trouver des congruences entre les coefficients de leur série de Taylor à l'origine.

2 Notation

Soit p un nombre premiers, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_p , \mathbb{Q}_p , \mathbb{C}_p ont leur signification habituelle, cf. [A]. On note \mathcal{O}_p l'anneau des entiers de \mathbb{C}_p . La valeur absolue p -adique sur $\mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p$, est normalisée par $|p| = p^{-1}$. On désigne par r un nombre réel strictement positif. Soit $a \in \mathbb{C}_p$, on note $B^+(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| \leq r\}$ et $B^-(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| < r\}$ les boules fermées et ouvertes de rayon r de \mathbb{C}_p . On note aussi: $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}_p$.

On désigne par $\mathcal{H}_0(\mathcal{A})$ l'espace des éléments analytiques sur \mathcal{A} , qui tendent vers zéro à l'infini si \mathcal{A} est non borné, muni de la norme de la convergence uniforme sur \mathcal{A} , notée $\|F\|_{\mathcal{A}} = \sup_{x \in \mathcal{A}} |F(x)|$.

3 Transformation de Laplace formelle

Définition 3.1 Soit $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \in K[[x]]$ où K est un corps de caractéristique zéro. On pose: $\mathcal{L}(F(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. L'application linéaire \mathcal{L} de $K[[x]]$ dans lui même ainsi définie est appelée la transformation de Laplace formelle, cf.[B.D.]

Lemme 3.2 Soit \mathcal{L} la transformation de Laplace formelle, alors:

$$\mathcal{L}(\exp(xe^x)) = \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}.$$

Preuve: Par définition $e^{xe^x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(xe^x)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$ et donc:

$$\mathcal{L}(e^{xe^x}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \mathcal{L}(x^n e^{nx}) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n.$$

Il est facile de montrer, cf. [B.D.], que: $\mathcal{L}(x^n e^{nx}) = n! x^n \frac{1}{(1-nx)^{n+1}}$, on en déduit que

$$\sum_{n \geq 0} B_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}. \quad \square$$

4 Étude de la fonction génératrice

Lemme 4.1 La série $F(x) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n$ est congrue modulo $p^h \mathcal{O}_p[[x]]$ à la fraction rationnelle $F_{h,p}(x)$ où :

$$F_{h,p}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} x^j (1-jx)^{p^h-j-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p^h-1} [(1-kx)^{p^h} - x^{p^h}]}{\prod_{j=0}^{p^h-1} [(1-jx)^{p^h} - x^{p^h}]}$$

Preuve: Soit $F(x) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-nx)^{n+1}}$.

Posons $n = kp^h + j$ où $0 \leq j \leq p^h - 1$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{p^h-1} \sum_{k \geq 0} \frac{x^{kp^h+j}}{[1 - (kp^h + j)x]^{kp^h+j+1}} \\ F(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1} \sum_{k \geq 0} \frac{x^{kp^h+j}}{(1-jx)^{kp^h+j+1}} \pmod{p^h \mathcal{O}_p[[x]]} \\ F(x) &\equiv \sum_{j=0}^{p^h-1} \frac{x^j}{(1-jx)^{j+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^{p^h}}{(1-jx)^{p^h}}} \pmod{p^h \mathcal{O}_p[[x]]} \\ F(x) &\equiv \frac{\sum_{j=0}^{p^h-1} x^j (1-jx)^{p^h-j-1} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p^h-1} [(1-kx)^{p^h} - x^{p^h}]}{\prod_{j=0}^{p^h-1} [(1-jx)^{p^h} - x^{p^h}]} \pmod{p^h \mathcal{O}_p[[x]]} \end{aligned}$$

Appelons $F_{h,p}$ le second membre de l'égalité. D'où la congruence énoncée dans le lemme \square

Lemme 4.2 Soit $Q_{h,p}(x) = \prod_{j=0}^{p^h-1} [(1-jx)^{p^h} - x^{p^h}]$ le dénominateur de $F_{h,p}$ et soit

$R_{h,p}(x) = \prod_{j=0}^{p^h-1} [(x-j)^{p^h} - 1]$ le polynôme réciproque de $Q_{h,p}(x)$. Alors :

$$R_{h,p}(x) \equiv [R_p(x)]^{p^{2h-1}} \pmod{p \mathbb{Z}_p[x]}$$

où $R_p(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-p)$.

