ANNALES DE L'I. H. P.

PIERRE HILLION
JEAN-PIERRE VIGIER

Sur les équations d'ondes associées à la structure des fermions

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 3 (1962), p. 229-254
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1962__17_3_229_0>

Sur les équations d'ondes associées à la structure des fermions

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER,
Institut Henri Poincaré (Paris).

Introduction. — Dans une étude antérieure [1], on a montré qu'on pouvait associer à la structure des particules élémentaires des systèmes d'ondes permanentes caractérisées par des équations invariantes sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées et dont les vecteurs d'onde sont les éléments de l'espace vectoriel invariant sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ de ce groupe, l^+ et l^- prenant soit des valeurs entières, soit des valeurs demi-entières et ceci indépendamment l'un de l'autre. On a établi les équations auxquelles satisfont ces vecteurs d'onde et développé le formalisme lagrangien et le formalisme hamilionien correspondant.

Dans une seconde étude [2], ces considérations ont été appliquées à deux cas particuliers de représentations correspondant aux valeurs suivantes l^+ et l^- où $l^+ + l^-$ est un entier :

$$l^+ = l^- = \frac{1}{2}, \qquad \{ l^+ + l^- \} = \{ 1, 0 \},$$

on a obtenu essentiellement les résultats suivants :

A la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ avec $s' = 0$, il est possible d'associer les mésons K, chacun de ces mésons était mathématiquement représenté par

---

(1) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Les ondes associées à une structure interne des particules* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 17, fasc. II, 1961, p. 149).

(2) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Sur les équations d'ondes associées à la structure des bosons* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 17, fasc. II, 1961, p. 209).

un quadrivecteur A_{μ}^{ξ}. Le spin isotopique, l'étrangeté, et le nombre de baryons sont alors liés à des opérateurs de rotation infinitésimale effectuant des transformations dans l'espace des quadrivecteurs A_{μ}^{ξ} d'une façon explicite :

$$I_3 \simeq \Gamma_3^+ J_3^+, \qquad S \simeq \Gamma_3^- J_3^-, \qquad N \simeq S_3',$$

où I_3, S, N, sont respectivement le spin isotopique, l'étrangeté et le nombre des baryons, J_3^+, J_3^-, S_3', des opérateurs moments cinétiques exprimés en fonction d'angles d'Euler généralisés à l'espace-temps; enfin Γ_3^+ et Γ_3^- sont des matrices 4×4 faisant partie d'une représentation du groupe des quaternions à cofficients complexes. Enfin à l'isospin usuel correspond dans cette théorie un tenseur antisymétrique S_{ij} qui s'introduit naturellement dans les équations de conservation déduites du formalisme lagrangien fournissant les équations d'onde.

De la même façon à la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ avec $m' = 0$, il est possible d'associer les mésons II, chaque méson étant mathématiquement représenté par un vecteur axial tridimensionnel A_k^r (ou un tenseur antisymétrique self-dual). On a également les relations

$$I_3 \simeq \Gamma_3 J_3^+, \qquad S \simeq \Gamma_3 J_3^-, \qquad \eta \simeq S_3',$$

où Γ_3 est la matrice 3×3 :

$$\Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

Nous allons maintenant effectuer un travail analogue pour deux cas particuliers des représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ pour lesquelles la somme $l^+ + l^-$ est demi-entière.

Premier cas :

$$\{l^+, l^-\} = \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Deuxième cas :

$$\{l^+, l^-\} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Dans tout ce qui suit comme dans les études précédentes, les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs de 1 à 4.

1. Vecteurs d'onde associés à l'espace des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. — 1.1. Classification des vecteurs d'onde. — On a déjà établi (1) cette classification précédemment, on la rappelle ci-dessous en vue de l'étude des opérateurs moments cinétiques. On a ici affaire à des spineurs à deux composantes, les uns satisfaisant à la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2},\, 0\right)$, les autres à la représentation $\mathcal{D}\left(0,\, \frac{1}{2}\right)$. En outre le nombre quantique s' prenant la valeur $s' = \frac{1}{2}$, m' prend les deux valeurs $\pm \frac{1}{2}$, on est conduit à deux types de spineurs $\varphi\left(m' = \frac{1}{2}\right)$ et $\psi\left(m' = -\frac{1}{2}\right)$ déduits l'un de l'autre par l'opération conjugaison de charge.

On a en tout huit spineurs à deux composantes :

$$
\begin{array}{llll}
\text{Représentation } \mathcal{D}\left(\frac{1}{2},\, 0\right): & m' = \frac{1}{2}, & \varphi^{s} \text{ et } \varphi_{r}; \\
\text{»} \qquad \mathcal{D}\left(0,\, \frac{1}{2}\right): & m' = \frac{1}{2}, & \varphi_{\dot r} \text{ et } \varphi^{\dot s}; \\
\text{»} \qquad \mathcal{D}\left(\frac{1}{2},\, 0\right): & m' = -\frac{1}{2}, & \psi^{s} \text{ et } \psi_{r}; \\
\text{»} \qquad \mathcal{D}\left(0,\, \frac{1}{2}\right): & m' = -\frac{1}{2}, & \psi_{\dot r} \text{ et } \psi^{\dot s}.
\end{array}
$$

D'une façon explicite, on a

$$
m' = \frac{1}{2}\;\left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad \mathcal{D}\left(0,\, \frac{1}{2}\right) \\[6pt]
(1) \quad \varphi^{s} = \begin{pmatrix} Z^{0.\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \\[6pt] Z^{0.\,-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[18pt]
(2) \quad \varphi_{r} = \begin{pmatrix} -Z^{0.\,-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \\[6pt] Z^{0.\,-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[18pt]
\qquad\qquad \mathcal{D}\left(\frac{1}{2},\, 0\right) \\[6pt]
(3) \quad \varphi_{\dot r} = \begin{pmatrix} -Z^{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \\[6pt] -Z^{-\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[18pt]
(4) \quad \varphi^{\dot s} = \begin{pmatrix} Z^{-\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \\[6pt] -Z^{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\;0.\,\frac{1}{2}}(\omega^{+},\, \omega^{-}) \end{pmatrix};
\end{array}
\right.
$$

