ANNALES DE L'I. H. P.

A. PAPAPETROU

Quelques identités dans la relativité générale et dans la théorie du champ unifié

Annales de l'I. H. P., tome 18, nº 1 (1963), p. 99-108
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1963__18_1_99_0>

Quelques identités dans la relativité générale et dans la théorie du champ unifié

par

A. PAPAPETROU.

---

1. Dans une théorie de champ quelconque il y a, d'après le théorème de Nœther, un système d'identités correspondant aux propriétés d'invariance du lagrangien de la théorie. Dans le cas de la relativité générale et de la théorie du champ unifié à $g_{\mu\nu}$ non symétrique, dont nous nous occuperons dans le présent travail, ces identités sont particulièrement importantes aussi au point de vue physique. La raison en est que ces identités nous donnent, par l'intermédiaire des équations de champ, la formulation de la loi de conservation de l'impulsion-énergie.

Nous allons montrer qu'à côté de ces identités, on peut faire correspondre à un tenseur quelconque construit à l'aide des grandeurs fondamentales du champ un système d'identités analogue. Il sera avantageux de considérer d'abord la connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ comme indépendante de $g_{\mu\nu}$. Nous prendrons donc comme tenseurs fondamentaux du champ le tenseur $g^{\mu\nu}$ et le tenseur de courbure,

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\mu}, \tag{1}$$

et nous allons considérer des tenseurs $K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$ formés par multiplication de $R^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ et $g^{\cdot\cdot}$ (avec un nombre quelconque de facteurs et une combinaison arbitraire des indices).

2. Les identités correspondant au tenseur $K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$ seront déduites par la méthode suivante. A l'aide d'une densité tensorielle $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ de variance réciproque à celle de $K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$ on construit la densité scalaire

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot} K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}\,.$$

A cette densité correspond, d'après le théorème de Nœther, un système d'identités qui seront déduites par la méthode habituelle : On considère une transformation infinitésimale, $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x^{\alpha})$, et l'on utilise la relation

$$\delta \int_{\Omega} \mathfrak{H}\, d^4 x = \int_{\Omega} \{ \delta^{\star} \mathfrak{H} + \varepsilon (\mathfrak{H}\, \xi^{\rho})_{,\rho} \}\, d^4 x = 0. \tag{2}$$

Les identités ainsi déduites contiennent aussi la densité auxiliaire $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$. Mais on arrivera finalement à des identités ne contenant plus $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ en prenant un champ auxiliaire $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ tel que dans le système de coordonnées x^{μ} toutes les composantes $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ soient des constantes et en remarquant que ces constantes sont complètement arbitraires.

Pour le calcul détaillé, on aura besoin des formules générales suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^{\star} g^{\mu\nu} &= \varepsilon\left(g^{\alpha\nu} \xi^{\mu}_{,\alpha} + g^{\mu\alpha} \xi^{\nu}_{,\alpha} - g^{\mu\nu}_{,\alpha} \xi^{\alpha} \right),\\
\delta^{\star} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \varepsilon\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \xi^{\lambda}_{,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \xi^{\alpha}_{,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \xi^{\alpha}_{,\nu} - \xi^{\lambda}_{,\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha} \xi^{\alpha} \right),\\
\delta^{\star} \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot} &= \varepsilon\left(\mathfrak{A}^{\rho\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot} \xi^{\beta}_{,\rho} + \ldots - \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\rho\cdot\cdot} \xi^{\rho}_{,\alpha} - \ldots - \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot} \xi^{\rho}_{,\rho} - \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot,\rho} \xi^{\rho} \right).
\end{aligned}$$

Dans la dernière relation, les points signifient des termes analogues pour chacun des autres indices de $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ et le dernier terme s'annule d'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$. Un calcul élémentaire nous donne finalement