Preuve:

$$\begin{aligned} R_{h,p}(x) &= \prod_{j=0}^{p^h-1} [(x-j)^{p^h} - 1] \\ R_{h,p}(x) &\equiv \prod_{j=0}^{p^h-1} (x-j-1)^{p^h} \pmod{p \mathbb{Z}_p[x]} \\ R_{h,p}(x) &\equiv [(x-1) \dots (x-p)]^{p^{2h-1}} \pmod{p \mathbb{Z}_p[x]}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Notons $\frac{1}{\beta_{i,j}}$ ($1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq p^{2h-1}$) les racines de $R_{h,p}(x)$. Le lemme de Hensel [A.Y.] et le lemme 4.1 montrent que ces racines se groupent en p classes contenant chacune p^{2h-1} racines. Soient θ_i , $1 \leq i \leq p-1$ le représentant de Teichmüller de la classe résiduelle de i .

La racine $\beta_{i,j}^{-1}$ appartient à la classe résiduelle de i pour ($1 \leq i \leq p-1$). Elle vérifie donc :

$$\left| \frac{1}{\beta_{i,j}} - \theta_i \right| < 1.$$

Lemme 4.3 Soient $\beta_{i,j}$ ($1 \leq j \leq p^{2h-1}$) les racines de $Q_{h,p}(x)$ qui se groupent dans la classe résiduelle de i^{-1} pour ($1 \leq i \leq p-1$), alors:

$$|\theta_i^{-1} - \beta_{i,j}| \leq p^{-1/p^{2h}}$$

Preuve: Le degré sur \mathbb{Q}_p de l'extension $\mathbb{Q}_p(\beta_{i,j})$ est inférieur ou égal à p^{2h} car le polynôme $Q_{h,p}(x)$ est de degré p^{2h} . Donc d'après la formule $ef = n$, reliant la ramification, le degré résiduel et le degré d'une extension finie de \mathbb{Q}_p , on a dans le corps $\mathbb{Q}_p(\beta_{i,j})$:

$$|\theta_i^{-1} - \beta_{i,j}| \leq p^{-1/p^{2h}}.$$

□

Lemme 4.4 Soient $\frac{1}{\beta_{p,j}}$ ($1 \leq j \leq p^{2h-1}$) les racines de $R_{h,p}(x)$ qui appartiennent à la classe résiduelle de p , on a :

$$|\beta_{p,j}| \geq p^{1/p^{2h}}.$$

Preuve: On se place dans le corps $\mathbb{Q}_p(\beta_{p,j})$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus on a dans ce corps, $\left| p - \frac{1}{\beta_{p,j}} \right| < 1$ Or $|p| < 1$, d'où $\left| \frac{1}{\beta_{p,j}} \right| < 1$. En appliquant un argument analogue à celui exposé dans le lemme précédent on en déduit que $\left| \frac{1}{\beta_{p,j}} \right| \leq p^{-1/p^{2h}}$. Donc $|\beta_{p,j}| \geq p^{1/p^{2h}}$. \square

Proposition 4.5 $F_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle nulle à l'infini sans pôle sur le quasi-connexe

$$D_{h,p} = \left(\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} B^+(\theta_i^{-1}, p^{-1/p^{2h}}) \right) \cap B^-(0, p^{1/p^{2h}})$$

Preuve: La proposition est évidente puisque $F_{h,p}(x)$ est une fraction rationnelle sans pôle dans $D_{h,p}$, et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. \square

