ANNALES DE L'I. H. P.

PIERRE HILLION
JEAN-PIERRE VIGIER

Les ondes associées à une structure interne des particules

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 3 (1962), p. 149-208
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1962__17_3_149_0>

Les ondes associées à une structure interne des particules

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER,
Institut Henri Poincaré (Paris).

ÉTUDE RELATIVISTE.

Introduction. — Dans une étude précédente ([1]) nous avons développé une mécanique ondulatoire non relativiste associée à une structure interne des particules élémentaires. Nous avons discuté la notion de structure en montrant que de son existence il était suffisant de postuler une certaine symétrie sphérique de telle façon que la quantification conduise à des vecteurs d'onde qui se transforment suivant la représentation $\mathcal{D}(l)$ du groupe des rotations à trois dimensions.

Au stade classique (par opposition à quantique) la particule à symétrie sphérique possède un mouvement interne caractérisé par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2I}\left[p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos\theta\right)\right],$$

où I a les dimensions d'un moment d'inertie et où p_θ, p_φ, p_ψ, sont les moments canoniquement conjugués aux angles d'Euler θ, φ, ψ.

Au stade quantique non relativiste, la particule est constituée par des ondes permanentes invariantes sous le groupe des rotations réelles à trois dimensions. L'hamiltonien et les moments cinétiques deviennent

([1]) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Les ondes associées à une structure interne des particules.* Partie I (*Cahiers de Physique*, t. 121, 1960, p. 345).

des opérateurs ayant les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe des rotations. Le résultat important de la quantification est d'une part de faire disparaître le temps des équations et d'autre part de transformer le problème de mécanique classique en un problème de géométrie infinitésimale lié à l'algèbre de Lie du groupe des rotations. Nous allons maintenant généraliser les résultats précédents dans le cadre de la relativité spéciale.

Le premier problème à résoudre est de trouver au stade relativiste non quantique un modèle présentant une symétrie telle que la quantification de son mouvement donne des équations invariantes sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes (ou groupe R_3^*, *voir* plus bas). Il est évident que ceci sera obtenu en cherchant l'extension relativiste du modèle à symétrie sphérique étudié dans la première partie de cette étude. On a montré [2] que le rotateur hypersphérique (ou rotateur de Nakano) constituait précisément l'une des extensions possibles. Ce rotateur est caractérisé par deux tétrapodes a_μ^ξ (système d'inertie) et b_μ^ξ ($\mu, \xi \sim 1, 2, 3, 4$) en mouvement autour du premier, où les tétrapodes sont des systèmes de quatre quadrivecteurs orthonormés dont l'un est du genre temps; il est appelé hypersphérique, parce que son tenseur moment d'inertie est constant

$$I_{\mu\nu\alpha\beta} = I g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}.$$

Pour étudier le mouvement de ce rotateur il est nécessaire de généraliser à l'espace-temps la notion d'angles d'Euler. On a alors montré [3] que les variables jouant ce rôle étaient des combinaisons symétriques (+) et antisymétriques (—) des trois angles d'Euler habituels $\{\varphi_1, \theta_1, \psi_1\}$ et de trois angles hyperboliques $\{x, y, z\}$, on a

$$\begin{aligned} \omega^+ &= \{\varphi^+, \theta^+, \psi^+\} \\ \omega^- &= \{\varphi^-, \theta^-, \psi^-\} \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi^\pm &= \varphi_1 \pm x \\ \theta^\pm &= \theta_1 \pm y \\ \psi^\pm &= \psi_1 \pm z \end{aligned} \right.$$

en posant

$$x = i\varphi_2, \qquad y = i\theta_2, \qquad z = i\psi_2,$$

on peut n'utiliser que des lignes circulaires mais ω^+ et ω^- apparaissent comme des angles complexes, ceci montre que R_3^* n'est pas le complexifié

---

(2) L. DE BROGLIE, P. HILLION et J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 2255.

(3) F. HALBWACHS, P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 16, fasc. III, 1959, p. 115.

de R_3 au sens usuel. En effet, d'habitude, le complexifié $\overline{G}$ d'un groupe réel G opérant sur une variété euclidienne réelle V_n est obtenu en remplaçant les p paramètres réels de G par p paramètres complexes, $\overline{G}$ opérant alors sur une variété complexe V_{2n}. Le complexifié G^* que l'on définit est obtenu en remplaçant les $2\,p$ paramètres de G par p paramètres complexes, G^* opérant lui sur une variété pseudo-euclidienne réelle V_n.

On a alors montré ([8]) que le groupe R_3^* était localement isomorphe au groupe de Lorentz, qu'il était connexe, et admettait des représentations pseudo-unitaires caractérisées par l'existence de deux types de grandeurs imaginaires. En outres, les opérations C′, P′, T′ qui dans cette théorie jouent un rôle analogue aux opérations C, P, T, des théories quantiques usuelles appartiennent au groupe des automorphismes de R_3^* et non pas au groupe « complet » R_3^* qu'on obtiendrait en y incluant les transformations à déterminant négatif.

On a en outre prouvé ([3]) que les tétrapodes a_μ^ξ et b_μ^ξ se décomposent chacun en deux trièdres complexes conjugués formés à l'aide des tenseurs antisymétriques self-duaux :

$$A_k^{r\pm} = a_k^r a_4^4 - a_4^r a_k^4 \pm \varepsilon_{ijk} a_i^r a_j^4,$$
$$B_k^{r\pm} = b_k^r b_4^4 - b_4^r b_k^4 \pm \varepsilon_{ijk} b_i^r b_j^4$$

et que B_k^{r+} est repéré par rapport à A_k^{r+} par les angles ω^+ et B_k^{r-} par rapport à A_k^{r-} par les angles ω^-.

Il est à peu près évident d'après ces formules, qu'à l'approximation non relativiste, A_k^{r+} et A_k^{r-} tendent vers a_k^r; B_k^{r+} et B_k^{r-} vers b_k^r; ω^+ et ω^- simultanément vers $\omega = \{\varphi, \theta, \psi\}$ de telle sorte que le rotateur hypersphérique est la généralisation relativiste réellement adaptée au problème qu'on se propose de traiter.

Dans une autre étude ([4]) on a montré que le mouvement de ce rotateur était régi par l'hamiltonien

$$\begin{aligned}(1)\qquad H = {} & \frac{1}{2I}\left[p_{\theta^+}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta^+}\left(p_{\varphi^+}^2 + p_{\psi^+}^2 - 2\,p_{\varphi^+}p_{\psi^+}\cos\theta^+\right)\right] \\ & + \frac{1}{2I}\left[p_{\theta^-}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta^-}\left(p_{\varphi^-}^2 + p_{\psi^-}^2 - 2\,p_{\varphi^-}p_{\psi^-}\cos\theta^+\right)\right],\end{aligned}$$

([4]) D. Bohm, P. Hillion, T. Takabayasi et J.-P. Vigier, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 23 n° 3, 1960, p. 496.

où p_{θ^+}, p_{φ^+}, p_{ψ^+}, p_{θ^-}, p_{φ^-}, p_{ψ^-}, sont les moments cinétiques canoniquement conjugués aux angles ω^+ et ω^-.

On remarquera que H peut s'écrire $H = \mathcal{H}' + \mathcal{H}''$, où $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont l'hamiltonien dans lequel on a remplacé les angles et les moments canoniquement conjugués réels par les grandeurs complexes correspondantes. Il apparaît donc que pour passer du formalisme non relativiste au formalisme relativiste il suffit de remplacer toutes les grandeurs réelles par des grandeurs complexes conjuguées.

Les constantes du mouvement du rotateur de Nakano sont :

$$H^+, \quad H^-, \qquad p_3^+ = p_{\varphi^+}, \qquad p_3^- = p_{\varphi^-}, \qquad p_3'^+ = p_{\psi^+}, \qquad p_3'^- = p_{\psi^-}.$$

En projetant les moments cinétiques p_{ω^+} sur les axes A_k^+ et B_k^+, on obtient les moments p_k^+ et $p_k'^+$ et d'une façon analogue la projection des moments p_{ω^-} sur A_k^- et B_k^-, fournit les moments p_k^- et $p_k'^-$ et l'hamiltonien (1) s'écrit

$$H = \frac{1}{2I}(p_k^+ p_k^+ + p_k^- p_k^-) = \frac{1}{2I}(p_k'^+ p_k'^+ + p_k'^- p_k'^-).$$

Quand on quantifie [5] ces mouvements, on obtient des systèmes d'ondes permanentes invariantes sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes. Mathématiquement l'opération de quantification s'effectue en remplaçant les crochets de Poisson par les commutateurs

$$[p_{\omega^+}, \omega^+] = -j\hbar, \qquad [p_{\omega^-}, \omega^-] = -j\hbar,$$

ce qui revient à remplacer p_{ω^+} et p_{ω^-} par $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\omega^+}$ et $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\omega^-}$; soit explicitement : p_{θ^+}, p_{φ^+}, p_{ψ^+} par $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\theta^+}$, $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi^+}$, $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\psi^+}$ et p_{θ^-}, p_{φ^-}, p_{ψ^-} par $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\theta^-}$, $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi^-}$, $-j\hbar\frac{\partial}{\partial\psi^-}$.

Comme on l'a indiqué, il y a lieu de distinguer entre les deux types d'imaginaire j provenant de la quantification et i (qui rentre dans ω^+ et ω^-) provenant de la métrique de l'espace-temps.

Note ajoutée à la correction des épreuves. — On peut ne conserver qu'un type de grandeurs complexes à condition de remplacer l'opération de conjugaison complexe pour la parité P et d'introduire une

(5) D. Bohm, P. Hillion et J.-P. Vigier, *Progr. of Theor. phys.*, vol. 24, 1960, p. 761.

opération C″ symétrie transformant un trièdre directe en trièdre inverse.

La quantification remplace les moments cinétiques p_k^+, p_k^-, $p_k'^+$, $p_k'^-$ par des opérateurs J_k^+, J_k^-, $J_k'^+$, $J_k'^-$, ce qu'on écrira; Q désignant l'opération de quantification :

$$p_k^{\pm} \xrightarrow{Q} J_k^{\pm}, \qquad p_k'^{\pm} \xrightarrow{Q} J_k'^{\pm},$$

ces opérateurs fournissent les éléments de l'algèbre de Lie du groupe des rotations complexes conjuguées, cette algèbre n'étant que l'algèbre complexifiée de l'algèbre de Lie réelle. Ici encore la complexification n'a pas son sens habituel à cause des deux imaginaires i et j.

L'hamiltonien devient un opérateur

$$H = \frac{1}{2I}(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^-).$$

Nous donnerons dans le prochain paragraphe toutes les relations de commutation des opérateurs J_k^+, J_k^-, $J_k'^+$, $J_k'^-$.

On en déduit alors l'équation d'ondes

$$H\Psi = E\Psi \tag{2}$$

qui invariante sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées est l'analogue de l'équation de Klein-Gordon invariante sous le groupe de Lorentz.

Sur cette équation on peut faire les remarques suivantes :

a. Le temps propre a complètement disparu, il s'agit donc bien d'un système d'ondes permanentes, bien que le groupe de Lorentz soit localement isomorphe au groupe des rotations complexes conjuguées, on voit la supériorité de l'emploi de ce dernier groupe qui ne fait intervenir que les orientations du tétrapode.

b. La quantification a remplacé le problème de mécanique relativiste par un problème de géométrie infinitésimale lié à l'algèbre de Lie du groupe des rotations complexes conjuguées.

On se pose alors le problème de trouver les équations des ondes représentées par les vecteurs de l'espace invariant sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations tridimensionnelles complexes. On a indiqué précédemment que ces représentations étaient pseudo-unitaires.

Avant de résoudre ce problème nous expliciterons l'hamiltonien H, donnerons un ensemble de solutions de l'équation (2) et déterminerons la forme des vecteurs de l'espace invariant sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ [6]. En fait, on adjoint à R_3^*, les opérations C′, P′, T′ (que dans la suite on appellera C, P, T) qui appartiennent à son groupe d'automorphismes. Dans la suite on désignera toujours par R_3^* ce groupe étendu.

1. Les solutions de l'équation $H\Psi = E\Psi$. — Si l'on projette, comme on l'a indiqué, les moments cinétiques p_{θ^+}, p_{φ^+}, p_{ψ^+}, sur les axes A_k^{r+} et les moments cinétiques p_{θ^-}, p_{φ^-}, p_{ψ^-}, sur les axes A_k^{r-}, on obtient des opérateurs J_k^+ et J_k^- dont l'expression a été donnée pour la première fois par C. Van Winter [7] :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} J_1^{\pm} &= -j\hbar\left(-\sin\varphi^{\pm}\frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \cos\varphi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} + \frac{\cos\varphi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\frac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}\right),\\ J_2^{\pm} &= -j\hbar\left(-\cos\varphi^{\pm}\frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \sin\varphi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} + \frac{\sin\varphi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\frac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}\right),\\ J_3^{\pm} &= -j\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} \end{aligned}\right.$$

Si l'on projette maintenant les mêmes moments cinétiques sur B_k^{r+} et B_k^{r-}, il vient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} J_1'^{\pm} &= -j\hbar\left(\sin\psi^{\pm}\frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} + \cos\psi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\frac{\partial}{\partial\psi^{\pm}} - \frac{\cos\psi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}}\right),\\ J_2'^{\pm} &= -j\hbar\left(\cos\psi^{\pm}\frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \sin\psi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\frac{\partial}{\partial\psi^{\pm}} - \frac{\sin\psi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}}\right),\\ J_3'^{\pm} &= -j\hbar\frac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}. \end{aligned}\right.$$

L'hamiltonien peut alors s'écrire

$$(5)\qquad H = \frac{1}{2I}(J_k^+J_k^+ + J_k^-J_k^-) = \frac{1}{2I}(J_k'^+J_k'^+ + J_k'^-J_k'^-),$$

avec

$$(6)\qquad J_k^+J_k^+ = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^{+2}} + \frac{\cos\theta^+}{\sin\theta^+}\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \frac{1}{\sin^2\theta^+}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^{+2}} - 2\cos\theta^+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^+\partial\psi^+}\right)\right]$$

et une relation analogue pour $J_k^-J_k^-$.

---

[6] Dans toute cette étude les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs de 1 à 4.

[7] C. VAN WINTER, *Thèse*, Groningen, 1957.