$$\begin{aligned}
\delta^{\star} \mathfrak{H} + \varepsilon (\mathfrak{H}\, \xi^{\rho})_{,\rho} = \varepsilon \mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot} \Big\{ & \xi^{\lambda} \left(\mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot,\lambda} - \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\lambda} - \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\rho\sigma}_{\beta\cdot\cdot\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda} - \mathrm{M}^{\alpha\cdot\cdot\rho}_{\beta\cdot\cdot\lambda,\rho} \right)\\
& + \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \Big[\xi^{\lambda} \left(\mathrm{M}^{\alpha\cdot\cdot\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\tau} \cdot \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda} \right)\\
& + \xi^{\lambda}_{,\nu} \mathrm{N}^{\alpha\cdot\cdot\tau\nu}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \xi^{\lambda}_{,\mu\nu} \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\tau} \Big] \Big\},
\end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$\mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\rho\sigma} \equiv \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial g^{\rho\sigma}, \qquad \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\rho\sigma}_{\beta\cdot\cdot\mu} \equiv \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left(\partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\tau} \right); \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^{\alpha\cdot\cdot\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda} \equiv\ & \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\lambda\cdot\cdot} \delta^{\tau}_{\beta} + \ldots - \mathrm{K}^{\tau\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} \delta^{\alpha}_{\lambda} - \ldots + \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\lambda\sigma} g^{\tau\sigma} + \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\sigma\lambda} g^{\sigma\tau}\\
& + \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\rho\sigma}_{\beta\cdot\cdot\lambda} \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} - \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\tau\rho}_{\beta\cdot\cdot\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} - \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\rho\tau}_{\beta\cdot\cdot\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} + \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\tau\rho}_{\beta\cdot\cdot\lambda,\rho},
\end{aligned} \tag{3b}$$

$$\mathrm{N}^{\alpha\cdot\cdot\tau\nu}_{\beta\cdot\cdot\lambda} \equiv \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma,\tau} \cdot \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} - \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\tau} \cdot \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \partial \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} / \partial \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu,\tau} \cdot \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot\nu\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda}. \tag{3c}$$

Les points dans le premier et le deuxième terme de (3 *b*) signifient des termes analogues pour chacun des autres indices de $\mathrm{K}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$. Il est à souligner que la relation (3) a été déduite sans aucune hypothèse de symétrie pour $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ et conduira, par conséquent, à des identités valables indépendamment de telles propriétés de symétrie.

Après avoir introduit (3) dans (2) on en déduit, par un raisonnement bien connu, cinq identités. On obtient la première identité en considérant des fonctions ξ^{μ} arbitraires à l'intérieur du domaine d'intégration Ω, mais qui s'annulent (ainsi que leurs dérivées premières et secondes) sur l'hypersurface limitant ce domaine. On trouve alors

$$\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}(K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot,\lambda} - K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\lambda} - K^{\alpha\cdot\cdot\rho\sigma}_{\beta\cdot\cdot\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda} - M^{\alpha\cdot\cdot\rho}_{\beta\cdot\cdot\lambda,\rho}) = 0.$$

Les composantes $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ étant arbitraires, on en déduit la première identité

$$K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot,\lambda} - K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\lambda} - K^{\alpha\cdot\cdot\rho\sigma}_{\beta\cdot\cdot\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda} - M^{\alpha\cdot\cdot\rho}_{\beta\cdot\cdot\lambda,\rho} = 0. \tag{4a}$$

Les trois identités suivantes seront obtenues en supposant que les ξ^{μ} sont respectivement des constantes ou des fonctions linéaires ou quadratiques des coordonnées x^{μ}. La dernière identité s'obtient pour des ξ^{μ} fonctions quelconques des x^{μ}. Dans ces identités figurera aussi, en facteur, la densité $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$. Mais les composantes $\mathfrak{A}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\cdot}$ étant arbitraires, il en résulte qu'on peut supprimer ce facteur et aboutir, finalement, aux identités suivantes :

$$(M^{\alpha\cdot\cdot\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \partial K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}/\partial\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\tau}\cdot\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda})_{,\tau} = 0, \tag{4b}$$

$$M^{\alpha\cdot\cdot\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \partial K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}/\partial\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\tau}\cdot\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\lambda} + N^{\alpha\cdot\cdot\nu\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda,\nu} = 0; \tag{4c}$$

$$N^{\alpha\cdot\cdot\nu\tau}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\partial K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}/\partial\Gamma^{\lambda}_{\nu\tau,\sigma}) + N^{\alpha\cdot\cdot\tau\nu}_{\beta\cdot\cdot\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\partial K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}/\partial\Gamma^{\lambda}_{\tau\nu,\sigma}) = 0, \tag{4d}$$

$$\sum_{(\nu\sigma\tau)} \partial K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}/\partial\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma,\tau} = 0, \tag{4e}$$

$\sum\limits_{(\nu\sigma\tau)}$ signifiant la somme sur toutes les permutations de ν, σ, τ. L'identité (4 a) est, en général, une relation tensorielle. (4 b) a la forme d'une divergence ordinaire et (4 c) introduit un superpotentiel pour la quantité dont la divergence s'annule d'après (4 b). (4 d) exprime une propriété de symétrie généralisée du superpotentiel et (4 e) une propriété de symétrie supplémentaire.