$$
m' = -\frac{1}{2}\left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right) \\[2ex]
(5) \quad \psi^{s} = \begin{pmatrix} -Z^{0.\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{0.\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\[2ex] -Z^{0.\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{0.\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[4ex]
(6) \quad \psi_{r} = \begin{pmatrix} Z^{0.\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{0.\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}; \omega^{-}) \\[2ex] -Z^{0.\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{0.\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[4ex]
\qquad\qquad \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\[2ex]
(7) \quad \psi_{\dot r} = \begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2},\ 0.\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 0.\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\[2ex] Z^{-\frac{1}{2},\ 0.\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 0.\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix}, \\[4ex]
(8) \quad \psi^{\dot s} = \begin{pmatrix} -Z^{-\frac{1}{2},\ 0.\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 0.\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\[2ex] Z^{\frac{1}{2},\ 0.\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 0.\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix},
\end{array}
\right.
$$

ces spineurs satisfont aux équations

$$
(9a) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
(\sigma_k J_k^{+} - \chi_1)\varphi^{\dot s} = 0, & (\sigma_k J_k^{+} - \chi_2)\varphi_{\dot r} = 0, \\
(\sigma_k J_k^{+} - \chi_1)\psi^{\dot s} = 0, & (\sigma_k J_k^{+} - \chi_2)\psi_{\dot r} = 0;
\end{array}
\right.
$$

$$
(9b) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
(\sigma_k J_k^{-} - \chi_1)\varphi^{s} = 0, & (\sigma_k J_k^{-} - \chi_2)\varphi_{r} = 0, \\
(\sigma_k J_k^{-} - \chi_1)\psi^{s} = 0, & (\sigma_k J_k^{-} - \chi_2)\psi_{s} = 0;
\end{array}
\right.
$$

avec

$$
(10) \qquad \chi_1 = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi^2 + \frac{\hbar}{4}}, \qquad \chi_2 = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi^2 + \frac{\hbar}{4}},
$$

et σ_k sont les matrices de Pauli.

Rappelons que chaque composante des spineurs de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ satisfait l'équation

$$
(J_k^{+} J_k^{+} - \chi^2)\varphi = 0
$$

et chaque spineur de la représentation $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ à l'équation

$$
(J_k^{-} J_k^{-} - \chi^2)\varphi = 0
$$

Pour être sûr que les expressions (1) à (8) constituent bien les vecteurs d'onde de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ou $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ il faut montrer qu'il satisfont à l'une des équations (9), montrons qu'il en est bien ainsi par exemple pour φ^s; ici

$$\chi^2 = l(l+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2,$$

d'où

$$\chi_1 = \frac{3\hbar}{2}, \qquad \chi_2 = -\frac{\hbar}{2}.$$

Par ailleurs

$$\sigma_k J_k^- \varphi^s = \begin{vmatrix} 0 & J_1^- + iJ_2^- \\ J_1^- - iJ_2^- & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} Z^{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{0.\,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} J_3^- & 0 \\ 0 & J_3^- \end{vmatrix} \begin{pmatrix} Z^{0.\,\frac{1}{2},+\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{0.\,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix} = h\varphi_l + \frac{1}{2}\hbar\varphi^s = \frac{3}{2}\hbar\varphi^s,$$

d'où

$$(\sigma_k J_k^- - \chi_1)\varphi^s = 0,$$

où l'on a utilisé les relations

$$J_3^- Z^{0.\,m^-.\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) = m^-\hbar Z^{0.\,m^-.\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-),$$

$$(J_1^- \pm iJ_2^-) Z^{0.\,m^-.\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) = \sqrt{(l^- \pm m^-)(l^- \pm m^- + 1)}\, Z^{0.\,m^-+1,\frac{1}{2}}_{0.\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)$$

Donc les vecteurs d'onde de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ou $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ sont bien les spineurs donnés dans les expressions (1) à (8).

1.2. Comportement des spineurs sous les opérateurs J_3^+, J_3^-, S_3'. — On a un certain nombre de résultats immédiats. En désignant par Φ l'ensemble des quatre spineurs correspondant à $m' = \frac{1}{2}$, et par Ψ ceux qui correspondent à $m' = -\frac{1}{2}$, il vient

$$S_3'\Phi = \frac{1}{2}\Phi, \qquad S_3'\Psi = -\frac{1}{2}\Psi \tag{11}$$

dans un système d'unités où $\hbar$ est pris égal à 1.

En désignant par Φ^+ et Ψ^+ les spineurs de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, par Φ^- et Ψ^- ceux de la représentation $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on a

$$J_3^-\Phi^+ = J_3^-\Psi^+ = 0, \qquad J_3^+\Phi^- = J_3^+\Psi^- = 0. \tag{12}$$

Examinons maintenant les opérations $J_3^+\Phi^+$, $J_3^+\Psi^+$, $J_3^-\Phi^-$, $J_3^-\Psi^-$ à partir des expressions (3), (4), (7) et (8), on déduit immédiatement

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
J_3^+\varphi_{\dot r} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -Z^{\frac12,0,\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac12,0,\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix},\\
J_3^+\psi_{\dot r} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{\frac12,0,-\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{-\frac12,0,-\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix},\\
J_3^+\varphi^{\dot s} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{-\frac12,0,\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac12,0,\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix},\\
J_3^+\psi^{\dot s} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -Z^{-\frac12,0,-\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{\frac12,0,-\frac12}_{\frac12,0,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si on introduit la matrice σ_3 de Pauli :

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

ces relations s'écrivent

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma_3 J_3^+\varphi_{\dot r} &= \frac{1}{2}\varphi_{\dot r}, & \sigma_3 J_3^+\psi_{\dot r} &= \frac{1}{2}\psi_{\dot r},\\
\sigma_3 J_3^+\varphi^{\dot s} &= -\frac{1}{2}\varphi^{\dot s}, & \sigma_3 J_3^+\psi^{\dot s} &= -\frac{1}{2}\psi^{\dot s},
\end{aligned}
\right.
$$

un calcul analogue conduirait aux résultats suivants :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma_3 J_3^-\varphi^{s} &= \frac{1}{2}\varphi^{s}, & \sigma_3 J_3^-\psi^{s} &= \frac{1}{2}\psi^{s},\\
\sigma_3 J_3^-\varphi_{r} &= -\frac{1}{2}\varphi_{r}, & \sigma_3 J_3^-\psi_{r} &= -\frac{1}{2}\psi_{r},
\end{aligned}
\right.
$$

on peut résumer les résultats contenus dans les relations (11), (12), (14) et (15) à l'aide des deux tableaux ci-après :

a. $m' = \frac{1}{2}$:

Spineurs.	$\sigma_3 J_3^+$.	$\sigma_3 J_3^-$.	S'_3.
φ^s	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
φ_r	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varphi_{\dot r}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\varphi^{\dot s}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

b. $m' = -\frac{1}{2}$:

Spineurs.	$\sigma_3 J_3^+$.	$\sigma_3 J_3^-$.	S'_3.
ψ_r	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
ψ^s	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\psi^{\dot s}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\psi_{\dot r}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Les nombres figurant dans ces tableaux indiquent le scalaire par lequel est multiplié le spineur de la ligne sous l'opérateur de la colonne qui définissent sa position.