Les opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_x'^{\pm}$, $J_k^{\pm}J_k^{\pm}$ sont des constantes du mouvement, c'est-à-dire qu'ils satisfont aux relations

$$(7)\qquad [H, J_3^{\pm}] = 0, \qquad [H, J_3'^{\pm}] = 0, \qquad [H, J_k^{\pm}J_k^{\pm}] = 0,$$

on a en outre

$$(8)\quad [J_k^{+}J_k^{+}, J_3^{+}] = 0, \qquad [J_k^{-}J_k^{-}, J_3^{-}] = 0, \qquad [J_k'^{+}J_k'^{+}, J_3'^{+}] = 0, \qquad [J_k'^{-}J_k'^{-}, J_3'^{-}] = 0,$$

les $J_k^{\pm}$ et $J_k'^{\pm}$ satisfont aux relations de structure

$$(9)\qquad [J_{ij}^{\pm}J_j^{\pm}] = -j\hbar J_k^{\pm}, \qquad [J_{ij}'^{\pm}J_j'^{\pm}] = +j\hbar J_k'^{\pm},$$

où i, j, k, est une permutation circulaire de 1, 2, 3.

De plus on a les relations de commutation

$$(10)\quad [J_i^{+}, J_k^{-}] = 0, \qquad [J_i'^{+}, J_k'^{-}] = 0, \qquad [J_i^{\pm}, J_k'^{\pm}] = 0, \qquad [J_i^{\mp}, J_k'^{\pm}] = 0.$$

Ces relations permettent de chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs

$$J_k^{+}J_k^{+}, \quad J_3^{+}, \quad J_3'^{+}, \quad J_k^{-}J_k^{-}, \quad J_3^{-}, \quad J_3'^{-},$$

on trouve les fonctions (5), (7)

$$U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-) = Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\, Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-),$$

où

$$\omega^+ = \{\varphi^+, \theta^+, \psi^+\}, \qquad \omega^- = \{\varphi^-, \theta^-, \psi^-\},$$

avec

$$l^+, \quad l^- = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad \ldots;$$

$$m^{\pm}, \quad m'^{\pm} = -l^{\pm}, \quad -l^{\pm}+1, \quad \ldots, \quad l^{\pm}-1, \quad l^{\pm};$$

$$\begin{aligned} Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) = {} & \left(\sin\frac{\theta^+}{2}\right)^{-m^+ + m'^+} \left(\cos\frac{\theta^+}{2}\right)^{-m^+ + m'^+} \\ & \times \frac{d^{l^+ - m^+}}{d\left(\sin^2\frac{\theta^+}{2}\right)^{l^+ - m^+}} \left(\sin\frac{\theta^+}{2}\right)^{2l^+ - 2m'^+} \\ & \qquad \times \left(\cos\frac{\theta^+}{2}\right)^{2l^+ + 2m'^+} e^{i(m^+\varphi^+ + m'^+\psi^+)} \end{aligned}$$

et une expression analogue $Y_l^{l^-, m'^-}(\omega^-)$.

L'ensemble des fonctions $U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-)$ n'est pas invariant sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées quand on y inclut l'opération P. Pour obtenir l'invariance sous le groupe étendu il est nécessaire (7) de définir les opérateurs

$$S'_k = J_k'^{+} + J_k'^{-} \quad \text{et} \quad S'_k S'_k \qquad (k \sim 1, 2, 3),$$

et de chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs

$$J^+_k J^+_k,\quad J^+_3,\quad J^-_k J^-_k,\quad J^-_3,\quad S'_k S'_k,\quad S'_3,$$

on trouve ([5]), ([7]) très aisément les fonctions propres

$$(11)\quad Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-) = \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \times Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-),$$

où $(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^- \mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m')$ sont des paramètres de Clebsch-Gordon :

$$s' = l^+ + l^-,\quad l^+ + l^- - 1,\quad \ldots,\quad |l^+ - l^-|;$$
$$m' = -s'\quad -s' + 1,\quad \ldots,\quad s' - 1,\quad s';$$

on a alors établi ([8]) les résultats suivants :

1° dans l'espace vectoriel des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$, il est possible de définir un produit scalaire tel que

$$\left(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-),\ Z^{n^+, n^-, n'}_{k^+, k^-, t'}(\omega^+, \omega^-)\right) = \delta_{k^+ l^+}\, \delta_{k^- l^-}\, \delta_{m^+ n^+}\, \delta_{m^- n^-}\, \delta_{m' n'}\, \delta_{s' t'},$$

les fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$ constituant une base orthonormée complète;

2° que les sous-espaces vectoriels des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$ pour lesquels l^+, l^-, s', m' sont maintenus fixés avaient la propriété que leurs éléments se transforment suivant les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe étendu des rotations complexes, c'est-à-dire avec l'automorphisme P.

Revenons alors à l'équation (2) qu'on peut écrire

$$H\Psi = \frac{1}{2I}(J^+_k J^+_k + J^-_k J^-_k)\Psi = E\Psi,$$

où

$$(12)\quad (J^+_k J^+_k + J^-_k J^-_k - \chi^2)\Psi = 0,$$

en posant

$$(13)\quad 2IE = \chi^2.$$

Les fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$ sont solutions de l'équation (12) et constituent une base dans l'espace vectoriel des solutions de cette

([8]) P. Hillion, *The orthogonal group in the complexe projective space* soumis au *Journal of Mathematical Physics*.

équation, nous admettrons que toute solution Ψ peut se mettre sous la forme

$$\Psi = \sum_{m', s'} \sum_{\substack{l^+, m^- \\ l^-, m^-}} C_{l^-, s'}^{m^+, m'} C_{l^-, s'}^{m^-, m'} Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'} (\omega^+, \omega^-), \tag{14}$$

où $C_{l^+, s'}^{m^+, m'}$ et $C_{l^-, s'}^{m^-, m'}$ sont des constantes.

Comme le sous-ensemble vectoriel l^+, l^-, s', m', fixés des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ a la propriété d'être invariant sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations complexes conjuguées, les fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ sont les composantes des fonctions d'onde qui constituent le substratum des représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$. Nous appellerons spineurs ces fonctions d'onde et nous allons maintenant établir la forme de ces spineurs. On a en outre montré ([8]) que les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ n'étaient pas équivalentes.

2. Vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$. — Nous allons calquer cette étude sur l'étude correspondante de l'approximation non relativiste ([1]). La question des vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ ou $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ a déjà été abordée dans une publication antérieure ([9]). Nous en étendrons ici les résultats en précisant certains points.

L'étude non relativiste a mis en évidence les points suivants :

a. la matrice représentation a pour lignes les éléments correspondants à la valeur de m';

b. de la matrice représentation on ne peut déduire de façon simple les vecteurs d'onde associés à la représentation;

c. les vecteurs d'onde sont constitués par des produits symétriques ou antisymétriques et homogènes de spineurs de rang 1;

d. pour les premières représentations on peut mettre en évidence les vecteurs d'onde :

spineurs à deux composantes pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

([9]) P. Hillion et J.-P. Vigier, *Elementary particle field and irreducible representations of the Lorentz group* (*Nucl. Phys.* vol. 16, nº 2, 1960, p. 360). En fait depuis la parution de ce travail dans *Nucl. Phys.*, on a montré que R_3^* était seulement localement isomorphe au groupe de Lorentz de sorte que tout ce qui y est écrit concerne R_3^*.

quadrivecteurs pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

tenseur antisymétrique self-dual pour $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$.

Par contre, le résultat est plus compliqué pour $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Remarquons en outre que les éléments de la matrice représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ sont donnés par la relation

$$V_{m_k, m_l}^{k, l} = \frac{(\varphi^1)^{k+m_k}(\varphi^2)^{k-m_k}}{\sqrt{(k+m_k)!\,(k-m_k)!}} \, \frac{(\varphi^{\dot 1})^{l+m_l}(\varphi^{\dot 2})^{l-m_l}}{\sqrt{(l+m_l)!\,(l-m_l)!}}.$$

On ne fera pas usage dans la suite de cette relation mais dans les cas les plus simples on explicitera la matrice représentation. On a montré que les représentations de ce groupe étaient unitaires.

2.1. Vecteurs d'onde associés a $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. — Dans l'espace vectoriel des fonctions $Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{m+, m-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ et $Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, m+, m'}(\omega^+, \omega^-)$, s' prenant la valeur $\frac{1}{2}$, m' prend les deux valeurs $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, il y a deux sous-espaces vectoriels de spineurs correspondants, le premier à $m' = \frac{1}{2}$, et le second à $m' = -\frac{1}{2}$. On a explicitement :

pour $m' = \frac{1}{2}$ les spineurs φ :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi^s &= \begin{bmatrix} Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, &\quad \varphi_{\dot r} &= \begin{bmatrix} -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, \\
\varphi_r &= \begin{bmatrix} -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, &\quad \varphi^{\dot s} &= \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix},
\end{aligned}\right.$$

pour $m' = -\frac{1}{2}$ les spineurs ψ :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi^s &= \begin{bmatrix} -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, &\quad \psi_{\dot r} &= \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, \\
\psi_r &= \begin{bmatrix} Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, &\quad \psi^{\dot s} &= \begin{bmatrix} -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

D'après la remarque faite précédemment, on déduit aisément de (15) et (16) les matrices représentations

$$\mathcal{D}\left(0,\tfrac{1}{2}\right)\ \{\varphi^-,\ \theta^-,\ \psi^-\} = \pm \begin{bmatrix} Z^{0,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) & Z^{0,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) \\ -Z^{0,\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) & Z^{0,-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}\left(\tfrac{1}{2},0\right)\ \{\varphi^+,\ \theta^+,\ \psi^+\} = \pm \begin{bmatrix} Z^{\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega.\ \omega^{-}) & Z^{-\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega.\ \omega^{-}) \\ -Z^{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) & Z^{-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}}({}^{+}\omega,\ \omega^{-}) \end{bmatrix},$$

Par ailleurs d'après les propriétés ([10]) de transformation des fonctions $Z^{m^+,m^-,m'}_{l^+,l^-,s'}(\omega^+,\ \omega^-)$ sous l'opération conjugaison de charge C, il est clair que si les spineurs φ correspondent à l'état particule, les spineurs ψ correspondent à l'état antiparticule.

Si l'on introduit les matrices

$$\varepsilon^{rs} = \varepsilon^{\dot r\dot s} = -\varepsilon_{rs} = -\varepsilon_{\dot r\dot s} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

on passe des spineurs covariants aux spineurs contravariants et *vice versa* par les relations

$$\varphi^s = \varepsilon^{sl}\varphi_r, \qquad \varphi_{\dot r} = \varepsilon_{\dot r\dot s}\varphi^{\dot s}, \qquad \ldots .$$

Comme pour l'approximation non relativiste, on peut passer des spineurs de rang 1 aux spineurs de rang supérieur par les relations

$$\Phi^{(l^+,\ l^-)}_{m^+,m^-} = \frac{(\varphi^1)^{l^++m^+}(\varphi^2)^{l^++m^-}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\varphi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\varphi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}},$$

$$\Psi^{(l^+,\ l^-)}_{m^+,m^-} = \frac{(\psi^1)^{l^++m^+}(\psi^2)^{l^+-m^+}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\psi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\psi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}}$$

et les combinaisons symétriques et antisymétriques

$$\begin{aligned} \chi^{(l^+,\ l^-)}_{m^+,m^-} = {} & \frac{(\psi^1)^{l^++m^+}(\psi^2)^{l^+-m^+}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\varphi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\varphi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}} \\ & + \frac{(\varphi^1)^{l^++m^+}(\varphi^2)^{l^+-m^+}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\psi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\psi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}}, \\ \Omega^{(l^+,\ l^-)}_{m^+,m^-} = {} & \frac{(\psi^1)^{l^++m^+}(\psi^2)^{l^+-m^+}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\varphi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\varphi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}} \\ & - \frac{(\varphi^1)^{l^++m^+}(\varphi^2)^{l^+-m^+}}{\sqrt{(l^++m^+)!\,(l^+-m^+)!}}\ \frac{(\psi^{\dot 1})^{l^-+m^-}(\psi^{\dot 2})^{l^--m^-}}{\sqrt{(l^-+m^-)!\,(l^--m^-)!}}. \end{aligned}$$

([10]) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 16, fasc., III, 1959, p. 217.

En adoptant la terminologie de Van der Waerden, on aura donc en plus pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ les spineurs

$$\chi_r, \quad \chi^{\dot{s}}, \qquad \chi^r, \quad \chi_{\dot{s}}; \tag{18}$$

$$\Omega^r, \quad \Omega_{\dot{s}}, \qquad \Omega_r, \quad \Omega^{\dot{s}}. \tag{19}$$

Ils correspondent aux spineurs de Majorana dans la théorie de Dirac car ils sont invariants sous l'opération conjugaison de charge. Nous noterons en plus, que d'après les propriétés de transformation des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(w^+, w^-)$ sous l'opération parité ([10]), si φ_r et ψ^r se transforment suivant $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\varphi_{\dot{s}}$ et $\psi^{\dot{s}}$ se transforment suivant $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2.2 Vecteurs d'onde associés a la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. — Quand $l^+ = l^- = \frac{1}{2}$, s' prend les deux valeurs 1 et 0 mais comme on le montrera ultérieurement les vecteurs d'onde correspondaut aux particules élémentaires sont ceux pour lesquels $s' = 0$. On examinera donc surtout ce cas particulier. Depuis que ce travail a été fait on a suggéré que $s' = 1$ puisse correspondre aux nouveaux isobares K^* récemment mis en évidence.

Remarquons d'abord que pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ on a affaire à des spineurs de second rang, donc si $s' = 1$, m' prenant les trois valeurs $1, 0, -1$, on aura à l'aide des formules du paragraphe précédent, les spineurs de second rang suivants .

$$\Phi_{r\dot{s}} = \varphi_r \varphi_{\dot{s}}, \quad m' = 1; \qquad \Psi_{r\dot{s}} = \psi_r \psi_{\dot{s}}, \quad m' = -1; \qquad \chi_{r\dot{s}} = \varphi_r \psi_{\dot{s}} + \varphi_{\dot{s}} \psi_r, \quad m' = 0.$$

Il est évident qu'à l'aide des matrices (17) on déduit immédiatement de $\Phi_{r\dot{s}}$, $\Phi^r{}_{\dot{s}}$, $\Phi^{r\dot{s}}$, $\Phi_r{}^{\dot{s}}$ et de façon analogue pour $\Psi_{r\dot{s}}$ et $\chi_{r\dot{s}}$.