3. Nous allons appliquer les formules générales (4) au cas où le tenseur $K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$ est linéaire par rapport à $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$. La forme la plus générale est

$$K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}. \tag{5}$$

On déduit alors de (1)

$$\partial K^{\alpha..}_{\beta..}/\partial\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho,\sigma} = \partial R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}/\partial\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho,\sigma} = \delta^{\alpha}_{\varkappa}\delta^{\lambda}_{\beta}(\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} - \delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}(\partial K^{\alpha..}_{\beta..}/\partial\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho,\sigma}) = 0;$$

$$K^{\alpha..\lambda\rho}_{\beta..\varkappa} = \partial R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}/\partial\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho} = \delta^{\alpha}_{\varkappa}(\delta^{\rho}_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}) + \delta^{\lambda}_{\beta}(\delta^{\rho}_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\varkappa\mu} - \delta^{\rho}_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\varkappa\nu});$$

$$K^{\alpha}_{\beta..\rho\sigma} = \partial R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}/\partial g^{\rho\sigma} = 0.$$

En introduisant ces résultats dans (4) on trouve, après quelques calculs élémentaires, la forme explicite des identités correspondant à (5). Nous les donnerons ici tout d'abord pour le cas d'une connexion affine symétrique. L'identité (4 *a*) se réduit, dans ce cas, à l'identité de Bianchi. Nous l'écrirons sous la forme suivante :

$$T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau}{}_{;\tau} = 0, \tag{6 a}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} \equiv \sum_{[\mu\nu\lambda]} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}, \tag{7 a}$$

$\sum_{[\mu\nu\lambda]}$ somme sur les permutations cycliques de μ, ν, λ. L'identité (4 *b*) prend la forme

$$\begin{aligned}\{ R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda}\delta^{\tau}_{\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}\delta^{\tau}_{\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\lambda}\delta^{\tau}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\lambda}\delta^{\tau}_{\nu} \\ + (\Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\beta\lambda})\delta^{\tau}_{\mu} + (\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\beta\mu})\delta^{\tau}_{\nu}\}_{,\tau} = 0.\end{aligned} \tag{6'}$$

Cette relation a l'inconvénient de ne contenir, dans la parenthèse, qu'une partie du tenseur $T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau}$. Mais on peut la modifier en remarquant que

$$(\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\lambda}\delta^{\tau}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\lambda}\delta^{\tau}_{\nu})_{,\tau} = (\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu}\delta^{\tau}_{\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu}\delta^{\tau}_{\lambda})_{,\tau}.$$

On peut donc écrire (6′) sous la forme

$$(T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} + t^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau})_{,\tau} = 0, \tag{6 b}$$

avec

$$t^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} = \sum_{[\mu\nu\lambda]}(\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu})\delta^{\tau}_{\lambda}. \tag{7 b}$$

L'identité (4 *c*) donne un superpotentiel pour la quantité figurant dans la parenthèe de (6′) qui ne nous intéresse plus. Mais nous pouvons exprimer la quantité entre parenthèses dans (6 *b*) à l'aide d'un superpotentiel en remarquant qu'on a, d'après (1), (7 *a*) et (7 *b*), la relation

$$T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} + t^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} = \sum_{[\mu\nu\lambda]} \left(-\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu}\right)\delta^{\tau}_{\lambda}.$$

Par conséquent,

$$(6\,c)\qquad T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} + t^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau} = U^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau\sigma}{}_{,\sigma},$$

avec

$$(7\,c)\qquad U^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau\sigma} = \sum_{[\mu\nu\lambda]} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\left(\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda} - \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\right) = -U^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\sigma\tau}.$$

Les formules (6 *b*) et (6 *c*) sont analogues aux identités exprimant la conservation de l'impulsion-énergie en relativité générale, en ce sens que $t^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau}$ est quadratique et $U^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau\sigma}$ linéaire par rapport à $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Mais nous avons ici quatre indices de plus que dans la loi de conservation de l'impulsion-énergie.