On observera que ces opérateurs correspondent exactement à ceux qui apparaissent dans l'étude des bosons. On pourra donc considérer $\sigma_3 J_3^+$ comme associé à un spin isotopique, $\sigma_3 J_3^-$ à l'étrangeté, par ailleurs S'_3 est appelé nombre de leptons (plutôt que nombre de baryons).

On peut donc considérer chacun des spineurs Φ et Ψ comme représentant un vecteur d'onde associé à une particule élémentaire. Il est évident à l'examen des nombres qui figurent dans ces tableaux qu'on ne peut associer ces résultats aux baryons. En outre pour associer les vecteurs d'onde précédents, à des particules élémentaires il est impossible d'utiliser la classification empirique de Nishijima-Gell-Mann qui n'intéresse que les baryons, les mésons Π et les mésons K.

Pour atteindre la classification qu'on a en vue, on s'aidera de deux remarques :

a. la première déduite de la classification des pions concerne l'importance de la chiralité des vecteurs d'onde. On a en effet observé que les mésons Π correspondaient aux vecteurs de la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ et l'on constate (bien que ce fait ne soit pas expliqué par la théorie à son stade actuel) qu'il ne correspond aucune entité physique aux vecteurs de la représentation $\mathcal{D}(0, 1)$. Ceci suggère de classer les vecteurs d'onde non pas suivant le signe de m' comme ceci a été fait précédemment mais suivant leur appartenance à $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ où à $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

b. la deuxième remarque concerne l'utilisation de la formule de Nishijima-Gell-Mann :

$$Q = J_3 + \frac{1}{2}(S + N), \tag{16}$$

qui avec les notations utilisées dans ce travail s'écrit

$$Q = \langle \sigma_3 J_3^+ \rangle + \langle \sigma_3 J_3^- \rangle + \langle S_3' \rangle. \tag{17}$$

On a montré [3] qu'on pouvait trouver une justification à cette formule à partir de l'invariance de jauge de lagrangien du rotateur hypersphérique sous une rotation infinitésimale des hyperplans $a_\mu^{(1)} a_\mu^{(2)}$ et $b_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)}$ de tétrapodes a_μ^ξ et b_μ^ξ qui définissent ce rotateur hypersphérique.

Cette relation (17) est valable quels que soient les vecteurs d'onde, en particulier, pour ceux des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. On s'aperçoit de plus que Q prend seulement les valeurs 1, 0, —1.

Si donc on lie ce nombre Q à la charge comme dans la relation de Nishijima-Gell-Mann, ceci limitera le nombre de possibilités d'association de vecteurs d'onde de $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ à des particules élémentaires.

Ces deux remarques conduisent à associer :

L'électron et le neutrino (et leurs antiparticules) à la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;

Le méson μ, un second neutrino ν' (et leurs antiparticules) à la représentation $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

---

(3) D. Bohm, J.-P. Vigier et P. Hillion, *Progr. of Theor. Phys.*, 24, 1960, p. 761.

D'une façon explicite Ψ^s et Ψ_r seront respectivement les vecteurs d'onde de l'électron et du neutrino, φ_r et φ^s ceux du positron et de l'antineutrino.

D'une manière analogue φ_r et φ^s correspondent respectivement à ν' et μ^+, Ψ^s et Ψ_r à $\tilde{\nu}'$ et μ^-.

Ceci conduirait alors à la classification suivante de ces particules élémentaires.

Représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$: e^+, e^-, ν, $\tilde{\nu}$.

Particule..	I_3.	S.	η.	Q.
e^-....................	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
ν....................	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Les antiparticules sont obtenues en changeant tous les signes dans le tableau précédent.

Représentation $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$: μ^+, ν', μ^-, $\tilde{\nu}'$.

Particule.	I_3.	S.	η.	Q.
μ^+....................	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ν'....................	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Comme précédemment on obtient les antiparticules en changeant tous les signes.

Sur cette classification on peut présenter deux remarques :

a. elle associe d'une part l'électron et le neutrino, ce qui est en accord avec la théorie de Dirac et d'autre part le méson μ et le ν', cette dernière association n'est pas courante. D'une façon usuelle on considère que l'électron, le neutrino et le méson μ forment la famille des leptons l'existence de ν' n'étant pas encore établie. Pour toutes les classifications des particules élémentaires le Λ_0 présente des difficultés ([4]) et nous y reviendrons. Par ailleurs, nous ignorons s'il existe des raisons expéri-

([4]) *Cf.* L. DE BROGLIE, cours à l'Institut Henri Poincaré, 1959-1960.

mentales ou théoriques précises pour classer le muon dans la même famille que l'électron et le neutrino;

b. la deuxième remarque porte sur le fait que le tableau précédent suggère que μ^+ correspond à la particule μ^- à l'antiparticule. Il ne semble pas que cette question soit encore définitivement tranchée ([5]).

1.3. — *Étude du tenseur antisymétrique* S_{ij}. — Dans l'étude générale ([1]) du formalisme lagrangien les relations de conservation du tenseur moment cinétique ont conduit à l'introduction antisymétrique

$$S_{ik} = (S^+_{ik},\ S^-_{ik}) \tag{18}$$

et l'on a montré ([1]) que

$$S^+_{ik} = J^+_l\, \mathcal{S}^+_{ikl}, \qquad S^-_{ik} = J^-_l\, \mathcal{S}^-_{ikl}, \tag{19}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{S}^+_{ikl} = \dfrac{j}{4}\varepsilon_{klj}\,[\tilde{\varphi}(\omega^+)\,\delta_{ij}\,\varphi(\omega^+)], \\ \mathcal{S}^-_{ikl} = \dfrac{j}{4}\varepsilon_{klj}\,[\tilde{\varphi}(\omega^-)\,\delta_{ij}\,\varphi(\omega^-)], \end{cases} \tag{20}$$

ceci a conduit au pseudo-vecteur Σ_l de composantes :

$$\Sigma^+_l = \hbar\,[\tilde{\varphi}(\omega^+)\,\sigma_l\,\varphi(\omega^+)], \qquad \Sigma^-_l = \hbar\,[\tilde{\varphi}(\omega^-)\,\sigma_l\,\varphi(\omega^-)[. \tag{21}$$

Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int \Sigma_3\, d\tau \tag{22}$$

redonne la valeur numérique $+\dfrac{\hbar}{2}\cdot$

Il faut d'abord commencer par normer les spineurs donnés dans les expressions (1) à (8), de telle sorte que

$$\int \tilde{\varphi}'(\omega^+)\,\varphi'(\omega^+)\,d\tau = \int \tilde{\varphi}'(\omega^-)\,\varphi'(\omega^-)\,d\tau = 1, \tag{23}$$

où $\varphi'(\omega^+)$ et $\varphi'(\omega^-)$ sont les spineurs $\varphi(\omega^+)$ et $\varphi(\omega^-)$ supposés normalisés et $d\tau$ l'élément de volume sur les angles d'Euler. On a défini ([6]) une norme des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$ telle que

$$\begin{aligned}(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)\, Z^{n^+, n^-, n'}_{j^+, j^-, t'}(\omega^+, \omega^-)) \\ = \delta_{l^+j^+}\,\delta_{l^-j^-}\,\delta_{s't'}\,\delta_{m'n'}\,\delta_{(m^+-n^+)}\,\delta_{(m^--n^-)}.\end{aligned} \tag{24}$$

([5]) *Cf*. H. Bethe et de Hoffmann, *Mesons and fields*, vol. II.

([6]) P. Hillion et J.-P. Vigier, *Le groupe* R^*_3 *et ses propriétés* (à paraître).

Nous étudierons, par exemple, le cas particulier du spineur

$$\varphi(\omega^-) = \begin{pmatrix} Z^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix},$$

Pour définir la norme, introduisons un nouveau nombre s variant continuement dans l'intervalle fermé $[-1, 1]$ on aura

$$(25) \qquad \varphi(\omega^-) = \frac{1}{\sqrt{2l^- + 1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l^- + s + \frac{1}{2}}\ Z^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ \sqrt{l^- - s + \frac{1}{2}}\ Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix},$$

calculons dans ces conditions le produit scalaire $(\varphi(\omega^-), \varphi(\omega^-)$, il vient

$$\begin{aligned} (\varphi(\omega^-), \varphi(\omega^-)) \\ = \frac{1}{2l^- + 1}\Bigg[& \left(l^- + s + \frac{1}{2}\right)\left(Z^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-), Z^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ & + \left(l^- - s + \frac{1}{2}\right)\left(Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-), Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)\right), \end{aligned}$$

soit en tenant compte de la relation (24),

$$\varphi(\omega^-).\ \varphi(\omega^-) = \frac{1}{2l^- + 1}\left[\left(l^- + 0 + \frac{1}{2}\right) + \left(l^- - s + \frac{1}{2}\right) = \frac{2l^- + 1}{2l^- + 1} = 1.\right.$$

Considérons alors la valeur moyenne de l'opérateur $\sigma_3 \hbar$:

$$(26) \quad \hbar(\varphi(\omega^-), \sigma_3\varphi(\omega^-)) = \frac{\hbar}{2l^- + 1}\left[\left(l^- + s + \frac{1}{2} - \left(l^- - s + \frac{1}{2}\right) = \frac{2s\hbar}{2l^- + 1}.\right.\right.$$

Quand s prend les deux valeurs $+1$ et -1, il vient finalement

$$(27) \qquad \hbar(\varphi(\omega^-), \sigma_3\varphi(\omega^-)) = \pm \hbar.$$

Cette dernière relation prouve bien que l'opérateur Σ_j a pour valeur moyenne $1\,\frac{\hbar}{2}$.

2. Vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ avec $s' = \frac{1}{2}$. — 2.1. Classification des vecteurs d'onde. — Dans l'étude générale [1] sur les ondes associées à une structure interne des particules on a établi deux séries de résultats :

a. concernant les équations des vecteurs d'onde : On a montré que quelle que soit la représentation $l^+ + l^-$ demi-entière $\Big[$sauf les cas l^+ ou l^- nul, où l'on est ramené au cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)\Big]$ les équations d'onde sont les suivantes :

$$(28)\quad (\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\begin{pmatrix}\varphi^1{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi^2{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\begin{pmatrix}\varphi^1{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi^2{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0;$$

$$(29)\quad (\sigma_k J_k^+ - \chi_{2\alpha})\begin{pmatrix}\varphi_{1,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi_{2,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\begin{pmatrix}\varphi_{1,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi_{2,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0$$

$$(30)\quad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\begin{pmatrix}\varphi_{\dot 1,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi_{\dot 2,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0, \qquad (\sigma_k J_k^- - \chi_{1\beta})\begin{pmatrix}\varphi_{\dot 1,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi_{\dot 2,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0;$$

$$(31)\quad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\begin{pmatrix}\varphi^{\dot 1}{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi^{\dot 2}{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0, \qquad (\sigma_k J_k^- - \chi_{2\beta})\begin{pmatrix}\varphi^{\dot 1}{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\\ \varphi^{\dot 2}{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)\end{pmatrix} = 0;$$

pour $m' > 0$: on a les mêmes équations où les spineurs $\varphi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)$ et $\varphi_{\dot s,l}(\omega^+, \omega^-)$ sont remplacés par les spineurs conjugués de charge $\psi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-)$ et $\psi_{\dot s,l}(\omega^+, \omega^-)$.