Dans le cas $s' = 0$ les spineurs de second rang seront, m' prenant la valeur 0 :

$$\Omega_{r\dot{s}} = \varphi_r \psi_{\dot{s}} - \varphi_{\dot{s}} \psi_r$$

et naturellement :

$$\Omega^r{}_{\dot{s}}, \quad \Omega_r{}^{\dot{s}}, \quad \Omega^{r\dot{s}}.$$

Explicitant le spineur $\Omega^r{}_{\dot{s}}$, il vient

$$\Omega_{r\dot{s}} = \begin{bmatrix} \Omega^1{}_{\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) & \Omega^2{}_{\dot{1}} = Z^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \\ \Omega^1{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) & \Omega^2{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Il est alors possible de déterminer la matrice représentation $\mathcal{D}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\omega^+, \omega^-)$; dans les trois premières lignes se trouvent les fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}$ correspondant à $s' = 1$ et respectivement à $m' = 1, 0, -1$ et dans la quatrième ligne les composantes du spineur $\Omega^{r}{}_{\dot{s}}$:

$$\mathcal{D}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\omega^+, \omega^-)$$
$$= \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) & Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix},$$

Le problème consiste maintenant dans le cas $s' = 0$ auquel on se limite, de construire un quadrivecteur A_μ à partir du spineur de second rang $\Omega^{r}{}_{\dot{s}}$. On l'obtient par la relation

$$A_\mu = \frac{1}{2}\sigma_{\mu, r}{}^{\dot{s}}\,\Omega^{r}{}_{\dot{s}} \qquad (\mu \sim 1, 2, 3, 4), \tag{21}$$

où $\sigma_k \mid k \sim 1, 2, 3 \mid$ sont les matrices de Pauli, et

$$\sigma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour construire A_μ, on partirait aussi bien de $\Omega_{r\dot{s}}$ avec $\sigma_\mu{}^{r\dot{s}}$ ou de $\sigma^{r\dot{s}}$ avec $\sigma_{\mu, r\dot{s}}$.

On a [11]

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_{1,r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{2,r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \\ &\sigma_{3,r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{4,r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \end{aligned}\right. \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_{1,}{}^{r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{2,}{}^{r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \\ &\sigma_{3,}{}^{r\dot{s}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{4,}{}^{r\dot{s}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_{1,r}{}^{\dot{s}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{2,r}{}^{\dot{s}} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}, \\ &\sigma_{3,r}{}^{\dot{s}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{4,r}{}^{\dot{s}} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

([11]) *Cf.* par exemple : G. PETIAU, *J. Phys. Rad.*, t. 20, octobre 1959, p. 184.

La relation (21) devient alors :

$$A_\mu = \begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(\Omega^2{}_{\dot{2}} - \Omega^1{}_{\dot{1}}), \\[2ex] A^2 = \dfrac{i}{2}(\Omega^1{}_{\dot{1}} + \Omega^2{}_{\dot{2}}), \\[2ex] A_3 = \dfrac{1}{2}(\Omega^1{}_{\dot{2}} + \Omega^2{}_{\dot{1}}), \\[2ex] A_4 = \dfrac{i}{2}(\Omega^1{}_{\dot{2}} - \Omega^2{}_{\dot{1}}), \end{cases}$$

soit en tenant compte de (20) :

$$(25) \qquad A_\mu = \begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) - Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, {}^-\omega)\right), \\[2ex] A_2 = \dfrac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) + Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-)\right), \\[2ex] A_3 = \dfrac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) + Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-)\right), \\[2ex] A_4 = \dfrac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) - Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-)\right), \end{cases}$$

Comme on l'a déjà indiqué ([9]), A_μ est un quadrivecteur et non pas un pseudo-quadrivecteur.

Si l'on avait utilisé les spineurs correspondant à $s' = 1$, on aurait également construit trois vecteurs $B_\mu^{(m')}$ $(m' = 1, 0, -1)$,

2.3. Spineurs se transformant suivant les représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$. — Dans ce cas, s' prend une seule valeur $s' = 1$, donc m' prend les trois valeurs $1, -1, 0$ et l'on a affaire à des spineurs de second rang. Comme pour la représentation $\mathcal{D}(1)$ du groupe des rotations à l'approximation non relativiste, la valeur $m' = 0$ donne naissance à deux types de spineurs correspondant aux combinaisons symétriques et antisymétriques de produits de spineurs conjugués de charge des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

D'une façon explicite on aura les spineurs de second rang suivants :

$$(26) \qquad \begin{cases} \Phi^{rs} & \text{et} & \Phi_{\dot{r}\dot{s}} & \text{correspondants à} & m' = 1, \\ \Psi^{rs} & » & \Psi_{\dot{r}\dot{s}} & » & m' = -1, \\ \chi^{rs} & » & \chi_{\dot{r}\dot{s}} & » & m' = 0. \end{cases}$$

Comme à l'approximation non relativiste il apparaît immédiatement qu'on a

$$\chi^{12} = \chi^{21} = Z^{0,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-)$$
$$\chi_{\dot{1}2} = \chi_{\dot{2}1} = Z^{0,\,0,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-)$$

Comme précédemment à partir des matrices (17) on construirait les spineurs $\Phi^{\dot{r}}{}_{\dot{s}}$, $\Phi^{r}{}_{s}$, $\Phi_{\dot{r}\dot{s}}$, Φ_{rs}, et les analogues avec Ψ, χ, Ω.

Dans toute la suite de cette étude, ce fait sera sous-entendu qu'on peut abaisser ou élever les indices tensoriels à l'aide des matrices (17) et l'on ne donnera que l'une des représentations des spineurs.

Nous allons maintenant expliciter les spineurs (26) :

a. $m' = 1$:

$$(27) \qquad \varphi^{rs} = \begin{bmatrix} \varphi^{11} = Z^{0,\,1,\,1}_{0,\,1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \varphi^{21} = Z^{0,\;\;0,\,1}_{0,\;\;1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \varphi^{12} = Z^{0,\,0,\,1}_{0,\,1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \varphi^{22} = Z^{0,\,-1,\,1}_{0,\;\;1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix},$$

$$(28) \qquad \varphi_{\dot{r}s} = \begin{bmatrix} \varphi_{\dot{1}1} = Z^{1,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \varphi_{\dot{2}1} = Z^{0,\;\;0,\,1}_{1,\;\;0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \varphi_{\dot{1}2} = Z^{0,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \varphi_{\dot{2}2} = Z^{-1,\;\;0,\,1}_{\;\;1,\;\;0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix}.$$

b. $m' = -1$:

$$(29) \qquad \psi^{rs} = \begin{bmatrix} \psi^{11} = Z^{0,\,1,\,-1}_{0,\,1,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) & \psi^{21} = Z^{0,\;\;0,\,-1}_{0,\;\;1,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \psi^{12} = Z^{0,\,0,\,-1}_{0,\,1,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) & \psi^{22} = Z^{0,\,-1,\,-1}_{0,\;\;1,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix},$$

$$(30) \qquad \psi_{\dot{r}s} = \begin{bmatrix} \psi_{\dot{1}1} = Z^{1,\,0,\,-1}_{1,\,0,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) & \psi_{\dot{2}1} = Z^{0,\;\;0,\,-1}_{1,\;\;0,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \psi_{\dot{1}2} = Z^{0,\,0,\,-1}_{1,\,0,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) & \psi_{\dot{2}2} = Z^{-1,\;\;0,\,-1}_{\;\;1,\;\;0,\;\;\;1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix};$$

c. $m' = 0$:

$$(31) \qquad \chi^{rs} = \begin{bmatrix} \chi^{11} = Z^{0,\,1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi^{21} = Z^{0,\;\;0,\,0}_{0,\;\;1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \chi^{12} = Z^{0,\,0,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi^{22} = Z^{0,\,-1,\,0}_{0,\;\;1,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix},$$

$$(32) \qquad \chi_{\dot{r}s} = \begin{bmatrix} \chi_{\dot{1}1} = Z^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi_{\dot{1}2} = Z^{0,\;\;0,\,0}_{1,\;\;0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \chi_{\dot{1}2} = Z^{0,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi_{\dot{2}2} = Z^{-1,\;\;0,\,0}_{\;\;1,\;\;0,\,1}(\omega^+,\,\omega^-) \end{bmatrix};$$

A partir de ces spineurs on peut former à l'aide des matrices (22), (23), (24), les tenseurs antisymétriques suivants :

$$(33\,a) \qquad \begin{cases} F^{(1)}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu,}{}^{\dot{r}}{}_{s}\,\sigma_{\nu,\dot{r}t}\,\Phi^{st} + \sigma_{\mu,r}{}^{\dot{s}}\,\sigma_{\nu,}{}^{r\dot{t}}\,\Phi_{\dot{s}\dot{t}}\right), \\[2ex] F^{(-1)}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu,}{}^{\dot{r}}{}_{s}\,\sigma_{\nu,\dot{r}t}\,\Psi^{st} + \sigma_{\mu,r}{}^{\dot{s}}\,\sigma_{\nu,}{}^{r\dot{t}}\,\Psi_{\dot{s}\dot{t}}\right), \\[2ex] F^{(0)}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu,}{}^{\dot{r}}{}_{s}\,\sigma_{\nu,\dot{r}t}\,\chi^{st} + \sigma_{\mu,r}{}^{\dot{s}}\,\sigma_{\nu,}{}^{r\dot{t}}\,\chi_{\dot{s}\dot{t}}\right), \\[2ex] F'^{(0)}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu,}{}^{\dot{r}}{}_{s}\,\sigma_{\nu,\dot{r}t}\,\Omega^{st} + \sigma_{\mu,r}{}^{\dot{s}}\,\sigma_{\nu,}{}^{r\dot{t}}\,\Omega_{\dot{s}\dot{t}}\right); \end{cases}$$

on voit immédiatement que ces relations s'écrivent

$$(33\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} F^{(1)}_{\mu\nu} &= F^{(1)+}_{\mu\nu} + F^{(1)-}_{\mu\nu}, \\ F^{(0)}_{\mu\nu} &= F^{(0)+}_{\mu\nu} + F^{(0)-}_{\mu\nu}, \\ F^{(-1)}_{\mu\nu} &= F^{(-1)+}_{\mu\nu} + F^{(-1)-}_{\mu\nu}, \\ F'^{(0)}_{\mu\nu} &= F'^{(0)+}_{\mu\nu} + F'^{(0)-}_{\mu\nu}, \end{aligned}\right.$$

où $F^{m'+}_{\mu\nu}$ satisfait à la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ et $F^{m'-}_{\mu\nu}$ à $\mathcal{D}(0, 1)$. A cause des propriétés des matrices (22), (23), (24), on constate aisément que ces tenseurs antisymétriques sont self-duaux. On pourra donc ne garder que les composantes d'espace $F^{m'+}_{ij}$ et $F^{m'-}_{ij}$.

On écrit immédiatement les matrices représentations

$$\mathcal{D}^{(1,0)}(\varphi^+, \theta^+, \psi^+) = \pm \begin{bmatrix} Z^{1,0,1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{-1,0,1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,0}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{-1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{1,0,1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,-1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{-1,0,-1}_{1,0,1}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}^{(0,1)}(\varphi^+, \theta^-, \psi^-) = \pm \begin{bmatrix} Z^{0,1,1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,-1,1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{0,1,0}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,0}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,-1,0}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) \\ Z^{0,1,-1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,0,-1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) & Z^{0,-1,-1}_{0,1,1}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}.$$

2.4. Vecteurs d'onde associés a la représentation $\mathcal{D}(1, 1)$. — Pour $l^+ = l^- - 1$, s' prend les trois valeurs 2, 1, 0; on a affaire à des spineurs de rang 4 qu'on peut classer de la façon suivante :

a. $s' = 2$: m' prend les valeurs 2, 1, 0, — 1, — 2, on aura les spineurs des types ci-dessous :

$\Phi^r{}_{\dot s}\Phi^t{}_{\dot u}$	correspondant à	$m' = 2$,
$\Phi^r{}_{\dot s}\,\chi^t{}_{\dot u}$	»	$m' = 1$,
$\chi^r{}_{\dot s}\,\chi^t{}_{\dot u}$	»	$m' = 0$,
$\Psi^r{}_{\dot s}\,\chi^t{}_{\dot u}$	»	$m' = -1$,
$\Psi^r{}_{\dot s}\Psi^t{}_{\dot u}$	»	$m' = -2$.

b. $s' = 1$: m' prend les valeurs 1, 0, — 1, on a

$\Phi^r{}_{\dot s}\,\Omega^t{}_{\dot u}$	correspondant à	$m' = 1$,
$\chi^r{}_{\dot s}\,\Omega^t{}_{\dot u}$	»	$m' = 0$,
$\Psi^r{}_{\dot s}\,\Omega^t{}_{\dot u}$	»	$m' = -1$.

c. $s' = 0$: m' prend la seule valeur 0; on a le spineur de rang 4 :

$$\Omega'^{rs}{}_{\dot t\dot u} = \Omega^r{}_{\dot s}\Omega^t{}_{\dot u}.$$

D'une façon explicite il s'écrit

$$
(34)\quad \Omega^{rs}{}_{t\dot u}
= \begin{bmatrix}
\begin{matrix}\Omega^{11}{}_{1\dot 1}\\ = Z\,{}^{1,\,1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{12}{}_{1\dot 1}\\ = Z\,{}^{1,\,0,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{21}{}_{1\dot 1}\\ = Z\,{}^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{22}{}_{1\dot 1}\\ = Z\,{}^{1,\,-1,\,0}_{1,\,-1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} \\
\begin{matrix}\Omega^{11}{}_{1\dot 2}\\ = Z\,{}^{0,\,1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{12}{}_{1\dot 2}\\ = Z\,{}^{0,\,0,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{21}{}_{1\dot 2}\\ = Z\,{}^{0,\,0,\,0}_{1,\,0,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{22}{}_{1\dot 2}\\ = Z\,{}^{0,\,-1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} \\
\begin{matrix}\Omega^{11}{}_{2\dot 1}\\ = Z\,{}^{0,\,1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{12}{}_{2\dot 1}\\ = Z\,{}^{0,\,0,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{21}{}_{2\dot 1}\\ = Z\,{}^{0,\,0,\,0}_{1,\,0,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{22}{}_{2\dot 1}\\ = Z\,{}^{0,\,-1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} \\
\begin{matrix}\Omega^{11}{}_{2\dot 2}\\ = Z^{-}\,{}^{1,\,1,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{12}{}_{2\dot 2}\\ = Z^{-}\,{}^{1,\,0,\,0}_{1,\,1,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{21}{}_{2\dot 2}\\ = Z^{-}\,{}^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix} &
\begin{matrix}\Omega^{22}{}_{2\dot 2}\\ = Z^{-}\,{}^{1,\,-1,\,0}_{1,\,0,\,0}(\omega^+,\omega^-)\end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

En élevant et abaissant les indices de ce spineur on pourrait construire au total neuf spineurs de rang 4.