La contraction $\alpha = \nu$ dans (5) nous donne le tenseur à deux indices

$$(8)\qquad K_{\beta\mu} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\alpha} \equiv R_{\beta\mu}.$$

Les identités correspondant à (8) ne nécessitent aucun calcul nouveau : il suffit de faire $\alpha = \nu$ dans les identités (6) et (7) correspondant à (5). En effet, cette contraction équivaut à la multiplication de (6) et (7) par δ^{ν}_{α} et comme

$$\delta^{\nu}_{\alpha\,;\,\rho} = 0 = \delta^{\nu}_{\alpha,\rho},$$

on peut introduire ce facteur dans les parenthèses de (6).

Pour la seconde contraction de (5), on devra multiplier (8) par $g^{\beta\mu}$, le résultat étant le scalaire

$$(9)\qquad K = g^{\beta\mu}R_{\beta\mu} = R.$$

Les identités correspondant à (9) pourraient être déduites directement des identités générales (4). Mais le calcul est assez long; il est plus avantageux de déduire ces identités en multipliant par $g^{\beta\mu}$ les identités correspondant à (8). On pourrait aussi multiplier ces dernières identités par $\mathfrak{g}^{\beta\mu}$ et obtenir directement les identités correspondant au lagrangien

$$(9\,a)\qquad \mathfrak{K} \equiv \mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{\beta\mu}R_{\beta\mu}$$

de la théorie. Pour l'identité tensorielle il suffit de remarquer que [1]

$$\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{;\rho} = 0.$$

On peut donc faire passer $\mathfrak{g}^{\beta\mu}$ sous le symbole de différentiation covariante. Le résultat est l'identité (4 *a*) correspondant à (9 *a*)

$$\mathfrak{T}_\lambda^\tau{}_{;\tau} = 0, \tag{10}$$

avec

$$\mathfrak{T}_\lambda^\tau = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} T^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^\tau = -\mathfrak{R}_\lambda^\tau + \frac{1}{2}\delta_\lambda^\tau \mathfrak{R}, \tag{10 a}$$

qui est identique à l'équatiou dynamique de la relativité générale. Pour trouver les identités pseudo-tensorielles, on introduira la quantité [2]

$$\mathfrak{U}_\lambda^{\tau\sigma} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} U^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^{\tau\sigma}. \tag{11}$$

$\mathfrak{U}_\lambda^{\tau\sigma}$ sera aussi, comme $U^\alpha{}_{\beta\mu\nu\lambda}{}^{\tau\sigma}$, antisymétrique par rapport à τ et σ. On trouve alors

$$\mathfrak{U}_{\lambda,\sigma}^{\tau\sigma} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} U^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^{\tau\sigma}{}_{,\sigma} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\sigma} U^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^{\tau\sigma}.$$

Or on a, d'après (6 *c*) et (10 *a*),

$$\frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} U^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^{\tau\sigma}{}_{,\sigma} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu}(T^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^\tau + t^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^\tau) = \mathfrak{T}_\lambda^\tau + \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} t^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^\tau.$$

En posant donc

$$\mathfrak{t}_\lambda^\tau = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu} t^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^\tau + \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\sigma} U^\alpha{}_{\beta\mu\alpha\lambda}{}^{\tau\sigma} \tag{12}$$

on aboutit aux identités (4 *b*) et (4 *c*) correspondant à (9 *a*),

$$\mathfrak{T}_\lambda^\tau + \mathfrak{t}_\lambda^\tau = \mathfrak{U}_{\lambda,\sigma}^{\tau\sigma}, \qquad (\mathfrak{T}_\lambda^\tau + \mathfrak{t}_\lambda^\tau)_{,\tau} = 0, \tag{13}$$

la dernière étant une conséquence immédiate de l'antisymétrie de $\mathfrak{U}_\lambda^{\tau\sigma}$ par rapport à τ et σ. $\mathfrak{t}_\lambda^\tau$ est la densité pseudo-tensorielle d'Einstein et $\mathfrak{U}_\lambda^{\tau\sigma}$ le superpotentiel de Freud.

---

(1) Cette relation signifie que les coefficients $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sont les symboles de Christoffel. Les formules suivantes seront donc valables seulement pour la relativité générale. Par contre, les identités (6) sont valables pour une connexion affine symétrique quelconque.

(2) *Voir* J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, t. 111, 1958, p. 315.