Dans les quatre relations précédentes, chaque spineur dont pour l'instant on ignore la forme exacte satisfait simultanément à deux équations du premier ordre et l'on a

$$(32)\qquad \chi_{1\alpha} = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi_\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4}}, \qquad \chi_{2\alpha} = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi_\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4}}$$

$$(33)\qquad \chi_{1\beta} = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi_\beta^2 + \frac{\hbar^2}{4}}, \qquad \chi_{2\beta} = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi_\beta^2 + \frac{\hbar^2}{3}}$$

en outre chaque composante des vecteurs d'onde précédents satisfait à l'un des deux systèmes de deux équations du second ordre ci-dessous :

$$(34)\quad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\varphi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-) = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\,\varphi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-) = 0 \qquad (r \sim 1, 2),$$

$$(35)\quad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\beta^2)\,\varphi_{\dot s,l}(\omega^+, \omega^-) = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\alpha^2)\,\varphi_{\dot s,l}{}^+(\omega, \omega^-) = 0 \qquad (\dot s - 1, 2),$$

ceci constitue la première série de résultats concernant les équations satisfaites par les vecteurs d'onde :

b. la deuxième série de résultats est l'explication des spineurs de troisième rang qui se transforment suivant les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Comme on se limite à la valeur $\frac{1}{2}$ du nombre quantique s', $\left(\text{qui peut aussi prendre la valeur } \frac{3}{2}\right)$, le tableau des spineurs de troisième rang est alors limité à celui donné ci-dessous :

pour $m' = \frac{1}{2}$, on a les spineurs $\Phi^{rs}{}_{t}$ et $\Phi_{\dot{s}\dot{r}}{}^{t}$ avec

$$
(36) \qquad \Phi^{rs}{}_{i} = \begin{pmatrix}
\Phi^{11}{}_{,\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{11}{}_{,\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi^{12}{}_{,\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{12}{}_{,\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi^{21}{}_{,\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{21}{}_{,\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi^{22}{}_{,\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{22}{}_{,\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})
\end{pmatrix},
$$

$$
(37) \qquad \Phi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{t} = \begin{pmatrix}
\Phi_{11,}{}^{\dot{1}} = Z^{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{11,}{}^{\dot{2}} = Z^{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi_{12,}{}^{\dot{1}} = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{12,}{}^{\dot{2}} = Z^{0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi_{21,}{}^{\dot{1}} = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{21,}{}^{\dot{2}} = Z^{0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\
\Phi_{22,}{}^{\dot{1}} = Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{22,}{}^{\dot{2}} = Z^{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})
\end{pmatrix},
$$

pour $m' = -\frac{1}{2}$ on a les spineurs $\Psi^{rs}{}_{i}$ et $\Psi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{t}$.

On les a immédiatement à partir des précédents en changeant les signes de m' c'est-à-dire en remplaçant partout dans les tableaux précédents les fonctions $Z^{m^{+},\ m^{-},\ \frac{1}{2}}_{l^{+},\ l^{-},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})$, par les fonctions correspondantes $Z^{m^{+},\ m^{-},\ -\frac{1}{2}}_{l^{+},\ l^{-},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})$.

Le problème qu'il faut maintenant résoudre, c'est d'extraire de ces spineurs du troisième rang les vecteurs d'onde qui satisfont à l'un des quatre systèmes d'équations (28), (29), (30) et (31). Il est par ailleurs évident que si les vecteurs d'onde extraits de l'expression (36) satisfont à (28) et (29), ceux qui sont tirés de (37) seront solutions de (30) ou (31) car $\Phi^{rs}{}_{i}$ correspond à la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\Phi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{t}$ à $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Les vecteurs d'onde qu'on cherche et appartenant à la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ devront avoir la propriété des spineurs à deux composantes de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pour l'équation $(\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\,\varphi_l = 0$ et la propriété des tenseurs antisymétriques self-duaux de la représentation $\mathcal{D}(0, 1)$ pour l'équation $(J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\,\varphi_l = 0$. On en déduit immédiatement que ces vecteurs d'onde sont les tenseurs antisymétriques self-duaux :

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{i,r}{}^{\dot{s}}\,\sigma_{j,}{}^{rl}\begin{pmatrix}\Phi_{\dot{s}l,}{}^{1}\\ \Phi_{\dot{s}l,}{}^{2}\end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{i,}{}^{\dot{r}}{}_{s}\,\sigma_{j,\dot{r}}{}^{l}\begin{pmatrix}\Phi^{sl}{}_{,\dot{1}}\\ \Phi^{sl}{}_{,\dot{2}}\end{pmatrix}, \tag{39}$$

dans lesquels chaque composante est un spineur à deux composantes ; à partir des vecteurs $A_k^{r\pm}$ donnés dans l'étude des vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$ et des spineurs des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on déduit immédiatement les douze vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ correspondant à la valeur $\frac{1}{2}$ de s'.

a. Représesentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$A_k^{\left(1,\ \frac12\right)} = \begin{cases} A_1^{\left(1,\ \frac12\right)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) + Z^{\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ A_1^{\left(1,\ \frac12\right)} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} Z^{\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) - Z^{\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-\frac12,\ 1,\frac12}_{\frac12,-1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ A_3^{\left(1,\ \frac12\right)} = 0; \end{cases} \tag{40}$$

$$A_k^{\left(1,-\frac12\right)} = \begin{cases} A_1^{\left(1,-\frac12\right)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{-\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) + Z^{\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ A_2^{\left(1,-\frac12\right)} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} Z^{-\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) - Z^{\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac12,1,\frac12}_{\frac12,1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) - Z^{\frac12,-1,\frac12}_{\frac12,\ 1,\frac12}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ A_3^{\left(1,-\frac12\right)} = 0; \end{cases} \tag{41}$$

$$(42)\quad A_k^{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)} = \left\{ \begin{aligned} & A_1^{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ & A_2^{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ & A_3^{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(43)\quad A_k^{\left(2,-\frac{1}{2}\right)} = \left\{ \begin{aligned} & A_1^{\left(2,-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ & A_2^{\left(2,-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} Z^{-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}, \\ & A_3^{\left(2,-\frac{1}{2}\right)} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(44)\quad A_k^{\left(3,\ \frac{1}{2}\right)} = \left\{ \begin{aligned} & A_1^{\left(3,\ \frac{1}{2}\right)} = 0, \\ & A_2^{\left(3,\ \frac{1}{2}\right)} = 0, \\ & A_3^{\left(3,\ \frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}; \end{aligned} \right.$$

$$(45)\quad A_k^{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} = \left\{ \begin{aligned} & A_1^{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} = 0, \\ & A_2^{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} = 0, \\ & A_3^{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} Z^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Si dans ces expressions on remplaçait les fonctions $Z^{m^+,m^-,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)$ par les fonctions $Z^{m^+,m^-,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)$, on obtiendrait les vecteurs d'onde conjugués de charge des précédents.