Avec le spineur de quatrième rang $\Omega^{rs}{}_{t\dot u}$, on forme à l'aide des matrices (22), (23), 24) le tenseur symétrique

$$
(35)\qquad G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu,r}{}^{\dot s}\,\sigma_{\nu,t}{}^{\dot u}\,\Omega^{rs}{}_{t\dot u}.
$$

Il est facile de constater à cause des propriétés de ces matrices que $G_{\mu\nu}$ a sa trace nulle.

A la lumière des résultats obtenus dans les paragraphes précédents, on formerait d'une façon évidente la matrice représentation qui est une matrice 9×9.

2.5. Spineurs se transformant suivant les représentations $\mathcal{D}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2},1\right)$. — Dans ces conditions, s' prend les deux valeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$, mais on a montré ([5]) que les structures des baryons correspondaient à la valeur $s' = \frac{1}{2}$, c'est le seul cas que nous expliciterons ici. Depuis que ce travail a été écrit on a suggéré que $s' = \frac{3}{2}$ puisse correspondre aux isobares Y^*, Λ^* récemment découverts On remarquera que les spineurs sont ici de rang 3. Ces spineurs peuvent être considérés comme obtenus par le produit des spineurs de rang 1 : $\varphi^r, \varphi_{\dot s}, \psi_r, \psi^{\dot s}$, et des spineurs de rang 2 : $\Phi^r{}_{\dot s}$, $\Psi^r{}_{\dot s}$, $\chi^r{}_{\dot s}$, $\Omega^r{}_{\dot s}$.

On a la classification suivante :

a. $s' = \frac{3}{2}$: m' prend les valeurs $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, on a les spineurs du type :

$$\begin{array}{llll}
\Phi^r \Phi^s{}_t & \text{et} \quad \Phi_{\dot r} \Phi_{\dot s}{}^t & \text{correspondant à} & m' = \frac{3}{2}, \\
\Phi^r \chi^s{}_t & \text{»} \quad \Phi_{\dot r} \Phi_{\dot s}{}^t & \text{»} & m' = \frac{1}{2}, \\
\Psi^r \chi^s{}_t & \text{»} \quad \Psi_{\dot r} \chi_{\dot s}{}^t & \text{»} & m' = -\frac{1}{2}, \\
\Psi^r \Psi^s{}_t & \text{»} \quad \Psi_{\dot r} \Psi_{\dot s}{}^t & \text{»} & m' = -\frac{3}{2}.
\end{array}$$

b. $s' = \frac{1}{2}$: m' prend les valeurs $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, on a

$$(36) \qquad \Phi^{rs}{}_t = \Phi^r \Omega^s{}_t \quad \text{et} \quad \Phi_{\dot r \dot s}{}^l = \Phi_{\dot r} \Omega_{\dot s}{}^l \quad \text{correspondant à} \quad m' = \frac{1}{2},$$

$$(37) \qquad \Psi^{rs}{}_t = \Psi^r \Omega^s{}_t \quad \text{»} \quad \Psi_{\dot r \dot s}{}^t = \Psi_{\dot r} \Omega_{\dot s}{}^t \quad \text{»} \quad m' = -\frac{1}{2};$$

nous allons expliciter les relations (36) et (37) :

$$(38) \qquad \Phi^{rs}{}_t = \begin{bmatrix}
\Phi^{11}{}_{\dot 1} = Z^{\frac{1}{1},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi^{11}{}_{\dot 2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^-, \omega^-) \\
\Phi^{12}{}_{\dot 1} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi^{12}{}_{\dot 2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}({}^+\omega, \omega^-) \\
\Phi^{21}{}_{\dot 1} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi^{21}{}_{\dot 2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\
\Phi^{22}{}_{\dot 1} = Z^{\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi^{22}{}_{\dot 2} = Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)
\end{bmatrix}.$$

On peut élever et abaisser les indices à l'aide des matrices (17) et l'on obtiendrait les spineurs

$$\Phi^r{}_{st}, \quad \Phi_{rst}, \quad \Phi_{rs}{}^t, \quad \Phi_r{}^{st}, \quad \Phi^{rst}$$

de la même façon :

$$(39) \qquad \Phi_{\dot r \dot s}{}^t = \begin{bmatrix}
\Phi_{\dot 1 \dot 1}{}^1 = Z^{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi_{\dot 1 \dot 1}{}^2 = Z^{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\
\Phi_{\dot 1 \dot 2}{}^1 = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi_{\dot 1 \dot 2}{}^2 = Z^{0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\
\Phi_{\dot 2 \dot 1}{}^1 = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) & \Phi_{\dot 2 \dot 1}{}^2 = Z^{0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega_-) \\
\Phi_{\dot 2 \dot 2}{}^1 = Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, -\omega) & \Phi_{\dot 2 \dot 2}{}^2 = Z^{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-)
\end{bmatrix},$$

pour $m' = -\frac{1}{2}$, il vient

$$(40)\quad \Psi'^{rs}{}_{i} = \begin{bmatrix} \Psi'^{11}{}_{1} = Z^{\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'^{11}{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'^{12}{}_{1} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'^{12}{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'^{21}{}_{1} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'^{21}{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'^{22}{}_{1} = Z^{\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'^{22}{}_{\dot{2}} = Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \end{bmatrix},$$

$$(41)\quad \Psi'_{\dot{r}\dot{s}}{}^{t} = \begin{bmatrix} \Psi'_{11}{}^{1} = Z^{1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'_{11}{}^{2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'_{1\dot{2}}{}^{1} = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'_{1\dot{2}}{}^{2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'_{\dot{2}1}{}^{1} - Z^{0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'_{\dot{2}1}{}^{2} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ \Psi'_{\dot{2}\dot{2}}{}^{1} = Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) & \Psi'_{\dot{2}\dot{2}}{}^{2} = Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \end{bmatrix}.$$

Si l'on suivait le formalisme de Rarita-Schwinger ([1]) on serait amené à définir à l'aide des matrices (22), (23), (24), des spineurs à deux composantes où chaque composante est un quadrivecteur au lieu d'être un scalaire comme dans le cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

On aurait ainsi

$$\Phi^{r}{}_{,\mu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu,t}{}^{\dot{u}}\Phi^{rt}{}_{\dot{u}}, \qquad \Phi_{\dot{s},\mu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu,u}{}^{\dot{t}}\Phi_{\dot{s}\dot{t}}{}^{u}$$

et d'une façon analogue :

$$\Psi'^{r}{}_{,\mu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu,t}{}^{\dot{u}}\Psi'^{rt}{}_{\dot{u}}, \qquad \Psi'_{\dot{s},\mu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu,u}{}^{\dot{t}}\Psi'_{\dot{s}\dot{t}}{}^{u}.$$

Mais il faut remarquer que μ prenant quatre valeurs et r deux, on a pour $\Phi^{r}{}_{,\mu}$ huit composantes alors qu'on a seulement six composantes indépendantes $\Phi^{rt}{}_{\dot{u}}$. Il est donc évident que l'utilisation de ce formalisme conduira à des difficultés ultérieures. Il serait préférable, si l'on voulait garder le point de vue de Rarita-Schwinger d'utiliser des tenseurs antisymétriques donnés par les expressions

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu,r}{}^{\dot{u}}\sigma_{\nu,\dot{u}\dot{s}}\Phi^{rs}{}_{\dot{t}}, \qquad \frac{1}{2}\sigma_{\mu,}{}^{\dot{r}}{}_{u}\sigma_{\nu,}{}^{u\dot{s}}\Phi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{t}.$$

([12]) *Cf.* par exemple : H. UMEZAWA, *Quantum field theory*, North. Holl. Publ. Co.

A cause des propriétés des matrices (22), (23), (24), il est facile de voir que ces tenseurs sont antisymétriques self-duaux. Pour leurs composantes d'espace, on a

$$
(42)\qquad \left.\begin{cases} \Phi^{r}{}_{,ij} = \dfrac{1}{2}\sigma_{i,}{}^{\dot{t}u}\sigma_{j,u}{}^{\dot{s}}\Phi_{\dot{t}\dot{s}}{}^{r} & (r \sim 1,\ 2) \\ \Phi_{\dot{s},ij} = \dfrac{1}{2}\sigma_{i,r}{}^{\dot{u}}\sigma_{j,\dot{u}t}\Phi^{rt}{}_{\dot{s}} & (\dot{s} \sim 1,\ 2) \end{cases}\right\} \quad (i, j \sim 1,\ 2,\ 3),
$$

On aurait évidemment une définition analogue de $\Psi^{r}{}_{,ij}$ et $\Psi_{\dot{s},ij}$. Dans ce formalisme, $\Phi^{r}{}_{,ij}$ comprend six composantes, ce qui de ce point de vue est satisfaisant :

D'une façon explicite, on aurait

$$
(43)\qquad \left[\begin{array}{ll}
\Phi^{1}{}_{,12} = Z^{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{1}{}_{,23} = \dfrac{i}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) - Z^{\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right) \\
\Phi^{2}{}_{,12} = Z^{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi^{2}{}_{,23} = \dfrac{i}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right) \\
\Phi_{\dot{1},12} = Z^{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{\dot{1},23} = \dfrac{i}{2}\left(Z^{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) - Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right) \\
\Phi_{\dot{1},12} = Z^{0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \Phi_{\dot{2},23} = \dfrac{i}{2}\left(Z^{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) - Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right) \\
\multicolumn{2}{c}{\Phi^{1}{}_{,31} = \dfrac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) + Z^{\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right)} \\
\multicolumn{2}{c}{\Phi^{2}{}_{,31} = \dfrac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) + Z^{-\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right)} \\
\multicolumn{2}{c}{\Phi_{\dot{1},31} = \dfrac{1}{2}\left(Z^{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) + Z^{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right)} \\
\multicolumn{2}{c}{\Psi_{\dot{2},31} = \dfrac{1}{2}\left(Z^{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-}) + Z^{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(\omega^{+}, \omega^{-})\right)}
\end{array}\right].
$$

Ces spineurs ont les propriétés suivantes : d'après les propriétés de transformations des fonctions $Z^{m+,\ m-,\ m,}_{l+,\ l-,\ s'}(\omega^{+}, \omega^{-})$ sous les opérations C et P, on déduit que si $\Phi^{r}{}_{,ij}$ et $\Phi_{\dot{s},ij}$ sont les spineurs attachés à l'état particule, $\Psi^{r}{}_{,ij}$ et $\Psi_{\dot{s},ij}$ sont les spineurs attachés à l'état antiparticule et que si $\Phi^{r}{}_{,ij}$ et $\Psi^{r}{}_{,ij}$ se transforment suivant la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\Phi_{\dot{s},ij}$ et $\Psi_{\dot{s},ij}$ se transforment suivant la représentation $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Dans la suite du travail, nous ne ferons aucune hypothèse sur la forme des vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1,\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$; nous étudierons cette question ultérieurement.

On peut facilement expliciter les matrices représentations $\mathcal{D}^{(1,\frac{1}{2})}(\omega^+,\omega^-)$ et $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2},1)}(\omega^+,\omega^-)$. Ce seront des matrices 6×6 dont les quatre premières lignes correspondent à la valeur $s'=\frac{3}{2}$ respectivement $m'=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, et les deux dernières lignes à $s'=\frac{1}{2}$ et $m'=\pm\frac{1}{2}$.

Explicitant ces matrices, il vient

(*Voir* Formule page 170).

A partir de cette matrice on déduit immédiatement la matrice $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2},1)}(\omega^+,\omega^-)$.

Spineurs se transformant suivant les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$. — Comme le montrent les exemples particuliers précédents traités en détails à cause de leur intérêt dans la theorie des particules élémentaires on voit qu'il est nécessaire de distinguer les deux cas $l^+ + l^-$ entier et $l^+ + l^-$ demi-entier.

a. Cas $l^+ + l^-$ entier. — On a étudié dans les paragraphes précédents trois exemples de ce cas correspondant aux représentations

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathcal{D}(1, 0) \text{ et } \mathcal{D}(0, 1), \quad \mathcal{D}(1, 1),$$

la généralisation peut se faire de la façon suivante :

Pour $l^+ + l^-$ entier on aura affaire à des spineurs de rang pair $2(l^+ + l^-)$ de la forme

$$_{s'}\Phi^{r_1\ldots r_{2l^+}}{}_{\dot s_1\ldots \dot s_{2l^-}} \quad \text{et} \quad _{s'}\Phi_{\dot r_1\ldots \dot r_{2l^+}}{}^{s_1\ldots s_{2l^-}},$$

où l'indice s' à gauche de Φ indique qu'il y a autant de types de spineurs possibles qu'il y a de valeurs de s' et m'. Avec ces spineurs de rang pair il est possible de construire des tenseurs de rang $l^+ + l^-$.

Nous supposerons $l^+ \geqq l^-$ et nous envisagerons les deux possibilités

$$l^+ = l^- \qquad l^+ = l^- + 1.$$

Si $l^+ = l^- = l$ on considérera les tenseurs symétriques

$$\mathrm{T}^{(s',m')}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{l^+ + l^-}} = \prod_{i=1}^{2l}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu_i, r_i}{}^{\dot s_i}\right){}_{s'}\Phi^{r_1\ldots r_{2l}}{}_{\dot s_1\ldots\dot s_{2l}}, \tag{44}$$

$$
\mathcal{D}^{\left(1,\frac{1}{2}\right)}(\omega^+,\omega^-)=\left[\begin{array}{cccccc}
Z^{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\
Z^{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega_-) & Z^{1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) & Z^{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-)
\end{array}\right].
$$

où les matrices $\sigma_{\mu,r}{}^{\dot{s}}$ sont données par les expressions (22), (23), (24); avec les spineurs ${}_{s'}\Phi_{\dot{r}_1\ldots\dot{r}_{2l}}{}^{s_1\ldots s_{2l}}$ ont aboutirait aux mêmes tenseurs (44).