On remarquera que l'identité ($6c$), qui est à la base de toutes les identités déjà établies, est presque triviale au point de vue mathématique et n'a aucune signification physique immédiate. Ce qui est intéressant est qu'une identité aussi simple conduit, après double contraction, aux identités (13) exprimant la loi de conservation de l'impulsion-énergie en relativité générale.

4. La généralisation des résultats trouvés au cas d'une connexion affine non symétrique ne présente aucune difficulté. Pour écrire l'identité tensorielle généralisant ($6a$) on aura besoin des deux sortes de différentiation absolue possibles dans le cas d'une connexion affine non symétrique (³)

$$P^{\underset{+}{\alpha}\underset{-}{\beta}..}{}_{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}..;\rho} = P^{\alpha\beta..}{}_{\mu\nu..,\rho} + P^{\sigma\beta..}{}_{\mu\nu..}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} + P^{\alpha\sigma..}{}_{\mu\nu..}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} + \ldots - P^{\alpha\beta..}{}_{\sigma\nu..}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - P^{\alpha\beta..}{}_{\mu\sigma..}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \ldots$$

La généralisation de ($6a$) peut être écrite sous différentes formes en ce qui concerne la distribution des signes + et — sous les indices tensoriels. Par exemple,

$$(14)\qquad \left(R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}\,\delta^{\tau}_{\lambda} + R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{+}{\nu}\underset{-}{\lambda}}\,\delta^{\tau}_{\mu} + R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{+}{\lambda}\underset{-}{\mu}}\,\delta^{\tau}_{\nu}\right)_{;\tau} = 0.$$

Les signes non spécifiés sous les indices du tenseur de Kronecker devront être les mêmes pour l'indice supérieur et inférieur d'un terme quelconque, mais pourront être choisis arbitrairement dans les différents termes. L'identité (14) peut encore s'écrire

$$(14\,a)\qquad \left(R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{-}{\mu}\underset{+}{\nu}}\,\delta^{\tau}_{\lambda} + R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{+}{\nu}\underset{+}{\lambda}}\,\delta^{\underset{-}{\tau}}_{\underset{-}{\mu}} + R^{\underset{+}{\alpha}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{-}{\lambda}\underset{-}{\mu}}\,\delta^{\underset{+}{\tau}}_{\underset{+}{\nu}}\right)_{;\tau} = 0.$$

Cette dernière forme, dans laquelle les indices α, β, μ et ν prennent les mêmes signes dans tous les termes, peut être utilisée pour la dérivation des identités contractées, la contraction ne pouvant être effectuée immédiatement qu'entre indices de même signe. Pour la première contraction, il suffit de faire $\alpha = \nu$ dans ($14\,a$), ce qui donne

$$(15)\qquad \left(R_{\underset{+}{\beta}\underset{-}{\mu}}\,\delta^{\tau}_{\lambda} - R_{\underset{+}{\beta}\underset{+}{\lambda}}\,\delta^{\underset{-}{\tau}}_{\underset{-}{\mu}} + R^{\underset{+}{\tau}}{}_{\underset{+}{\beta}\underset{-}{\lambda}\underset{-}{\mu}}\right)_{;\tau} = 0.$$

(³) A. EINSTEIN, *The meaning of Relativity*, Princeton, 1950, p. 131.

Pour la deuxième contraction on multipliera (15) par $\mathfrak{g}^{\beta\mu}$. On trouve

$$(16)\quad \left(\mathfrak{g}^{\beta\mu} R_{\beta\mu}\,\delta^{\tau}_{\lambda} - \mathfrak{g}^{\underset{\ -}{\beta\tau}} R_{\beta\underset{+}{\lambda}} + \mathfrak{g}^{\beta\mu} \overset{\tau}{R}{}^{+}{}_{\beta\underset{-}{\lambda}\mu}\right)_{;\tau} - \mathfrak{g}^{\underset{+-}{\beta\mu}}{}_{;\tau}\left(R_{\beta\mu}\,\delta^{\tau}_{\lambda} - R_{\beta\lambda}\,\delta^{\tau}_{\mu} + R^{\tau}{}_{\beta\lambda\mu}\right) = 0.$$

On se rend compte immédiatement que les identités pseudo-tensorielles (6 *b*) et (6 *c*) restent valables dans le cas d'une connexion affine non symétrique, sans aucune modification. Cette conclusion sera aussi valable pour les contractions de ces dernières identités.