Dans la suite on désignera ces six vecteurs d'onde par

$${}_{\frac{1}{2}}A_k^r, \quad {}_{-\frac{1}{2}}A_k^r,$$

où k et r prennent les valeurs 1, 2, 3.

b. Représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. — **De la même façon :**

$$
(46)\qquad {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)} = \left\{
\begin{array}{l}
{}_{\frac{1}{2}}B_1^{(1)} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{\frac{1}{2}}B_2^{(1)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^-,\omega^-) + Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{\frac{1}{2}}B_3^{(1)} = 0;
\end{array}\right.
$$

$$
(47)\qquad {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)} = \left\{
\begin{array}{l}
{}_{-\frac{1}{2}}B_1^{(1)} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{-\frac{1}{2}}B_2^{(1)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{-\frac{1}{2}}B_3^{(1)} = 0;
\end{array}\right.
$$

$$
(48)\qquad {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)} = \left\{
\begin{array}{l}
{}_{\frac{1}{2}}B_1^{(2)} = -\dfrac{i}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^+) - Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{\frac{1}{2}}B_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{\frac{1}{2}}B_3^{(2)} = 0;
\end{array}\right.
$$

$$
(49)\qquad {}_{\frac{1}{2}}B_1^{(2)} = \left\{
\begin{array}{l}
{}_{-\frac{1}{2}}B_1^{(2)} = -\dfrac{i}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{-\frac{1}{2}}B_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}
Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{pmatrix}, \\[2ex]
{}_{-\frac{1}{2}}B_3^{(2)} = 0;
\end{array}\right.
$$

$$(50) \quad {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)} = \begin{cases} {}_{\frac{1}{2}}B_1^{(3)} = 0, \\ {}_{\frac{1}{2}}B_2^{(3)} = 0, \\ {}_{\frac{1}{2}}B_3^{(3)} = \begin{pmatrix} Z_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$(51) \quad {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)} = \begin{cases} {}_{-\frac{1}{2}}B_1^{(3)} = 0, \\ {}_{-\frac{1}{2}}B_2^{(3)} = 0, \\ {}_{-\frac{1}{2}}B_3^{(3)} = \begin{pmatrix} Z_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Si dans les expressions des ${}_{\frac{1}{2}}B_k^r$ et ${}_{-\frac{1}{2}}B_k^r$, on remplace les fonctions $Z_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}^{m^+, m^-, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)$, par les fonctions $Z_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}^{m^+, m^- -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)$ on obtient les vecteurs d'onde conjugués decharges des précédents.

Nous allons vérifier que ces vecteurs satisfont à l'un des systèmes d'équations (28), (29), (30) et (31). Il suffit évidemment de le montrer pour l'un quelconque des vecteurs d'onde. Considérons par exemple l'expression ${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}$ on a

$$(52) \qquad \left(J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2\right) {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} = 0, \qquad \text{avec} \quad \chi_\beta^2 = l\,(l+1)\,\hbar^2 = 2\hbar^2$$

et

$$\sigma_k J_k^+ {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & J_1^+ + j J_2^+ \\ J_1^+ - j J_2^+ & 0 \end{vmatrix} {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} + \begin{vmatrix} J_3^+ & 0 \\ 0 & -J_3^+ \end{vmatrix} {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} = \hbar\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} + \frac{1}{2}\,{}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right),$$

d'où

$$(53) \qquad \left(\sigma_k J_k^+ - \frac{3}{2}\hbar\right) {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} = 0,$$

comme

$$\chi_{1\alpha} = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi_\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4}} = \frac{3}{2}\hbar,$$

il en découle que les relations (52) et (43) reconstituent bien le système (28).

On a donc ainsi obtenu les douze vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ avec $m' = \frac{1}{2}$, on en déduit immédiatement ceux qui correspondent à $m' = -\frac{1}{2}$.

Si l'on avait utilisé les spineurs correspondants à la valeur $\frac{3}{2}$ du nombre quantique s', on aurait obtenu des résultats analogues. Dans toutes les expressions précédentes, les cœfficients de normalisation ont été choisis pour que les A_k^r et B_k^s soient vecteurs propres de l'opération spin isotopique.

2.2. Comportement des vecteurs d'onde sous les opérateurs J_3^+, J_3^-, S'_3. — Considérons les vecteurs d'onde ${}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^r$, ${}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^r$ et les vecteurs d'onde conjugués de charge ${}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^{r'}$, ${}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^{r'}$. Comme toutes ces expressions correspondent à $s' = \frac{1}{2}$, on en déduit les relations

$$S'_3 \, {}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^r = \frac{1}{2} \, {}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^r, \qquad S'_3 \, {}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^r = \frac{1}{2} \, {}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^r \tag{54}$$

et

$$S'_3 \, {}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^{r'} = -\frac{1}{2} \, {}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^{r'}, \qquad S'_3 \, {}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^{r'} = -\frac{1}{2} \, {}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^{r'}. \tag{55}$$

Dans toute la suite on se placera dans un système d'unités tel que $\hbar = 1$.

Examinons maintenant l'effet des opérateurs J_3^+ et J_3^-. D'après l'étude qu'on a effectuée pour les bosons et les leptons, il est indiqué d'introduire la matrice σ_3 de Pauli et la matrice Γ_3 précédemment définie dans l'étude des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$:

$$\Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{56}$$

Pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, on considérera les opérateurs $\sigma_3 J_3^+$ et $\Gamma_3 J_3^-$, tandis que pour $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, on aura $\Gamma_3 J_3^+$ et $\sigma_3 J_3^-$.

On a alors immédiatement les résultats suivants :

a. Représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$
(57) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \\
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)}, \\
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(58) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} &= 1 \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \\
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)} &= -1 \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)}, \\
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)} &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
(59) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)} &= -\frac{1}{2} \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \\
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)} &= -\frac{1}{2} \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)}, \\
\sigma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)} &= -\frac{1}{2} \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(60) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)} &= 1 \; {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \\
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)} &= -1 \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)}, \\
\Gamma_3 J_3^- \; {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)} &= 0.
\end{aligned} \right.
$$

b. Représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$$
(61) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)} &= 1 \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)}, \\
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)} &= -1 \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)}, \\
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)} &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
(62) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\sigma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)}, \\
\sigma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)}, \\
\sigma_3 J_3^- \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)} &= \frac{1}{2} \; {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)};
\end{aligned} \right.
$$

et de façon analogue :

$$
(63) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)} &= 1 \; {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)}, \\
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)} &= -1 \; {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)}, \\
\Gamma_3 J_3^+ \; {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)} &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
(64)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\sigma_3 J_3^- \, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)} &= -\frac{1}{2}\, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)},\\
\sigma_3 J_3^- \, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)} &= -\frac{1}{2}\, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)},\\
\sigma_3 J_3^- \, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)} &= -\frac{1}{2}\, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)}.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut résumer les résultats précédents dans les deux tableaux ci-dessous :

a. Représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

(65)