5 Congruences

Proposition 5.1 Sur la quasi-connexe

$$D_{h,p} = \left(\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} B^+(\theta_i^{-1}, p^{-1/p^{2h}}) \right) \cap B^-(0, p^{1/p^{2h}})$$

la fraction rationnelle $F_{h,p}$ vérifie l'estimation suivante:

$$\|F_{h,p}\|_{D_{h,p}} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}.$$

Preuve: Soit $N_{h,p}(x) = \sum_{j=0}^{p^h-1} x^j (1-jx)^{p^h-j-1} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p^h-1} [(1-kx)^{p^h} - x^{p^h}]$, alors on a

$F_{h,p}(x) = \frac{N_{h,p}(x)}{Q_{h,p}(x)}$. Soit $\frac{1}{\beta_{i,j}}$ ($1 \leq j \leq p^{2h-1}$) les racines de $R_{h,p}(x)$ de la classe résiduelle de i , pour $1 \leq i \leq p$.

Donc $Q_{h,p}(x) = a_{h,p} \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{p^{2h-1}} (x - \beta_{i,j})$ où $a_{h,p}$ est le coefficient dominant de $Q_{h,p}(x)$.

Ainsi $|F_{h,p}(x)| = \frac{|N_{h,p}(x)|}{|a_{h,p}| \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{p^{2h-1}} |x - \beta_{i,j}|}$.

Cherchons maintenant à minorer $Q_{h,p}(x)$ dans $D_{h,p}$.

- Si $1 \leq i \leq p - 1$

Soit $x \in D_{h,p}$: $|x - \beta_{i,j}| = |x - \theta_i^{-1} + \theta_i^{-1} - \beta_{i,j}|$ or $|x - \theta_i^{-1}| > p^{-1/p^{2h}}$ et $|\theta_i^{-1} - \beta_{i,j}| \leq p^{-1/p^{2h}}$. D'où $|x - \beta_{i,j}| = |x - \theta_i^{-1}|$ pour $1 \leq j \leq p^{2h-1}$.

- Si $i = p$

Soit $x \in D_{h,p}$: $|x - \beta_{p,j}| = |\beta_{p,j}|$, car $|x| < p^{1/p^{2h}}$ et $|\beta_{p,j}| \geq p^{1/p^{2h}}$.

Donc pour $x \in D_{h,p}$, on a :

$$|Q_{h,p}(x)| = |a_{h,p}| \prod_{i=1}^{p-1} |x - \theta_i^{-1}|^{p^{2h-1}} \cdot \prod_{j=1}^{p^{2h-1}} |\beta_{p,j}|$$

Or $|a_{h,p}| \cdot \prod_{j=1}^{p^{2h-1}} |\beta_{p,j}| = 1$ ce qui entraîne que:

$$|Q_{h,p}(x)| \geq (p^{-1/p^{2h}})^{(p-1)p^{2h-1}} = p^{-1+p^{-1}} \tag{1}$$

Cherchons maintenant une majoration de $N_{h,p}$ dans $D_{h,p}$, par définition on a :

$$N_{h,p}(x) = \sum_{j=0}^{p^h-1} x^j (1 - jx)^{p^h-j-1} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p^h-1} [(1 - kx)^{p^h} - x^{p^h}].$$

Comme $x \in D_{h,p}$, on a $|x| < p^{1/p^{2h}}$, et donc :

$$|N_{h,p}(x)| \leq (p^{1/p^{2h}})^{p^{2h}-1} = p^{1-p^{-2h}}. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) on obtient, $\|F_{h,p}\|_{D_{h,p}} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$. □

Lemme 5.2 Soit k un entier et soit $\ell(k)$ l'entier naturel défini par $p^{\ell(k)} \leq k < p^{\ell(k)+1}$. On pose :

$$\begin{aligned} E_p(k) &= -2 + p^{-1} + (k + 1) p^{-2h} \\ S_p(k) &= -2 + p^{-1} + (k + 1) p^{-2h} + j + 2h - \ell(k - 1). \end{aligned}$$