Considérons maintenant le cas où $l^+ = l^- + 1$, on aura alors les spineurs

$$ {}_{s'}\Phi^{lu, r_1\ldots r_{2l^-}}{}_{\dot{s}_1\ldots\dot{s}_{2l^-}} \quad \text{et} \quad {}_{s'}\Phi_{l\dot{u};\dot{r}_1\ldots\dot{r}_{2l^-}}{}^{s_1\ldots s_{2l^-}}. $$

D'où l'on déduit les tenseurs symétriques en μ_i et antisymétriques en ν et σ :

$$ (45)\quad \mathrm{T}^{(s',m')}_{\mu_1\ldots\mu_{2l^-},\nu,\sigma} = \prod_{i=1}^{2l^-} \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu_i, r_i}{}^{\dot{s}_i} \right) $$
$$ \times \left(\sigma_{\nu,\, l}{}^{\dot{\nu}} \sigma_{\sigma,\, \dot{\nu} u}\; {}_{s'}\Phi^{lu, r_1\ldots r_{2l^-}}{}_{\dot{s}_1\ldots\dot{s}_{2l^-}} + \rho_{\nu,}{}^{l}{}_{\nu} \sigma_{\sigma,}{}^{\nu\dot{u}}\; {}_{s'}\Phi_{l\dot{u},\dot{r}_1\ldots\dot{r}_{2l^-}}{}^{s_1\ldots s_{2l^-}} \right). $$

Il est difficile d'étendre les résultats précédents au cas absolument général $l^+ + l^-$ entier où la différence entre l^+ et l^- est supérieure à 1. Nous nous limiterons donc aux résultats obtenus dans ce paragraphe.

b. Cas $l^+ + l^-$ demi-entier. — Nous nous limiterons ici au cas où $|l^+ - l^-| = \frac{1}{2}$, on a déjà étudié les deux ensembles de spineurs correspondant aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Pour l^+ et l^- entiers ou demi-entiers quelconques mais astreints à ne différer que d'une valeur égale à $\frac{1}{2}$, on aura des spineurs de rang impair $2(l^+ + l^-)$ du type

$$ {}_{s'}\Phi^{r,\, t_1\ldots t_l}{}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_l} \quad \text{et} \quad {}_{s'}\Phi_{\dot{s}.}{}^{t_1\ldots t_l}{}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_l}. $$

On pourrait comme dans le formalisme de Rarita-Schwinger introduire des spineurs à deux composantes mais dont les composantes sont des tenseurs de rang $2(l^+ + l^-) - \frac{1}{2}$. Ces spineurs sont définis par les relations

$$ \Phi^{r}_{\mu_1\ldots\mu_l} = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu_i, t_i}{}^{\dot{u}_i} \right) \Phi^{r,\, t_1\ldots t_l}{}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_l}, $$
$$ \Phi_{\dot{s},\mu_1\ldots\mu_l} = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu_i, t_i}{}^{\dot{u}_i} \right) \Phi_{\dot{s},}{}^{t_1\ldots t_l}{}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_l}. $$

Mais on a vu que dans le cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ceci amenait des difficultés en introduisant un nombre de composantes $\Phi^{r}_{\mu_1\ldots\mu_l}$ supérieur au nombre de spineurs $\Phi^{r,\, t_1\ldots t_l}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_l}$ indépendants.

Réécrivons les spineurs précédents sous la forme

$$_{s'}\Phi^{rs}{}_{l,\dot{\nu}_1\ldots\dot{\nu}_{l-1}}^{u_1\ldots u_{l-1}} \quad \text{et} \quad _{s'}\Phi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{l,u_1\ldots u_{l-1}}_{\dot{\nu}_1\ldots\dot{\nu}_{l-1}}.$$

Il vaudrait mieux introduire alors des spineurs à deux composantes dont les composantes sont symétriques en $\mu_1\ldots\mu_{l-1}$ et antisymétriques en ρ et ν, ces spineurs sont définis par les relations

$$(46)\quad \begin{cases} {}_{s'}\Phi^{l}_{\mu_1\ldots\mu_{l-1},\nu,\rho} = \prod_{i=1}^{l-1}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu_i,u_i}{}^{\dot{\nu}_i}\right)\sigma_{\nu,}{}^{\dot{r}}{}_{w}\sigma_{\rho,}{}^{w\dot{s}}\;{}_{s'}\Phi_{\dot{r}\dot{s}}{}^{l,u_1\ldots u_{l-1}}_{\dot{\nu}_1\ldots\dot{\nu}_{l-1}}, \\ {}_{s'}\Phi_{l,\mu_1\ldots\mu_{l-1},\nu,\rho} = \prod_{i=1}^{l-1}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu_i,u_i}{}^{\dot{\nu}_i}\right)\sigma_{\nu,r}{}^{\dot{w}}\sigma_{\rho,\dot{w}s}\;{}_{s'}\Phi^{rs}{}_{l,\dot{\nu}_1\ldots\dot{\nu}_{l-1}}^{u_1\ldots u_{l-1}}. \end{cases}$$

Nous remarquerons que ce formalisme présente les mêmes objections que celles qu'on a développées dans le cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. En outre il ne se laisse pas généraliser aux cas où l^+ et l^- diffèrent d'un demi-entier supérieur à $\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette étude on recherchera automatiquement à assimiler les solutions des équations d'onde aux spineurs de rang $2n+1$ ou aux spineurs de rang $2n$ (et les tenseurs qu'on en déduit comme il a été indiqué) donnés dans ce paragraphe sauf pour des représentations simples comme $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ou $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$ où le résultat est immédiat.

Dans des études ultérieures on cherchera systématiquement les solutions des équations d'onde qu'on va maintenant établir en fonction des spineurs dont on a donné les expressions explicitées dans ce paragraphe.

3. Équations d'ondes invariantes sous le groupe des rotations complexes. — Rappelons le problème qu'on désire résoudre :

Étant donné l'équation du second ordre :

$$(47)\qquad (J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)\varphi = 0$$

satisfaite par les fonctions $\varphi(\omega^+, \omega^-)$, on cherche l'équation des vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations complexes conjuguées.

La façon dont on a établi cette équation montre que si ces vecteurs d'onde sont constitués avec les fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$, l'équation précédente est séparable et se ramène au système

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\varphi = 0, \qquad (J_k^- J_k^- \chi_\beta^2)\varphi = 0, \tag{48}$$

avec

$$\chi^2 = \chi_\alpha^2 + \chi_\beta^2,$$

on peut penser qu'il existe une équation plus générale non séparable où satisfait à l'équation (47) mais non séparément aux équations (48).

Dans la suite de ce papier nous envisagerons uniquement la seule possibilité où l'équation (47) est séparable : on aura en outre à distinguer deux éventualités : lorsque $l^+ + l^-$ est entier, le vecteur d'onde est un tenseur, lorsque $l^+ + l^-$ est demi-entier le vecteur d'onde est un spineur dont nous discuterons un peu plus loin le nombre de composantes.

3.1. *Cas $l^+ + l^-$ entier.* — Nous désignerons d'une façon générale par T_μ les vecteurs d'onde appartenant à ces représentations pour indiquer le caractère tensoriel de ces ondes et où μ désigne un ensemble d'indices tensoriels $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Dans le cas où l'équation (47) est séparable, on a les deux équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)T_\mu = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)T_\mu = 0 \tag{49}$$

et dans le cas où elle n'est pas séparable :

$$(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)T_\mu = 0. \tag{50}$$

Comme application particulièrement simple, on peut examiner le cas des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$, où l'on a les tenseurs antisymétriques self-duaux $F_{ij}^{m'+}$ et $F_{ij}^{m'-}$, les premiers satisfaisant à la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ et les seconds à la représentation $\mathcal{D}(0, 1)$.

Dans ces conditions l'équation (47) est séparable et comme $\chi'_\alpha = 0$, $\chi'_\beta = \chi^2$, ou inversement, on aboutit immédiatement aux équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi^2)F_{ij}^{m'+} = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi^2)F_{ij}^{m'-} = 0 \qquad (i, j \sim 1, 2, 3).$$

3.2. *Cas $l^+ + l^-$ demi-entier égal à $\frac{1}{2}$.* — A cause de son importance et sa simplicité, nous commencerons par traiter le cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, en résumant d'abord les résultats auxquels nous sommes parvenus concernant le substratum de cette représentation :

On a trouvé deux ensembles de spineurs d'une part φ^r et $\varphi_{\dot{s}}$ et d'autre part ψ^r et $\psi_{\dot{s}}$. Des études antérieures ont montré que ces deux ensembles étaient conjugués de charge l'un de l'autre et comme conséquence des propriétés d'invariance de l'équation (12) il en ressort qu'ils sont solutions de la même équation. Il suffit donc de porter son attention sur φ^r et $\varphi_{\dot{s}}$.

Par ailleurs φ^r et $\varphi_{\dot{s}}$ se déduisent l'un de l'autre par l'opération parité P,

$$\varphi_{\dot{s}} = \mathrm{P}\varphi^r,$$

on en déduit que φ^r ne dépend que de ω^+ et $\varphi_{\dot{s}}$ de ω^-, on écrira donc $\varphi^r(\omega^+)$ et $\varphi_{\dot{s}}(\omega^-)$.

Avec $\varphi^r(\omega^+)$ et $\varphi_{\dot{s}}(\omega^-)$, on peut construire deux spineurs à quatre composantes analogues aux spineurs de Dirac :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^r(\omega^+) \\ \varphi_{\dot{s}}(\omega^-) \end{pmatrix}, \qquad \Phi' = \begin{pmatrix} \varphi_{\dot{s}}(\omega^-) \\ -\varphi^r(\omega^+) \end{pmatrix}.$$

La première question qu'on peut se poser est de savoir s'il faut utiliser des spineurs à quatre composantes ou des spineurs à deux composantes. Comme le font remarquer Feynmann et Gell-Mann ([13]) le seul argument d'ailleurs contestable, avancé habituellement pour l'emploi d'un spineur à quatre composantes est la nécessité d'avoir deux composantes pour décrire le spin de l'électron et deux composantes pour représenter l'état positron. Or quelle que soit la valeur de cet argument, il n'a aucune signification dans une théorie invariante sous le groupe des rotations complexes puisqu'on dispose de deux types de spineurs différents φ et ψ pour les états particule et antiparticule. On peut poser la question sous une forme différente : faut-il chercher une équation d'onde invariante sous le groupe R_3^* étendu (avec l'automorphisme P) ou sous le groupe R_3^* complet (avec les transformations à déterminant négatif) ?

Si l'on veut des fonctions d'onde extraites des représentations du paragraphe précédent il faut alors nécessairement utiliser des spineurs à deux composantes de telle sorte qu'on ait à développer une théorie analogue à celle de Feynmann-Gell-Mann et non à celle de Dirac. C'est

([13]) R. P. Feynmann et M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, vol. 109, 1958, p. 193.

d'ailleurs un résultat que Leruste ([14]) a atteint indépendamment et d'une autre façon.

Mais dans la théorie de Feynmann-Gell-Mann ou dans celle de Leruste interviennent des interactions qui détruisent l'invariance sous l'opération parité. Dans notre cas, où pour l'instant nous n'envisageons pas d'interactions, il sera commode comme nous allons le voir, d'utiliser des spineurs à quatre composantes bien que l'équation à laquelle satisfont ces spineurs ne soit pas l'analogue de l'équation de Dirac. Comme dans le cas des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$, l'équation (47) est toujours dans ce cas séparable.

Si l'on revient aux spineurs $\varphi^r(\omega^+)$ et $\varphi_{\dot{s}}(\omega^-)$ l'équation (12) entraîne qu'ils satisfont aux équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi^2)\varphi^r(\omega^+) = 0 \qquad (r \sim 1, 2), \tag{51}$$

$$(J_k^- J_k^- - \chi^2)\varphi_{\dot{s}}(\omega^-) = 0 \qquad (\dot{s} \sim 1, 2). \tag{52}$$

Nous allons montrer qu'on passe de l'une des deux équations précédentes à l'autre par l'opération parité. On sait déjà qu'on a

$$\varphi_{\dot{s}}(\omega^-) = P\varphi^r(\omega^+). \tag{53}$$

En outre on a les relations ([7])

$$J_k^+ = P^{-1} J_k^- P, \qquad J_k^- = P^{-1} J_k^+ P;$$

d'où l'on déduit

$$J_k^+ J_k^+ = P^{-1} J_k^- J_k^- P, \tag{54}$$

$$J_k^- J_k^- = P^{-1} J_k^+ J_k^+ P. \tag{55}$$

Remplaçons dans (51), $J_k^+ J_k^+$ par sa valeur tirée de (54) :

$$(P^{-1} J_k^- J_k^- P - \chi^2)\varphi^r(\omega^+) = 0,$$

multiplions cette expression à gauche par P en tenant compte de (53) :

$$(J_k^- J_k^- - \chi^2)\varphi_{\dot{s}}(\omega^-) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (52).

Considérons alors le spineur à quatre composantes :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1(\omega^+) \\ \varphi^2(\omega^+) \\ \varphi_{\dot{1}}(\omega^-) \\ \varphi_{\dot{2}}(\omega^-) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

([14]) P. Leruste, *C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 2296.

on peut écrire les deux équations (51) et (52) sous la forme

$$(57)\qquad \left\{ J_k^+ J_k^+ \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + J_k^- J_k^- \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} - \chi^2 \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \right\} \Phi = 0,$$

mais comme dans le cas non relativiste il est possible de linéariser cette équation.

Introduisons les scalaires

$$(58)\qquad \chi_1 = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi^2 + \frac{\hbar^2}{4}},$$

$$(59)\qquad \chi_2 = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi^2 + \frac{\hbar^2}{4}},$$

on peut remplacer (51) et (52) par l'ensemble des équations

$$(60)\qquad (\sigma_k J_k^+ - \chi_1) \begin{pmatrix} \varphi^1(\omega^+) \\ \varphi^2(\omega^+) \end{pmatrix} = 0, \qquad (\sigma_k J_k^- - \chi_1) \begin{pmatrix} \varphi_{\dot 1}(\omega^-) \\ \varphi_{\dot 2}(\omega^-) \end{pmatrix} = 0,$$

$$(61)\qquad (\sigma_k J_k^+ - \chi_2) \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega^+) \\ \varphi_2(\omega^+) \end{pmatrix} = 0, \qquad (\sigma_k J_k^- - \chi_2) \begin{pmatrix} \varphi^{\dot 1}(\omega^-) \\ \varphi^{\dot 2}(\omega^-) \end{pmatrix} = 0.$$

Le résultat est immédiat à partir de l'étude qu'on a faite dans le cas non relativiste puisque les J_k^+ et J_k^- satisfont aux mêmes relations du groupe que les opérateurs J_k.