Vecteur d'onde.	$\sigma_3 J_3^+$.	$\Gamma_3 J_3^-$.	S'_3.
${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

b. Représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

(66)

Vecteur d'onde.	$\Gamma_3 J_3^+$.	$\sigma_3 J_3^-$.	S'_3.
${}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans ces tableaux figurent les scalaires par lesquels sont multipliés les vecteurs quand on leur applique les opérateurs $\sigma_3 J_3^+$, $\Gamma_3 J_3^-$, S'_3 pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\Gamma_3 J_3^+$, $\sigma_3 J_3^-$, S'_3, pour la représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Ces tableaux, quand on considère la première colonne $\sigma_3 J_3^+$ (ou $\Gamma_3 J_3^+$), font apparaître des groupements remarquables de vecteurs d'onde, trois doublets pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et deux triplets pour $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Comparons ces résultats à la classification de Nishijima-Gell-Mann pour les baryons :

(67)

Particule.	I_3.	S.	N.
n	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
p	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Ξ^0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
Ξ^-	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
Σ^+	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Σ^0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Σ^-	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans la classification de Nishijima-Gell-Mann il y a en plus l'hypéron Λ_0, il apparaît que l'onde associée à cette particule devrait être classé dans D $(0, \frac{3}{2})$].

L'analogie entre (65), (66) et (67) est évidente, les nucléons sont associés au doublet $\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)}, {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)}\right)$, les mésons Ξ au doublet $\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(2)}, {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(2)}\right)$, les mésons Σ au triplet $\left({}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(1)}, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(2)}, {}_{-\frac{1}{2}}B_k^{(3)}\right)$, et comme pour les autres représentations $\sigma_3 J_3^+$ (ou $\Gamma_3 J_3^+$), $\Gamma_3 J_3^-$ (ou $\sigma_3 J_3^-$) et S'_3 peuvent être interprétés respectivement comme le spin isotopique, l'étrangeté et le nombre de baryons.

Mais il reste en plus dans le tableau (65) le doublet $\left({}_{+\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right)$, et dans le tableau (66) le triplet $\left({}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)}, {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)}, {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)}\right)$ mais on peut à ce sujet présenter les deux remarques suivantes :

a. On observera que dans toutes les classifications précédentes qu'on a obtenues, mésons Π, mésons K, leptons, mésons μ et Λ_0, la somme des nombres qui apparaissent dans chaque ligne correspond à la valeur de la charge de la particule à laquelle est attribué le vecteur d'onde correspondant, ce n'est pas un hasard et l'on montrera ultérieurement que l'opérateur de charge est précisément la somme des trois opérateurs.

b. En outre dans toutes les classifications précédentes la charge ne prend que les valeurs 1, 0, — 1.

On observera alors que l'un des deux termes du doublet $\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)},\ {}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right)$ a la charge deux et qu'il en est de même pour l'un des termes du triplet $\left({}_{\frac{1}{2}}B_k^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(2)},\ {}_{\frac{1}{2}}B_k^{(3)}\right)$; si donc on admet que la charge prend seulement l'une des trois valeurs 1, 0, — 1 et qu'en outre si l'un des termes du doublet ou du triplet n'a pas d'existence physique les autres termes pas plus n'ont d'existence physique, on est amené à conclure que seuls les vecteurs d'onde correspondant à une réalité physique sont ceux qui appartiennent à la classification de Nishijima-Gell-Mann.

Il est évident d'après les propriétés des fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ que les vecteurs d'onde ${}_{\pm\frac{1}{2}}A_k^r$ et ${}_{\pm\frac{1}{2}}B_k^r$ pour la valeur $m' = -\frac{1}{2}$ fournissent les vecteurs associés aux antiparticules et l'on obtiendrait d'une façon immédiate des tableaux analogues à (65) et (66).

Un fait remarquable concerne les vecteurs d'onde ${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(3)}$ et ${}_{-\frac{1}{2}}A_k^{(3)}$ des nucléons. Comme

$$(68)\qquad {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(3)} = {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(3)} = {}_{-\frac{1}{2}}A_1^{(3)} = {}_{-\frac{1}{2}}A_2^{(3)} = 0,$$

on pourra écrire les fonctions d'onde des nucléons :

$$(69)\qquad \Phi_P = \begin{pmatrix} Z_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix},$$

$$(70)\qquad \Phi_N = \begin{pmatrix} Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix},$$

Φ_N et Φ_P satisfaisant aux équations d'onde

$$(71)\qquad (\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\,\Phi_{\substack{N\\P}} = 0,$$

$$(72)\qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\,\Phi_{\substack{N\\P}} = 0,$$

il y a donc une très grande analogie entre les vecteurs d'onde des nucléons et ceux de l'électron et du neutrino.

$$(73)\qquad \Psi_e = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta^+}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi^+ + \psi^+)} \\ \sin\frac{\theta^+}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi^+ - \psi^+)} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_\nu = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta^+}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi^+ - \psi^+)} \\ \cos\frac{\theta^+}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi^+ + \psi^+)} \end{pmatrix},$$

$$(74)\qquad \Phi_P = \cos\theta^- \tilde{\Psi}_e, \qquad \Phi_N = \cos\theta^- \tilde{\Psi}_\nu;$$

à des coefficients numériques près.

2.3. Isospin des baryons. — Dans l'étude des vecteurs d'onde associés aux bosons on a fait les deux remarques :

a. pour déterminer le spin des ondes on cherche le nombre de composantes indépendantes q de la fonction d'onde quand on passe dans le système propre et le spin S est donné par la relation

$$(75)\qquad q = 2\,\mathrm{S} + 1;$$

b. les vecteurs A_k^{r+} et A_k^{r-} des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$ ont, quand on passe dans le système propre, une composante indépendante.

Or, on passe des vecteurs d'onde de $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$ à ceux de $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ en remplaçant chaque composante des vecteurs par un spineur, donc dans le système propre les vecteurs des représentations $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ont deux composantes indépendantes et l'application de la relation (75) donne

$$q = 2 = 2\mathrm{T} + 1, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2},$$

donc de ce point de vue l'isospin des ondes associées aux baryons est $\frac{1}{2}$.