On a pour $j \geq 1$ et $h \geq 1$ les inégalités suivantes :

1. si $k - 1 \geq p^{j+2h}$, $E_p(k) > j - 1$,
2. si $p > 2$, $S_p(k) > j - 1$,
3. si $p = 2$, $S_2(k) > j - 2$,

Preuve: $E_p(k) = -2 + p^{-1} + (k + 1)p^{-2h}$

Si $k - 1 \geq p^{j+2h}$ alors: $E_p(k) \geq -2 + p^{-1} + 2p^{-2h} + p^j$

Comme $p^j \geq j + 1$ on a $E_p(k) > j - 1$.

D'autre part, on a: $S_p(k) = -2 - p^{-1} + (k + 1)p^{-2h} + j + 2h - \ell(k - 1)$

Comme $\ell(k - 1) \leq \frac{\log(k - 1)}{\log p}$, on en déduit:

$$S_p(k) \geq -2 - p^{-1} + (k + 1)p^{-2h} + j + 2h - \frac{\log(k - 1)}{\log p}$$

Posons: $g(x) = -2 - p^{-1} + (x + 1)p^{-2h} + j + 2h - \frac{\log(x - 1)}{\log p}$ où x est un réel ≥ 1 . On

montre facilement que le minimum de $g(x)$ est atteint pour $x - 1 = \frac{p^{2h}}{\log p}$.

Comme $\ell(k - 1)$ garde la même valeur pour $p^m \leq k - 1 < p^{m+1}$ on en déduit que le minimum de $S_p(k)$ est atteint pour $k - 1 = p^{2h-1}$ si $p > 2$ (resp. pour $k - 1 = 2^{2h}$ si $p = 2$). D'où les inégalités suivantes:

1. Si $p > 2$ on a: $S_p(k) \geq S_p(1 + p^{2h-1})$ et

$$\begin{aligned} S_p(1 + p^{2h-1}) &= -2 - p^{-1} + (2 + p^{2h-1})p^{-2h} + j + 2h - (2h - 1) \\ &= -1 + j + 2p^{-2h} \end{aligned}$$

D'où $S_p(k) > j - 1$ si $p > 2$.

2. Si $p = 2$ et $h \geq 1$ on a: $S_2(k) \geq S_2(1 + 2^{2h-1})$ et

$$\begin{aligned} S_2(1 + 2^{2h}) &= -2 - 2^{-1} + (2 + 2^{2h})2^{-2h} + j + 2h - 2h \\ S_2(1 + 2^{2h}) &= j - 1 - 2^{-1} + 2^{-2h+1} > j - 2. \end{aligned}$$

D'où $S_2(k) > j - 2$ si $h \geq 1$.

□

Lemme 5.3 Soit $F_{h,p}(x) = \sum_{n \geq 0} B(n, h) x^n$, le développement en série de Taylor de la fonction rationnelle $F_{h,p}$. Soient $j \geq 1$ et $h \geq 1$

- si $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1 + j - p^{-1})$ on a: $B(n + (p-1)p^{j+2h}, h) \equiv B(n, h) \pmod{p^j}$
- si $p = 2$ et $n \geq 2^h(j + 2^{-1})$ on a: $B(n + 2^{j+2h+1}, h) \equiv B(n, h) \pmod{2^j}$

Preuve: $F_{h,p}$ est un élément analytique borné sur $D_{h,p}$. D'après le théorème de Mittag-Leffler p -adique [R.Ph.] on a:

$$F_{h,p} = \sum_{i=1}^p F_{i,h} \text{ où } F_{i,h} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))) \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1,$$

et $F_{p,h} \in \mathcal{H}_0(B^-(0, (p^{1/2h})))$ si $i = p$. Pour $1 \leq i \leq p-1$ on a:

$$F_{i,h}(x) = \sum_{k \geq 1} b_{i,h,k} (1 - x \theta_i)^{-k} \text{ avec } \|F_{i,h}\|_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))} = \sup_k |b_{i,h,k}| p^{k/p^{2h}}.$$