Les identités (14) à (16) ainsi que les relations pseudo-tensorielles correspondantes sont valables pour une connexion quelconque, indépendante du tenseur $g^{\mu\nu}$. Dans le cas de la théorie du champ unifié à $g_{\mu\nu}$ non symétrique il est possible d'introduire une connexion satisfaisante à la relation

$$(17)\qquad \mathfrak{g}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\tau} = 0.$$

Dans ce cas, le dernier terme de (16) disparaît : l'identité (16) prend la forme d'une divergence covariante et donne, quand on tient compte de (17) dans l'évaluation de la quantité contenue dans la parenthèse du premier terme, l'équation dynamique de cette théorie.

5. Nous allons encore considérer brièvement le cas d'un tenseur $K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot}$ quadratique par rapport au tenseur de courbure. La forme la plus générale de ce tenseur est donnée par le produit de deux facteurs sans aucune contraction,

$$(18)\qquad K^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\cdot\cdot} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,R^{\gamma}{}_{\delta\varkappa\lambda}.$$

On peut déduire l'identité tensorielle (4 *a*) correspondant au tenseur (18) par un calcul un peu long, mais tout à fait élémentaire. Le résultat final est, dans le cas d'une connexion non symétrique,

$$\begin{aligned}(19)\quad &\left(\overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\beta\mu\nu}}\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\delta\varkappa\lambda}}\right)_{;\rho} - \left(\overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{+-+}{\beta\rho\nu}}\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\delta\varkappa\lambda}}\right)_{;\mu} - \left(\overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{+-+}{\beta\mu\rho}}\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\delta\varkappa\lambda}}\right)_{;\nu}\\ &\qquad - \left(\overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\beta\mu\nu}}\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{+-+}{\delta\rho\lambda}}\right)_{;\varkappa} - \left(\overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\beta\mu\nu}}\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{+-+}{\delta\varkappa\rho}}\right)_{;\lambda}\\ &\qquad + R^{\alpha}{}_{\beta\rho\nu}\,\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\delta\varkappa\lambda};\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\mu\rho}\,\overset{\gamma}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\delta\varkappa\lambda};\nu}\\ &\qquad + \overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\beta\mu\nu};\varkappa}\,R^{\gamma}{}_{\delta\rho\lambda} + \overset{\alpha}{R}{}^{+}{}_{\underset{++-}{\beta\mu\nu};\lambda}\,R^{\gamma}{}_{\delta\varkappa\rho} = 0.\end{aligned}$$

Il est peut-être utile de remarquer que cette identité n'est qu'une conséquence de l'identité fondamentale (14). En effet, en appliquant la règle de différentiation (covariante) d'un produit aux cinq premiers termes de (19) on pourra écrire cette relation sous la forme

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\Big(& R^{\overset{\gamma}{+}}{}_{\underset{+}{\delta}\,\underset{+}{\varkappa}\,\underset{-}{\lambda};\rho}-R^{\overset{\gamma}{+}}{}_{\underset{+}{\delta}\,\underset{-}{\rho}\,\underset{+}{\lambda};\varkappa}-R^{\overset{\gamma}{+}}{}_{\underset{+}{\delta}\,\underset{-}{\varkappa}\,\underset{+}{\rho};\lambda}\Big)\\
&+\Big(R^{\overset{\alpha}{+}}{}_{\underset{+}{\beta}\,\underset{+}{\mu}\,\underset{-}{\nu};\rho}-R^{\overset{\alpha}{+}}{}_{\underset{+}{\beta}\,\underset{-}{\rho}\,\underset{+}{\nu};\mu}-R^{\overset{\alpha}{+}}{}_{\underset{+}{\beta}\,\underset{-}{\mu}\,\underset{+}{\rho};\nu}\Big)R^{\gamma}{}_{\delta\varkappa\lambda}=0,
\end{aligned}
$$

qui est une conséquence immédiate de (14).