Mais, dans le formalisme lagrangien général qu'on a donné [1] des équations d'ondes invariantes sous le groupe des rotations complexes, on a vu s'introduire un tenseur antisymétrique S_{ij} ayant les composantes suivantes :

a. pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$(76)\qquad \begin{cases} S_{ij}^+ = \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}(\sigma_i J_j^+ - \sigma_j J_i^+)\,\Phi - (J_i^+ \tilde{\Phi}\sigma_j - J_j^+ \tilde{\Phi}\sigma_i)\,\Phi], \\ S_{ij}^- = 0; \end{cases}$$

b. pour la représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$$(77) \qquad \begin{cases} S_{ij}^{+} = 0, \\ S_{ij}^{-} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\Phi}(\sigma_i J_j^{-} - \sigma_j J_i^{-})\,\Phi - (J_i^{-}\tilde{\Phi}\sigma_j - J_j^{-}\tilde{\Phi}\sigma_i)\,\Phi\right]. \end{cases}$$

On peut alors, comme pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, calculer un tenseur de Belinfante-Rosenfeld $\mathcal{S}_{ijk}$ tel que :

Représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$(78) \qquad S_{ij}^{+} = J_k^{+}\mathcal{S}_{ijk}, \qquad S_{ij}^{-} = 0;$$

Représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$$(79) \qquad S_{ij}^{+} = 0, \qquad S_{ij}^{-} = J_k^{-}\mathcal{S}_{ijk}.$$

On trouve immédiatement comme pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$(80) \qquad \mathcal{S}_{ijk} = \frac{j\hbar}{4}\,\varepsilon_{jke}\left[\tilde{\Phi}\,\delta_{ie}\,\Phi\right].$$

On est alors conduit à définir le pseudo-vecteur

$$(81) \qquad \Sigma_k = \varepsilon_{ijk}\,\mathcal{S}_{ij0} = \frac{\hbar}{2}\left[\tilde{\Phi}\sigma_k\Phi\right].$$

Ce pseudo-vecteur l'analogue interne du spin des théories habituelles; nous allons calculer la valeur moyenne de $\boldsymbol{\Sigma}_3$ sur l'un quelconque des vecteurs d'onde de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)\left[\text{ou } \mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)\right]$.

Considérons par exemple :

$$(82) \qquad \langle \Sigma_3 \rangle = \frac{\hbar}{2}\,\frac{\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)},\ \Sigma_3\,{}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right)}{\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right)},$$

où ${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}$ est donné par la relation (40).

Commençons par normer ce vecteur d'onde : Remarquons d'abord que

$$(83) \qquad \begin{aligned} \left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right) &= \left({}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}\right) + \left({}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}\right) + \left({}_{\frac{1}{2}}A_3^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_3^{(1)}\right) \\ &= \left({}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}\right) + \left({}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)},\ {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}\right), \end{aligned}$$

par comparaison avec ce qu'on a fait pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on normera ${}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}$ de la façon suivante en introduisant un nombre quantique s prenant les valeurs dans l'intervalle ferme $[-1, 1]$

$$(84)\qquad {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2l^+ + 1}} \left[\begin{array}{l} {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\sqrt{l^+ + s + \frac{1}{2}} \left(Z^{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) + Z^{\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{l^+ - s + \frac{1}{2}} \left(Z^{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) + Z^{-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \right) \end{array} \right\} \\ {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{2}\sqrt{l^+ + s + \frac{1}{2}} \left(Z^{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) - Z^{\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \right) \\ \frac{i}{2}\sqrt{l^+ - s + \frac{1}{2}} \left(Z^{\frac{1}{2}, 1. \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, -, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) - Z^{\frac{1}{2}, -1. \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, 1. \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \right) \end{array} \right\} \\ {}_{\frac{1}{2}}A_3^{(1)} = 0 \end{array} \right],$$

d'où

$$\left({}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}, {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}\right) = \frac{1}{2l^+ + 1}\left[\frac{1}{4}\left(l^+ + s + \frac{1}{2}\right) \times 2 + \frac{1}{4}\left(l^+ - s + \frac{1}{2}\right) \times 2\right] = \frac{1}{2},$$

de même

$$\left({}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}, {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}\right) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$(85)\qquad \left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right) = 1.$$

Par ailleurs

$$(86)\qquad \left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right) = \left({}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}\right) + \left({}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}\right),$$

or

$$(87)\qquad \left({}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_1^{(1)}\right) = \frac{1}{2l^+ + 1}\left[\frac{1}{2}\left(l^+ + s + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(l^+ - s + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{s}{2l^+ + 1},$$

de même

$$(88)\qquad \left({}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_2^{(1)}\right) = \frac{s}{2l^+ + 1},$$

d'où

$$\hbar\left({}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}, \sigma_3\, {}_{\frac{1}{2}}A_k^{(1)}\right) = \hbar\frac{2s}{2l^+ + 1} = \hbar s \qquad \text{puisque} \quad l^+ = \frac{1}{2};$$

d'où

$$(89)\qquad \langle \Sigma_3 \rangle = \hbar s.$$

quand s prend les deux valeurs $+1$ et -1, il vient finalement

$$(90)\qquad \langle \Sigma_3 \rangle = \pm\frac{\hbar}{2}.$$

Donc la valeur moyenne de Σ_3 pour les ondes associées aux baryons est $\frac{\hbar}{2}$.

Pour terminer, remarquons comme on l'a déjà indiqué que l'opérateur de charge Q est

$$Q = \frac{e}{\hbar}(I_3^+ J_3^+ + I_3^- J_3^- + S_3')$$

avec

$$I_3^+ = \sigma_3 \quad \text{pour } \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{et} \quad I_3^- = \sigma_3 \quad \text{pour } \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right);$$

$$I_3^+ = \sigma_3 \quad \text{et} \quad I_3^- = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{pour } \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$I_3^+ = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad I_3^- = \sigma_3 \quad \text{pour } \mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

On vérifie alors que les valeurs propres de la charge sont obtenues en accord avec la formule de Nishijima-Gell-Mann :

3. **Conclusions**. — Dans cette étude on a montré qu'il était possible d'associer des vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, aux différents fermions. Le fait important est d'avoir pu obtenir un tel résultat pour les baryons dont on a donné simultamément les fonctions d'onde et les équations auxquelles elles satisfont, ce qui fait apparaître du même coup les analogies et les différences existant entre les nucléons et les leptons. Comme pour les fonctions d'onde des bosons, la chiralité des vecteurs d'onde jouent un rôle important.

On a retrouvé la classification empirique de Nishijima-Gell-Mann sauf en ce qui concerne l'hypéron Λ_0, qui dans notre théorie se trouve classé dans D $(0, \frac{3}{2})$.