Pour $|x| < 1$, on a:

$$(1 - x \theta_i)^{-k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} \theta_i^n x^n$$

$$\text{Si l'on pose } F_{i,h}(x) = \sum_{n \geq 0} f_{i,h,n} x^n \text{ on a: } f_{i,h,n} = \sum_{k \geq 1} b_{i,h,k} \theta_i^n \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Le théorème de Mittag-Leffler fournit l'inégalité de norme suivante:

$$\sup_{1 \leq i \leq p-1} \|F_{i,h}\|_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i^{-1}, p^{-1/p^{2h}})} \leq \|F_{h,p}\|_{D_{h,p}}$$

De la proposition 5.1 on déduit que: $\sup_i \|F_{i,h}\|_{\mathbb{C}_p - B^+(\theta_i^{-1}, (p^{-1/p^{2h}}))} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$ ce qui entraîne que:

$$|b_{i,h,k}| \leq p^{2-p^{-1}-(k+1)p^{-2h}} \quad (1)$$

et on a donc, d'après l'inégalité ultramétrique:

$$\begin{aligned} & |f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \\ & \leq \sup_k |b_{i,h,k}| \left| \theta_i^{n+(p-1)p^{j+2h}} \binom{n+(p-1)p^{j+2h}+k-1}{k-1} - \theta_i^n \binom{n+k-1}{k-1} \right| \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq p-1$ on a $\theta_i^{p-1} = 1$. D'autre part on a d'après [S.W.]:

$$\left| \binom{n+(p-1)p^{j+2h}+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} \right| \leq \inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)})$$

Rappelons que:

$$E_p(k) = -2 + p^{-1} + (k+1)p^{-2h} \text{ et } S_p(k) = -2 + p^{-1} + k + 1)p^{-2h} + j + 2h - \ell(k-1).$$

D'après (1) on déduit que : $|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{-E_2(k)} \inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)})$.

Deux cas sont à envisager : $k-1 < p^{j+2h}$ et $k-1 \geq p^{j+2h}$.

Si $k-1 \geq p^{j+2h}$ alors $\inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)}) = 1$ et $E_2(k) > j-1$. Ainsi:

$$|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{1-j}$$

Si $k-1 < p^{j+2h}$ alors $\inf(1, p^{-j-2h+\ell(k-1)}) = p^{-j-2h+\ell(k-1)}$. On en déduit que

$|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| \leq p^{-S_p(k)}$. Du lemme 5.2 on déduit que, pour $1 \leq i \leq p-1$, on a:

$$|f_{i,h,n+(p-1)p^{j+2h}} - f_{i,h,n}| < p^{1-j} \text{ si } p > 2 \quad (2),$$

respectivement

$$|f_{i,h,n+2j+2h} - f_{i,h,n}| < 2^{-j+2} \text{ si } p = 2 \quad (3)$$

• si $i = p$, $F_{p,h} \in \mathcal{H}_o(B^-(0, (p^{1/p^{2h}})))$

Comme $F_{p,h}(x) = \sum_{n \geq 0} f_{p,h,n} x^n$, de l'estimation de la proposition 5.1

on déduit : $\|F_{p,h}\|_{B^+(0, p^{1/p^{2h}})} \leq p^{2-p^{-1}-p^{-2h}}$

Ceci entraîne que:

$$\|f_{p,h,n}\| \leq p^{-(n+1)p^{-2h}+2-p^{-1}} \quad (4)$$

Enfin pour établir des congruences entre les $B(n, h)$, deux cas sont à envisager : $p > 2$ et $p = 2$.