On peut bloquer les deux équations (60) en une seule :

$$(62)\qquad \left\{ J_k^+ \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + J_k^- \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix} - \chi_1 \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \right\} \Phi = 0,$$

où Φ est le spineur donné par l'expression (56).

De même pour les deux équations (61) :

$$(63)\qquad \left\{ J_k^+ \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + J_k^- \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix} - \chi_2 \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix} \right\} \Phi' = 0,$$

où

$$(64)\qquad \Phi' = \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega^+) \\ \varphi_2(\omega^+) \\ \varphi^{\dot 1}(\omega^-) \\ \varphi^{\dot 2}(\omega^-) \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices

$$(65)\qquad \Gamma_k^- = \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma_k^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix},$$

les relations précédentes s'écrivent alors

$$(66)\qquad (\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_1)\,\Phi = 0,$$

$$(67)\qquad (\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_2)\,\Phi' = 0.$$

Il est facile de voir que si l'on applique l'opérateur $(\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_2)$ à (66) et $(\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_1)$ à (67) on retrouve la relation (57).

Les équations (66) et (67) résolvent donc le problème qu'on s'était posé.

D'après ce qu'on a dit précédemment les spineurs

$$(68)\qquad \begin{pmatrix} \psi^1(\omega^+) \\ \psi^2(\omega^+) \\ \psi_{\dot 1}(\omega^-) \\ \psi_{\dot 2}(\omega^-) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi' = \begin{pmatrix} \psi_1(\omega^+) \\ \psi_2(\omega^+) \\ \psi^{\dot 1}(\omega^-) \\ \psi^{\dot 2}(\omega^-) \end{pmatrix}$$

satisfont également aux équations (66) et (67).

Les équations (66) et (67) ne sont pas essentiellement différentes, elles correspondent comme nous le verrons à des parités différentes.

Dans la suite on considérera donc uniquement l'équation

$$(66)\qquad (\Gamma_k^+ J_k^- + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_1)\,\Phi = 0.$$

Il est intéressant de chercher le lien existant entre les matrices Γ_k^+, Γ_k^- et les matrices γ_μ de Dirac.

Pour cela considérons le tenseur antisymétrique

$$(69)\qquad S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu),$$

σ_k étant les matrices de Pauli, une représentation hermitienne des γ_μ est fournie par (12)

$$\gamma_k = -\Sigma_k\rho_2, \qquad \gamma_4 = \rho_1, \qquad \rho_3 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$$

avec

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \qquad \rho_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i\sigma_0 \\ i\sigma_0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{vmatrix}, \qquad \Sigma_k = \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix};$$

$$\sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

Dans ces conditions, on a (12)

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix},$$

$$S_{k0} = \frac{i}{2}\Sigma_k\rho_2\rho_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{vmatrix},$$

d'où

$$\Gamma_k^+ = -i(S_{ij} + i S_{k0}), \qquad \Gamma_k^- = -i(S_{ij} - i S_{k0}). \tag{70}$$

Donc, Γ_k^+ et Γ_k^- se comportent comme des tenseurs antisymétriques self-duaux, ce à quoi il fallait s'attendre puisque J_k^+ et J_k^- sont aussi des tenseurs antisymétriques self-duaux.

3.3. Cas général $l^+ + l^-$ demi-entier. — Il est facile de comprendre que le cas $l^+ + l^- = \frac{1}{2}$ est particulièrement simple, cela tient à ce que les spineurs de rang un ne sont fonctions que de ω^+ ou de ω^-, mais non des deux et en plus pour cette représentation on connaît immédiatement la forme des vecteurs d'onde qui lui sont associés. On sait qu'il n'en est plus de même pour des représentattons d'ordre supérieur demi-entières et en outre comme seconde complication les spineurs sont simultanément fonctions des angles ω^+ et ω^-.

Nous désignerons par $(\Gamma^r{}_{,l}, \Phi_{\dot{s},l})$ et $(\Psi^r, \Psi_{\dot{s},l})$ les spineurs des représentations d'ordre supérieur où r et $\dot{s}$ sont des indices spinoriels et où l'indice l signifie seulement qu'on n'est pas dans le cas $l^+ + l^- = \frac{1}{2}$.

On sait par contre, que les deux ensembles $(\Phi^r{}_{,l}, \Phi_{\dot{s},l})$ et $(\Psi^r{}_{,l}, \Psi_{\dot{s},l})$ correspondant à des valeurs opposées de m' sont conjugués de charge et qu'on a les relations

$$P\Phi^r{}_{,l} = \Phi_{\dot{s},l}, \qquad P\Psi^r{}_{,l} = \Psi_{\dot{s},l},$$

ces spineurs satisfont aux relations du second ordre :

$$(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)\, \Phi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-) = 0, \tag{71}$$

$$(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)\, \Phi_{\dot{s},l}(\omega^+, \omega^-) = 0, \tag{72}$$

avec $r, \dot{s} \sim 1, 2$.

A ce stade se pose le même problème que pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$: les vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)\left[l^+ + l^- = \frac{2n+1}{2} n > 0\right]$ sont-ils constitués avec des spineurs à deux composantes :

$$\Phi_l = \begin{pmatrix} \Phi^1{}_{,l} \\ \Phi^2{}_{,l} \end{pmatrix}, \qquad \Phi'_l = \begin{pmatrix} \Phi_{\dot{1},l} \\ \Phi_{\dot{2},l} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_l = \begin{pmatrix} \Psi^1{}_{,l} \\ \Psi^2{}_{,l} \end{pmatrix}, \qquad \Psi'_l = \begin{pmatrix} \Phi_{\dot{1},l} \\ \Psi_{\dot{2},l} \end{pmatrix} \tag{73}$$

ou avec des spineurs à quatre composantes :

$$(74)\qquad \Phi_l = \begin{pmatrix} \varphi^1{}_{,l} \\ \varphi^2{}_{,l} \\ \varphi_{\dot{1},l} \\ \varphi_{\dot{2},l} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_l = \begin{pmatrix} \psi^1{}_{,l} \\ \psi^2{}_{,l} \\ \psi_{\dot{1},l} \\ \psi_{\dot{2},l} \end{pmatrix}.$$

Au stade de la théorie que nous développons, ceci est important pour obtenir la linéarisation des équations (71) et (72).

La discussion du paragraphe précédent sur l'emploi des spineurs à quatre composantes reste ici valable et nous conduit à adopter pour vecteurs d'onde les spineurs à deux composantes représentés par les expressions (73).

Le problème qui se pose est alors la linéarisation des équations (71) et (72). On peut alors admettre soit qu'elles se séparent, soit qu'elles ne se séparent pas, bien que pour des vecteurs d'onde constitués à l'aide des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-)$ le premier cas seul soit à envisager. Nous considérerons seulement la première possibilités.

Si elles se séparent, seul cas que nous examinerons ici, les équations (71) et (72) sont à remplacer par les relations

$$(71\ bis)\qquad \begin{cases} (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\, \varphi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-) = 0 \\ (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\, \varphi^r{}_{,l}(\omega^+, \omega^-) = 0 \end{cases} \quad (r \sim 1, 2),$$

$$(72\ bis)\qquad \begin{cases} (J_k^+ J_k^+ - \chi_\beta^2)\, \varphi_{\dot{s},l}(\omega^+, \omega^-) = 0 \\ (J_k^- J_k^- - \chi_\alpha^2)\, \varphi_{\dot{s},l}(\omega^+, \omega^-) = 0 \end{cases} \quad (\dot{s} \sim 1, 2),$$

où χ_α^2 et χ_β^2 sont deux scalaires. Ces deux systèmes d'équations sont déduits l'un de l'autre par l'opération parité, on pourra les comparer aux relations (51) et (52) du paragraphe précédent.

Il faut remarquer qu'à cause de la dissymétrie des spineurs de la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ où l'un des deux nombres $\{l^+, l^-\}$ est un entier, l'autre un demi-entier, il est impossible de linéariser simultanément les deux équations du système (71 *bis*) [ou les deux équations de (72 *bis*)]. Donc une seule équation de chaque système doit être linéarisée.

Si l'on définit

$$(75\,a)\qquad \chi_{1\alpha} = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi_\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4}}, \qquad \chi_{2\alpha} = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi_\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4}},$$

$$(75\,b)\qquad \chi_{1\beta} = \frac{\hbar}{2} + \sqrt{\chi_\beta^2 + \frac{\hbar^2}{4}}, \qquad \chi_{2\beta} = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{\chi_\beta^2 - \frac{\hbar^2}{4}};$$

on déduit immédiatement des relations (60) et (61) les équations satisfaites par les spineurs (73) :

$$(76\,a)\quad \left\{\begin{array}{ll} (\sigma_k J_k^{+} - \chi_{1\alpha}) \begin{pmatrix} \varphi^{1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi^{2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, & (\sigma_k J_k^{+} - \chi_{2\alpha}) \begin{pmatrix} \varphi_{1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi_{2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, \\ (J_k^{-} J_k^{-} - \chi_{\beta}^{2}) \begin{pmatrix} \varphi^{1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi^{2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, & (J_k^{-} J_k^{-} - \chi_{\beta}^{2}) \begin{pmatrix} \varphi_{1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi_{2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, \end{array}\right.$$

et

$$(76\,b)\quad \left\{\begin{array}{ll} (J_k^{+} J_k^{+} - \chi_{\beta}^{2}) \begin{pmatrix} \varphi_{\dot 1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi_{\dot 2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, & (J_k^{+} J_k^{+} - \chi_{\beta}^{2}) \begin{pmatrix} \varphi^{\dot 1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi^{\dot 2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, \\ (\sigma_k J_k^{-} - \chi_{1\alpha}) \begin{pmatrix} \varphi_{\dot 1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi_{\dot 2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0, & (\sigma_k J_k^{-} - \chi_{2\alpha}) \begin{pmatrix} \varphi^{\dot 1},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \\ \varphi^{\dot 2},{}_{l}(\omega^{+}, \omega^{-}) \end{pmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

On voit que chaque spineur $\boldsymbol{\Phi}_l$ et $\boldsymbol{\Phi}'_l$ sont simultanément solutions de deux équations, le premier des relations ($76\,a$), le second des relations ($76\,a$). De la même façon Ψ_l est solution de l'un des deux paires de deux équations ($76\,a$) et Ψ'_l de ($76\,b$).

On remarquera que ces équations sont particulièrement simples et sont analogues à celles qu'on a trouvées pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4. Formalisme lagrangien. — 4.1. Généralités. — Nous allons chercher à déduire les équations d'onde d'un formalisme lagrangien par un principe variationnel.

Considérons un champ d'êtres géométriques $\boldsymbol{\Phi}$, les grandeurs. $\boldsymbol{\Phi}$ sont des spineurs ou des tenseurs fonctions de variables deux à deux complexes conjuguées :

$$(77)\qquad \omega^{+} = \{\varphi^{+}, \theta^{+}, \psi^{+}\}, \qquad \omega^{-} = \{\varphi^{-}, \theta^{-}, \psi^{-}\}.$$

Partons d'un scalaire

$$(78)\qquad \mathcal{L}[\Phi(\omega_i^{+}, \omega_j^{-}), J_k^{+}\Phi(\omega_i^{+}, \omega_j^{-})\, J_l^{-}\Phi(\omega_i^{+}, \omega_j^{-})]$$

qui dépend des paramètres ω_i^{+} et ω_i^{-} par l'intermédiaire de champ $\boldsymbol{\Phi}$ et des dérivées premières $J_k^{+}\boldsymbol{\Phi}$, $J_l^{-}\boldsymbol{\Phi}$, où les $J_k^{\pm}$ sont des opérateurs différentiels donnés dans les expressions (3).

Pour simplifier l'écriture, on posera $\boldsymbol{\Phi}$ pour $\boldsymbol{\Phi}(\omega_i^{+}, \omega_j)$ et $J_k^{\pm}\boldsymbol{\Phi}$ pour $J_k^{\pm}\boldsymbol{\Phi}(\omega_i^{+}, \omega_j^{-})$.

Considérons donc

$$(79)\qquad \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\Phi, J_k^{+}\Phi, J_l^{-}\Phi).$$

Soit $d\tau$ l'élément de volume dans l'espace des paramètres ω_i^+, ω_i^- et V un volume arbitraire dans cet espace. Considérons l'intégrale

$$I = \int_V \mathcal{L}(\Phi, J_k^+\Phi, J_l^-\Phi)\,d\tau, \tag{80}$$

on supposera que dans la région arbitraire, les fonctions Φ sont analytiques.

Supposons que le champ Φ soit sujet à une variation $d\Phi$ telle que les variations de Φ et des dérivées qui composent $\mathcal{L}$ s'annulent sur la surface S limitant le volume V, on a

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}d\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}d(J_k^+\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}d(J_l^-\Phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}d\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_k^+(d\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}J_l^-(d\Phi), \end{aligned}$$

d'où

$$dI = \int_V \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}d\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_k^+(d\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}J_l^-(d\Phi)\right]d\tau, \tag{81}$$

or le second et le troisième terme de (81) s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_k^+(d\Phi) &= J_k^+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}d\Phi\right) - J_k^+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}\right)d\Phi, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}J_l^-(d\Phi) &= J_l^-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}d\Phi\right) - J_l^-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}\right)d\Phi. \end{aligned}$$

L'expression (81) devient dans ces conditions :

$$\begin{aligned} dI &= \int_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - J_k^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} - J_l^-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}\right)d\Phi\,d\tau \\ &+ \int_V \left[J_k^+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}d\varphi\right) + J_l^-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}d\Phi\right)\right]d\tau. \end{aligned} \tag{82}$$

Admettons qu'on puisse appliquer la formule de Gauss-Ostrogradski à la seconde intégrale de l'expression (82), on aura

$$\int_V J_k^+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}d\Phi\right)d\tau = \int_S \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}d\Phi\,d\sigma_k = 0, \tag{83}$$

$$\int_V J_l^-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}d\Phi\right)d\tau = \int_S \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}d\Phi\,d\sigma_l = 0, \tag{84}$$

compte tenu de (83) et 84) il vient

$$dI = \int_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - J_l^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} - J_l^-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}\right)d\Phi\,d\tau. \tag{85}$$

Pour que la variation de I s'annule quel que soit V, il faut que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - J_k^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} - J_l^- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_l^- \Phi)} = 0, \tag{86}$$

c'est l'équation de Lagrange pour le champ Φ. Il suffit donc de choisir $\mathcal{L}$, pour que l'expression (86) puisse redonner les équatious (47), (66) et (78).