Dans la discussion qui suit, nous nous limiterons au cas de la relativité générale. La connexion affine étant alors symétrique, il n'est plus nécessaire de retenir dans (19) les signes + et — sous les indices. Le premier membre de cette identité n'a pas la forme d'une divergence covariante. Il en sera ainsi même si l'on suppose que les équations de champ

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{20}$$

sont satisfaites. Mais on peut mettre (19) sous la forme d'une divergence covariante après une double contraction. En effet, si l'on pose $\alpha=\delta$ et $\beta=\gamma$, les quatre derniers termes de (19) prennent aussi la forme d'une divergence, quand les équations (20) sont satisfaites. Montrons-le pour le premier de ces termes :

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\rho\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\varkappa\lambda;\mu}=R^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}R_{\varkappa\lambda\beta\alpha;\mu}&=-R^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}(R_{\varkappa\lambda\alpha\mu;\beta}+R_{\varkappa\lambda\mu\beta;\alpha})\\
&=-2R^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}R_{\varkappa\lambda\alpha\mu;\beta}=-2(R^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu}R_{\varkappa\lambda\alpha\mu})_{;\beta}
\end{aligned}
$$

en raison de la relation

$$R^{\alpha\beta}{}_{\rho\nu;\beta}=0,$$

valable quand les équations de champ (20) sont satisfaites. Finalement, l'identité (19) prend la forme

$$C_{\mu\nu\varkappa\lambda\rho}{}^{\sigma}{}_{;\sigma}=0, \tag{21}$$

avec

$$
\begin{aligned}
C_{\mu\nu\varkappa\lambda\rho}{}^{\sigma}\equiv{}& R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\varkappa\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho}-R^{\alpha}{}_{\beta\rho\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\varkappa\lambda}\delta^{\sigma}_{\mu}-R^{\alpha}{}_{\beta\mu\rho}R^{\beta}{}_{\alpha\varkappa\lambda}\delta^{\sigma}_{\nu}\\
&-R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\rho\lambda}\delta^{\sigma}_{\varkappa}-R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\varkappa\rho}\delta^{\sigma}_{\lambda}-2R^{\alpha\sigma}{}_{\rho\lambda}R_{\alpha\varkappa\mu\nu}\\
&-2R^{\alpha\sigma}{}_{\varkappa\rho}R_{\alpha\lambda\mu\nu}-2R^{\alpha\sigma}{}_{\rho\nu}R_{\alpha\mu\varkappa\lambda}-2R^{\alpha\sigma}{}_{\mu\rho}R_{\alpha\nu\varkappa\lambda}.
\end{aligned} \tag{21 a}
$$

A priori, l'identité (21) semble plus générale que l'identité de Bel et Robinson

$$
\left\{
\begin{aligned}
&B_{\mu\varkappa\rho}{}^{\sigma}{}_{;\sigma}=0,\\
&B_{\mu\varkappa\rho\sigma}\equiv R^{\alpha}{}_{\mu\beta\varkappa}R^{\beta}{}_{\rho\alpha\sigma}+R^{\alpha}{}_{\mu\beta\rho}R^{\beta}{}_{\varkappa\alpha\sigma}-\frac{1}{8}g_{\mu\sigma}g_{\varkappa\rho}R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}.
\end{aligned}
\right. \tag{22}
$$

Mais une discussion plus détaillée montre que ce n'est pas le cas. En effet, quand les équations (20) sont satisfaites, on peut vérifier les deux identités algébriques suivantes :

$$C_{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma} = C_{\mu\nu\kappa\lambda\sigma\rho}, \tag{23}$$

$$C_{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma} = -g_{\nu\lambda}B_{\mu\kappa\rho\sigma} + g_{\mu\lambda}B_{\nu\kappa\rho\sigma} + g_{\nu\kappa}B_{\mu\lambda\rho\sigma} - g_{\mu\kappa}B_{\nu\lambda\rho\sigma}. \tag{24}$$

La relation $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ étant maintenant équivalente à la définition de la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, l'identité (24) entraîne que (21) n'est qu'une généralisation triviale de (22). Inversement, cette dernière identité peut être déduite par une triple contraction de (19), par exemple en multipliant (21) — qui a été déduite de (19) par une double contraction — par $g^{\kappa\mu}$.

Nous n'entrerons pas dans le détail d'une discussion des identités (4 *b*) et (4 *c*) dans le cas (18), car ces identités n'ont presque aucun intérêt ; elles sont pseudo-tensorielles et, par conséquent, peu intéressantes au point de vue mathématique. D'autre part, elles n'expriment pas la conservation d'une grandeur physique connue quelconque et sont donc aussi sans intérêt immédiat au point de vue physique.

(Manuscrit reçu le 19 mai 1962.)