• Si $p > 2$

Déterminons à quelle condition sur n on a $|f_{p,h,n}| \leq p^{1-j}$. Pour cela d'après (4),

il suffit que $p^{-(n+1)p^{-2h}+2-p^{-1}} \leq p^{1-j}$, ce qui entraîne $n \geq p^{2h}(j-2^{-1})$.

Comme $B(n, h) = \sum_{i=1}^p f_{i,h,n}$. On a d'après (2), pour $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1+j+p^{-1})$

$$|B(n+(p-1)p^{j+2h}, h) - B(n, h)| < p^{1-j}.$$

Comme $B(n, h) \in \mathbb{Z}_p$ l'inégalité précédente entraîne :

$$|B(n+(p-1)p^{j+2h}, h) - B(n, h)| \leq p^{-j}.$$

Ainsi si $p > 2$ et $n \geq p^{2h}(1 + j + p^{-1})$, on a :

$$B(n + (p-1)p^{j+2h}, h) \equiv B(n, h) \pmod{p^j}.$$

- Si $p = 2$ et $h \geq 1$

Déterminons à quelle condition sur n on a $|f_{2,h,n}| \leq 2^{-j+2}$. Pour cela d'après (4)

il suffit que: $2^{-(n+1) \cdot 2^{-2h}} + 2 - 2^{-1} \leq 2^{-j+2}$. Ce qui entraîne $n \geq 2^{2h}(j - 2^{-1})$.

Comme $B(n, h) = f_{1,h,n} + f_{2,h,n}$, on a d'après (3) pour $p = 2$, $h \geq 1$ et $n \geq 2^h(j + 2^{-1})$:
 $|B(n + 2^{j+2h}, h) - B(n, h)| < 2^{-j+2}$. Or $B(n, h) \in \mathbb{Z}_2$, l'inégalité précédente entraîne alors que:

$$|B(n + 2^{j+2h+1}, h) - B(n, h)| \leq 2^{-j}.$$

Ainsi si $p = 2$; $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(j + 2^{-1})$ on a:

$$B(n + 2^{j+2h+1}, h) \equiv B(n, h) \pmod{2^j}.$$

□

Théorème 5.4 Les nombres B_n vérifient les congruences suivantes :

- si p est premier impair, alors pour tous, $h \geq 1$ et $n \geq p^{2h}(1 + h + p^{-1})$ on a:

$$B_{n+(p-1)p^{3h}} \equiv B_n \pmod{p^h}$$

- si $p = 2$, alors pour tous $h \geq 1$ et $n \geq 2^{2h}(h + 2^{-1})$ on a:

$$B_{n+2^{3h+1}} \equiv B_n \pmod{2^h}$$

Preuve: D'après le lemme 4.1 on a:

$$F(x) \equiv F_{h,p}(x) \pmod{p^h \mathcal{O}_p[[x]]}.$$

D'où

$$\|F - F_{h,p}\|_{B^-(0,1)} \leq p^{-h}.$$

Des inégalités de Cauchy, on déduit que :

$$B(n, h) \equiv B_n \pmod{p^h}.$$

En appliquant le lemme 5.3, on obtient des congruences énoncées par le théorème 5.4. □

Bibliographie

- [A.Y.] AMICE, Y. : *Nombres p -adiques* , PUF collection Sup, Le Mathématicien, Paris, 1975.
- [B.D.] BARSKY, D. : *Analyse p -adique et suites classiques de nombres*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 5ème session, 7-8 décembre 1981, Publication de l'IRMA de Strasbourg 182/S-04, 1982.
- [M.A.] MAZOUZ, A : *Nombres de Bell Généralisés et Analyse p -adique*, Thèse Université Paris 13, 1994.
- [B.P.] BARRUCAND, P.: *Communication personnelle*.
- [R.Ph.] ROBBA, Ph. : *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n° 10, pp.109-220, 1973.
- [S.W.] SCHIKOFF, W.H. : *Ultrametric calculus, an introduction to p -adic analysis*, Cambridge University Press, 1984.