Calculons maintenant

$$J_i^- \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(J_i^+ \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_i^+ J_k^+ \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_i^+ J_k^- \Phi,$$

or, on a les relations

$$[J_i^+, J_k^+] = -j\hbar\,\varepsilon_{ikl}\,J_l^+ \qquad (\varepsilon_{ikl}\text{, tenseur complètement antisymétrique}),$$
$$[J_i^+, J_k^+] = 0,$$

d'où il vient

$$J_i^+ \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(J_i^+ \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_k^+ J_i^+ \Phi - j\hbar\,\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_l^+ \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_k^- J_i^+ \Phi.$$

Si dans cette expression on tient compte de l'équation (86), il vient

$$\begin{aligned} J_i^+ \mathcal{L} = {} & J_k^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)}(J_i^+ \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_k^+ J_i^+ \Phi - j\hbar\,\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_l^+ \Phi \\ & + \left(J_k^- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)}\right)(J_i^+ \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_k^- J_i^+ \Phi, \end{aligned}$$

soit

$$J_i^+ \mathcal{L} = J_k^+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_i^+ \Phi\right) - j\hbar\,\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_l^+ \Phi + J_k^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_i^+ \Phi\right),$$

expression qu'on peut écrire sous la forme

$$J_k^+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_i^+ \Phi - \delta_{ik} \mathcal{L}\right) + J_k^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_i^+ \Phi\right) = j\hbar\,\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_l^+ \Phi. \tag{87}$$

D'une façon analogue, on a

$$J_k^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_i^- \Phi - \delta_{ik} \mathcal{L}\right) + J_k^+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} J_i^- \Phi\right) = j\hbar\,\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} J_l^- \Phi. \tag{88}$$

Considérons le tenseur complexe défini par les relations

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} T_{i^+k^+} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} J_i^+\Phi - \delta_{ik}\mathcal{L},\\ T_{i^-k^-} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)} J_i^-\Phi - \delta_{ik}\mathcal{L},\\ T_{i^+k^-} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)} J_i^+\Phi,\\ T_{i^+k^-} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} J_i^-\Phi. \end{aligned}\right.$$

Si l'équation (47) est séparable $T_{i^+k^-}$ et $T_{i^-k^+}$ sont toujours nuls.

Les relations précédentes s'écrivent alors :

$$J_k^+ T_{i^+k^+} + J_k^+ T_{i^+k^-} = \varepsilon_{ikl}\, j\hbar\, T_{l^+k^+},\qquad J_k^- T_{i^-k^-} + J_k^+ T_{i^-k^+} = \varepsilon_{ikl}\, j\hbar\, T_{l^-k^-},$$

soit encore

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} J_j^+ T_{i^+j^+} + J_j^- T_{i^+j^-} &= j\hbar(T_{l^+k^+} - T_{k^+l^+}),\\ J_j^- T_{i^-j^-} + J_j^+ T_{i^-j^+} &= j\hbar(T_{l^-k^-} - T_{k^-l^-}), \end{aligned}\right.$$

i^+, k^+, l^+ et i^-, k^-, l^-, permutations circulaires de 1, 2, 3.

Remarquons d'abord que si $T_{l^+k^+}$ et $T_{l^-k^-}$ sont symétriques, il vient

$$(90\ bis)\qquad J_j^+ T_{i^+j^+} + J_j^- T_{i^+j^-} = 0,\qquad J_j^- T_{i^-j^-} + J_j^+ T_{i^-j^+} = 0.$$

Nous allons donner une forme plus symétrique à ces relations. Tous les tenseurs sont complexes et ont des composantes dans deux espaces complexes conjugués.

Considérons le vecteur axial J_k

$$J_k = \begin{vmatrix} J_k^+ \\ J_k^- \end{vmatrix}$$

et le tenseur moment cinétique T_{ij} :

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{i^+j^+} & T_{i^-j^+} \\ T_{i^+j^-} & T_{i^-j^-} \end{vmatrix}.$$

Les relations (90 *bis*) s'écrivent

$$J_j^T T_{ij} = 0,$$

où J_j^T est le transposé de J_j.

En effet

$$\begin{aligned} J_j^T T_{ij} &= |\, J_j^+ \quad J_j^- \,| \cdot \begin{vmatrix} T_{i^+j^+} & T_{i^-j^+} \\ T_{i^+j^-} & T_{i^-j^-} \end{vmatrix} = 0,\\ &= \begin{vmatrix} J_j^+ T_{i^+j^+} + J_j^- T_{i^+j^-} \\ J_j^+ T_{i^-j^+} + J_j^- T_{i^-j^-} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

On remarquera qu'il n'est pas possible de mettre les relations (90) sous une forme aussi simple à cause du second membre qui ne contient pas tous les éléments du tenseur T_{ij}.

4.2. Invariance de jauge. — Considérons maintenant le cas où les variables de champ $\Phi(\omega_i^+, \omega_j^-)$ sont complexes, le lagrangien prend alors la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Phi, \overline{\Phi}, J_k^+\Phi, J_l^-\Phi, J_k^+\overline{\Phi}, J_l^-\overline{\Phi}\right), \tag{91}$$

où $\overline{\Phi}$ désigne le complexe conjugué de Φ. En traitant les variations de Φ, $J_k^+\Phi$, $J_l^-\Phi$, et de leurs conjugués comme indépendantes, on aboutit aux équations de champ :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - J_k^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} - J_l^-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)} = 0,\\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\Phi}} - J_k^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})} - J_l^-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\overline{\Phi})} = 0. \end{aligned}\right. \tag{92}$$

Quant au tenseur moment cinétique T_{ik}, ces composantes deviennent

$$\left\{\begin{aligned} T_{i^+k^-} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_i^+\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_h^+\overline{\Phi})}J_i^+\overline{\Phi} - \delta_{ik}\mathcal{L},\\ T_{i^-k^-} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}J_i^-\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\overline{\Phi})}J_k^-\overline{\Phi} - \delta_{ik}\mathcal{L},\\ T_{i^+k^+} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}J_i^+\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\overline{\Phi})}J_i^+\overline{\Phi},\\ T_{i^-k^+} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_i^-\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})}J_i^-\overline{\Phi}. \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse que $\mathcal{L}$ est invariant sous la transformation de jauge :

$$\Phi \to \Phi' e^{i\alpha}, \qquad \overline{\Phi} \to \overline{\Phi}' e^{-i\alpha}; \tag{94}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}\delta(J_k^+\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}\delta(J_l^-\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\Phi}}\delta\overline{\Phi}\\ + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})}\delta(J_k^+\overline{\Phi}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\overline{\Phi})}\delta(J_l^-\overline{\Phi}), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} 0 = i\alpha\Bigg(&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\Phi}}\overline{\Phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}J_k^+\Phi\\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})}J_k^+\overline{\Phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\Phi)}J_l^-\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_l^-\overline{\Phi})}J_l^-\overline{\Phi}\Bigg), \end{aligned}$$

soit compte tenu des équations (92) :

$$(95)\quad J_k^+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}\Phi-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})}\overline{\Phi}\right)+J_k^-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}\Phi-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\overline{\Phi})}\overline{\Phi}\right)=0.$$

Considérons le vecteur complexe V_k qui a pour composantes

$$(96)\quad V_k^+=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)}\Phi-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\overline{\Phi})}\overline{\Phi},\qquad V_k^-=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}\Phi-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\overline{\Phi})}\overline{\Phi},$$

soit

$$V_k=\begin{vmatrix}V_k^+\\ V_k^-\end{vmatrix}.$$

La relation (95) s'écrit alors

$$(97)\qquad J_k^+V_k^++J_k^-V_k^-=0\qquad\text{où}\qquad J_k^{\mathrm{T}}V^k=0,$$

cette relation peut être interprétée comme une équation de continuité pour le vecteur complexe V_k.

4.3. Formalisme lagrangien pour le cas $l^+ + l^- = \frac{1}{2}$. — Nous allons chercher un scalaire $\mathcal{L}$ tel que les relations (92) fournissent l'équation (66) :

$$(66)\qquad (\Gamma_k^+J_k^++\Gamma_k^-J_k^--\chi_1)\,\Phi=0,$$

avec

$$\Gamma_k^+=\begin{vmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},\qquad \Gamma_k^-=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_k\end{vmatrix},$$

nous allons d'abord chercher quelle est l'équation adjointe à (66). Pour cela nous prendrons le transposé de cette équation, il vient

$$(98)\qquad J_k^+\Phi^{\mathrm{T}}\,\Gamma_k^{+\mathrm{T}}+J_k^-\Phi^{\mathrm{T}}\,\Phi_k^{-\mathrm{T}}-\chi_1\,\Phi^{\mathrm{T}}=0,$$

avec

$$\Gamma_k^{+\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}\sigma_k^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\qquad\text{et}\qquad \Gamma_k^{-\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_k^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}.$$

Pour prendre le complexe conjugué, il faut remarquer que J_k^+, J_k^-, Φ, dépendent de deux types de grandeurs imaginaires ([8]), celles qui sont formées avec j et celles qui sont formées avec i, par définition l'opération complexe conjuguée que nous définissons ici ne porte que sur les grandeurs définies avec j.

Donc

$$\begin{aligned}(J_k^+(\omega^+))^\star &= -J_l^+(\omega^+),\\ (J_k^-(\omega^-))^\star &= -J_k^-(\omega^-),\\ (\Phi(j,\omega^+,\omega^-))^\star &= \Phi(-j,\omega^+,\omega^-).\end{aligned}$$

Pour éviter des confusions de notation on indiquera par $\tilde{\Phi}$ la fonction hermitienne conjuguée de Φ.

On a donc

$$\tilde{\Phi} = (\Phi^T)^\star = (\Phi(-j,\omega^+,\omega^-))^T.$$

D'après les propriétés des matrices σ_k il est facile de voir que

$$(\Gamma_k^{+T})^\star = \Gamma_k^+, \qquad (\Gamma_k^{-T})^\star = \Gamma_k^-$$

si l'on convient de définir la matrice σ_2 avec l'imaginaire j et non pas, avec l'imaginaire i.

Donc si l'on prend le complexe conjugué de l'équation (98) au sens qui vient d'être défini, on trouve

$$J_k^+\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ + J_k^-\tilde{\Phi}\Gamma_k^- + \chi_1\tilde{\Phi} = 0. \tag{99}$$

L'équation (99) est l'équation adjointe de la relation (66).

Considérons alors le scalaire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\Phi}(\Gamma_k^+J_k^+ + \Gamma_k^-J_k^-)\,\tilde{\Phi} - (J_k^+\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ + J_k^-\tilde{\Phi}\Gamma_k^-)\,\Phi\right] - \chi_1\tilde{\Phi}\Phi, \tag{100}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{\Phi}} &= \frac{1}{2}(\Gamma_k^+J_k^+ + \Gamma_k^-J_k^-)\,\Phi - \chi_1\Phi,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\tilde{\Phi})} &= -\frac{1}{2}\Gamma_k^+\Phi,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\tilde{\Phi})} &= -\frac{1}{2}\Gamma_k^-\Phi.\end{aligned}$$

Donc d'après la première équation (92), il vient

$$(\Gamma_k^+J_k^+ + \Gamma_k^-J_k^- - \chi_1)\,\Phi = 0$$

qui est bien l'équation (66).

De la même façon :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} &= -\frac{1}{2}(J_k^+\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ + J_k^-\tilde{\Phi}\Gamma_k^-) - \chi_1\tilde{\Phi},\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} &= \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\Gamma_k^+,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)} &= \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\Gamma_k^-.\end{aligned}$$

Donc d'après la seconde équation (92), on a

$$J_k^+ \tilde{\Phi} \Gamma_k^+ + J_k^- \tilde{\Phi} \Gamma_k^- + \chi_1 \tilde{\Phi} = 0,$$

ce qui est précisément la relation (99).

On remarquera que les équations du mouvement entraînent $\mathcal{L} = 0$.

Calculons maintenant les composantes du tenseur moment cinétique T_{ik}.

D'après les expressions (93), on a

$$(101) \quad \begin{cases} T_{i^+k^+} = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ J_i^+ \Phi - J_i^+ \tilde{\Phi} \Gamma_k^+ \Phi), \\ T_{i^-k^-} = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Gamma_k^- J_i^- \Phi - J_i^- \tilde{\Phi} \Gamma_k^- \Phi), \\ T_{i^+k^-} = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Gamma_k^- J_k^+ \Phi - J_k^+ \tilde{\Phi} \Gamma_k^- \Phi), \\ T_{i^-k^+} = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ J_i^- \Phi - J_i^- \tilde{\Phi} \Gamma_k^+ \Phi). \end{cases}$$

On remarquera immédiatement que $T_{i^+k^-} = T_{i^-k^+} = 0$.
En effet, si l'on introduit les spineurs à deux composantes $\varphi_1(\omega^+)$ et $\varphi_2(\omega^-)$, on a

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega^+) \\ \varphi_2(\omega^-) \end{pmatrix},$$

donc

$$\Gamma_k^- J_i^+ \Phi = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k J_i^+ \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(\omega^+) \\ \varphi_2(\omega^-) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \sigma_k J_i^+ \varphi_2(\omega^-) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

De la même façon les autres termes sont nuls. On peut exprimer $T_{i^+k^+}$ et $T_{i^-k^-}$ en fonction des spineurs à deux composantes $\varphi_1(\omega^+)$ et $\varphi_2(\omega^-)$, il vient

$$(102) \quad \begin{cases} T_{i^+k^+} = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_1 \sigma_k J_i^+ \varphi_1 - J_i^+ \tilde{\varphi}_1 \sigma_k \varphi_1), \\ T_{i^-k^-} = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_2 \sigma_k J_i^- \varphi_2 - J_i^- \tilde{\varphi}_2 \sigma_k \varphi_2), \\ T_{i^+k^-} = T_{i^-k^+} = 0. \end{cases}$$

Comme $\varphi_2 = P\varphi_1$, on en déduit $\varphi_2 = \tilde{\varphi}_1 P$ où P est l'opération parité. Il en découle que $T_{i^+k^+}$ $T_{i^-k^-}$ se tranforment l'un en l'autre sous cette opération.

On peut alors reprendre tout ce qui a été fait dans l'étude non relativiste [1] : on considère les tenseurs antisymétriques

$$S_{i^+k^+} = T_{i^+k^+} - T_{k^+i^+}, \qquad S_{i^-k^-} = T_{i^-k^-} - T_{k^-i^-}.$$

On démontrerait d'une façon analogue à ce qu'on a fait à l'approximation non relativiste l'ensemble des résultats ci-dessous. Les calculs sont rigoureusement analogues, ceci tient à la séparation qui s'effectue entre les espaces $+$ et $-$.

On a donc

$$S_{i^+k^+} = J_l^+ \mathfrak{S}_{ikl}^-, \qquad S_{i^-k^-} = J_l^- \mathfrak{S}_{ikl}^-, \tag{103}$$

où $\mathfrak{S}_{ikl}^-$ et $\mathfrak{S}_{ikl}^-$ sont les tenseurs analogues à ceux de Belinfante-Rosenfeld des théories de champ invariantes sous le groupe de Lorentz :

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_{ikl}^+ &= \frac{1}{4}[\tilde{\varphi}_1(\omega^+)(\sigma_k\sigma_l\sigma_i - \sigma_i\sigma_l\sigma_k)\varphi_1(\omega^+)], \\ \mathfrak{S}_{ikl}^- &= \frac{1}{4}[\tilde{\varphi}_2(\omega^-)(\sigma_k\sigma_l\sigma_i - \sigma_i\sigma_l\sigma_k)\varphi_2(\omega^-)]. \end{aligned}\right. \tag{104}$$

Considérons alors le tenseur

$$\Theta_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} J_l S_{ikl} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}),$$

soit explicitement

$$\Theta_{ik} = \begin{vmatrix} T_{i^+k^+} - \frac{1}{2} J_l^+ \mathfrak{S}_{ikl}^+ & 0 \\ 0 & T_{i^-k^-} - \frac{1}{2} J_l^- \mathfrak{S}_{ikl}^- \end{vmatrix}, \tag{105}$$

considérons le vecteur

$$J_j = \begin{vmatrix} J_j^+ \\ J_j^- \end{vmatrix}, \tag{90 bis}$$

les relations (90 *bis*) peuvent s'écrire

$$J_j^T T_{ij} = j\hbar S_{lk} \qquad (i,\ l,\ k), \text{ permutation circulaire de } 1,\ 2,\ 3),$$

où

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{i^+j^+} & 0 \\ 0 & T_{i^-j^-} \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_{ij} = \begin{vmatrix} S_{i^+j^+} & 0 \\ 0 & S_{i^-j^-} \end{vmatrix}$$

et où J_j^T est la matrice transposées de J_j, on a alors

$$J_j^T S_{ij} = -j\hbar S_{lk},$$

d'où les deux relations

$$J_j \Theta_{ij} = 0, \qquad J_j(T_{ij} + S_{ij}) = 0. \tag{106}$$

Reprenons les expressions (104); pour l prenant les valeur 1, 2, 3, il est facile de voir que

$$\mathcal{S}^+_{ikl} = \frac{j}{4}\varepsilon_{klj}\tilde{\varphi}_1(\omega^+)(\sigma_j\sigma_i + \sigma_i\sigma_j)\,\varphi_1(\omega^+),$$

$$\mathcal{S}^-_{ikl} = \frac{j}{4}\varepsilon_{klj}\tilde{\varphi}_2(\omega^-)(\sigma_j\sigma_i + \sigma_i\sigma_j)\,\varphi_2(\omega^-);$$

d'où

$$S_{i^+k^+} = \frac{j}{2}\varepsilon_{ikl}J^+_l(\tilde{\varphi}_1(\omega^+)\,\varphi_1(\omega^+)),$$

$$S_{i^-k^-} = \frac{j}{2}\varepsilon_{ikl}J^-_l(\tilde{\varphi}_2(\omega^-)\,\varphi_2(\omega^-)).$$

On considère alors le cas où dans les expressions (104) l'indice l prend la valeur $l = 0$. On obtient immédiatement

$$\mathcal{S}^+_{ik0} = \frac{j}{2}(\tilde{\varphi}_1(\omega^+)\,\sigma_l\varphi_1(\omega^+)),$$

$$\mathcal{S}^-_{ik0} = \frac{j}{2}(\tilde{\varphi}_2(\omega^-)\,\sigma_l\varphi_2(\omega^-)),$$

où i, k, l est une permutation circulaire de 1, 2, 3.

Si l'on introduit l'opérateur j dans ces expressions, ce qui revient à considérer les opérateurs J_k comme des opérateurs différentiels géométriques habituels au lieu de les considérer comme des opérateurs quantiques, on obtient finalement

$$\mathcal{S}^+_{ik0} = \frac{\hbar}{2}(\tilde{\varphi}_1\sigma_l\varphi_1), \qquad \mathcal{S}^-_{ik0} = \frac{\hbar}{2}(\tilde{\varphi}_2\sigma_l\varphi_2),$$

soit encore en considérant la matrice

$$\gamma_l = \begin{vmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{vmatrix}$$

et les spineurs $\tilde{\Phi}$, et Φ à quatre composantes définis précédemment, il vient

$$(107\,a) \qquad \mathcal{S}_{ik0} = \frac{\hbar}{2}\tilde{\Phi}\gamma_l\Phi.$$

On reconnaît un opérateur analogue au spin des théories quantiques habituelles. Nous allons chercher les valeurs moyennes de l'opérateur $\mathcal{S}_{120} = \frac{\hbar}{2}\tilde{\Phi}\gamma_3\Phi$.

Pour cela nous considérons l'intégrale

$$\langle \mathcal{S}_{120} \rangle = \frac{\hbar}{2}\int \tilde{\Phi}\gamma_3\Phi\,d\tau,$$

où $d\delta$ est l'élément de volume sous les angles d'Euler ω^+ et ω^-. On a précédemment défini ([8]) cet élément de volume $d\delta$ et la norme des fonctions $Z_{l^-, l^+, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$. Il en découle qu'en prenant une norme correcte pour les spineurs $\tilde{\Phi}$ et Φ que l'expression précédente conduit à la moitié de la valeur habituelle.

Comme à l'approximation, non relativiste, et suivant une remarque de L. De Broglie ([15]) il faut remplacer l'expression (107 *a*) par

$$\Sigma_l = \varepsilon^i{}_{kl}\mathcal{S}_{ik0} = \hbar\tilde{\Phi}\gamma_l\Phi. \tag{107 b}$$

Dans ces conditions, $\boldsymbol{\Sigma}_3 = \hbar\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\gamma_3\boldsymbol{\Phi}$ est un vecteur axial il est arbitraire de donner à l'indice l la valeur zéro. On montrera que $\boldsymbol{\Sigma}_3$ peut être considéré comme l'opérateur isospin dans le cadre de la seconde quantification de cette théorie.

Par ailleurs, il est évident que la valeur moyenne de $\boldsymbol{\Sigma}_3$ sera $\pm\frac{\hbar}{2}$ quel que soit le spineur des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ utilisé, le signe dépendant de la normalisation des fonctions $\boldsymbol{\Phi}$.

Considérons maintenant les composantes du vecteur complexe

$$V_k^+ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\tilde{\Phi})}\tilde{\Phi}, \qquad V_k^- = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\tilde{\Phi})}\tilde{\Phi}$$

soit encore

$$V_k^+ = \tilde{\Phi}\begin{vmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\Phi, \qquad V_k^- = \tilde{\Phi}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_k\end{vmatrix}\Phi, \tag{108 a}$$

soit encore avec la matrice

$$\gamma_k = \begin{vmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{vmatrix}$$

et en posant

$$V_k = \begin{vmatrix}V_k^+\\ V_k^-\end{vmatrix},$$

$$V_k = \tilde{\Phi}\gamma_k\Phi, \tag{108 b}$$

d'où en composant (107 *b*) et (108 *b*),

$$\mathcal{S}_{ik0} = \frac{\hbar}{2}V_l,$$

([15]) L. DE BROGLIE, *Théorie des particules de spin* $\frac{1}{2}$, Gauthier-Villars, Paris.

on retrouve un résultat des théories de champ invariantes sous le groupe de Lorentz.

Les équations (66) et (99) entraînent bien la relation de conservation

$$J_k^+ V_k^+ + J_k^- V_k^- = 0.$$

Il est clair que les équations (107) peuvent s'écrire aussi à l'aide des spineurs à deux composantes $\varphi_1(\omega^+)$ et $\varphi_2(\omega^-)$ et qu'il vient

$$V_k^+ = \tilde{\varphi}_1(\omega^+)\,\sigma_k\,\varphi_1(\omega^+), \qquad V_k^- = \tilde{\varphi}_2(\omega^-)\,\sigma_k\,\varphi_2(\omega^-),$$

ce sont les composantes + et — du courant.

4.4 Formalisme lagrangien pour le cas $l^+ + l^-$ demi-entier différent de $\frac{1}{2}$.

— Commençons par le cas particulier des équations (76 *a*), on a

$$(76\,a) \qquad \left.\begin{cases} (\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\,\Phi_l = 0, & (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\;\Phi_l' = 0 \\ (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\;\Phi_l = 0, & (\sigma_k J_k^- - \chi_{1\beta})\,\Phi_l' = 0 \end{cases}\right\}\Phi' = P\,\Phi.$$

Nous allons chercher un lagrangien qui fournisse simultanément les équations [car $(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\Phi_l' = 0$ est équivalent à $(J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\,\Phi_l = 0$]

$$(109) \qquad (\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\,\Phi_l = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\Phi_l' = 0,$$

on en déduit immédiatement le système des équations adjointes

$$(110) \qquad J_k^+ \tilde{\Phi}_l \sigma_k + \chi_{1\alpha} \tilde{\Phi}_l = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\Phi_l' = 0,$$

où $\tilde{\Phi}_l$ est le spineur hermitien conjugué de Φ_l.

Considérons alors le scalaire

$$(111) \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\Phi}_l \sigma_k J_k^+ \Phi_l - J_k^+ \tilde{\Phi}_l \sigma_k \Phi_l + J_k^+ \Phi_l'\, J_k^+ \Phi_l'\right] - \chi_{1\alpha} \tilde{\Phi}_l \Phi_l + \frac{1}{2}\chi_\alpha^2 \Phi_l'\,\Phi_l',$$

il vient alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\Phi}_l} = \frac{1}{2}\sigma_k J_k^+ \Phi_l - \chi_{1\alpha}\Phi_l, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_l'} = \chi_\alpha^2 \Phi_l',$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \tilde{\Phi}_l)} = -\frac{1}{2}\sigma_k \Phi_l, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi_l')} = J_k^+ \Phi_l',$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \tilde{\Phi}_l)} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi_l)} = 0,$$

d'où d'après la première relation (92) :

$$(\sigma_k J_k^+ - \chi_{1\alpha})\,\Phi_l = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\Phi_l' = 0.$$

De la même façon on réobtiendrait les équations adjointes en prenant les dérivées par rapport aux grandeurs dépendant de $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}'$.

Calculons maintenant les composantes du tenseur moment cinétique. On a immédiatement

$$T_{i^+k^-} = T_{i^-k^+} = 0, \tag{112}$$

il vient

$$\left\{\begin{array}{l} T_{i^+k^+} = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}_l \sigma_k J_i^+ \Phi_l - J_i^+ \tilde{\Phi}_l \sigma_k \Phi_l) + J_i^+ \Phi'_l J_k^+ \Phi'_l, \\ T_{i^-k^-} = 0. \end{array}\right. \tag{113}$$

Ceci nous conduit à considérer le tenseur antisymétrique

$$S_{ik}^+ = T_{i^+k^+} - T_{k^+i^+}. \tag{114}$$

On cherchera alors un tenseur $\mathfrak{S}_{ikl}$ analogue à celui de Belinfante-Rosenfeld des théories quantiques habituelles et tel que

$$S_{ik}^+ = J_l^+ \mathfrak{S}_{ikl}. \tag{115}$$

Il sera alors possible de symétriser le tenseur moment cinétique T_{ij} et l'on posera

$$\Theta_{ij} = T_{i^+j^+} + J_k^+ \mathfrak{S}_{ijk}, \tag{116}$$

le tenseur Θ_{ij} satisfaisant à la relation de conservation

$$J_j \Theta_{ij} = 0. \tag{117}$$

Nous n'expliciterons pas ici le calcul du tenseur $\mathfrak{S}_{ikl}$ mais la forme des équations montre qu'il est identique à celui donné pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Le fait important c'est que les composantes Θ_{ij}^+ et Θ_{ij}^- sont formées à partir du même tenseur $\mathfrak{S}_{ijk}$.

Comme on le voit ces résultats concordent parfaitement avec ceux qu'on a obtenus dans le cas particulier $l^+ + l^- = \frac{1}{2}$.

4.5 Formalisme lagrangien pour le cas $l^+ + l^-$ entier. — Nous distinguerons ici les deux cas correspondant à l'équation (47) séparable ou non :

a. Équation (47) séparable. — Les équatious d'onde sont alors

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2) T_\mu = 0, \qquad (J_k^- J_k^- + \chi_\beta^2) T_\mu = 0. \tag{49}$$

Comme $J_k^- J_k^+ = P^{-1} J_k^+ J_k^+ P$ en posant $T'_\mu = P T_\mu$, on peut remplacer le système précédent par

$$(118) \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2) T_\mu = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\beta^2) T'_\mu = 0.$$

Considérons alors le lagrangien

$$(119) \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[J_k^+ T_\mu J_k^+ T_\mu + J_k^+ T'_\mu J_k^+ T'_\mu + \chi'_\alpha T_\mu T_\mu + \chi_\beta^2 T'_\mu T'_\mu \right],$$

on a alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_\mu} = \chi_\alpha^2 T_\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T'_\mu} = \chi'_\beta T'_\mu;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ T_\mu)} = J_k^+ T_\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ T'_\mu)} = J_k^+ T'_\mu;$$

ce qui fournit les équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2) T_\mu = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\beta^2) = T'_\mu = 0,$$

c'est-à-dire précisément le système (118)

Les composantes du tenseur T_{ik} sont alors

$$T_{ik}^{(1)} = J_k^+ T_\mu J_k^+ T_\mu, \qquad T_{ik}^{(2)} = J_k^+ T'_\mu J_k^+ T'_\mu.$$

On peut aussi écrire

$$T_{ik}^{(2)} = P J_k^- P^{-1} P T_\mu P J_i^- P^{-1} P T_\mu = J_k^- T_\mu J_k^- T_\mu.$$

On a donc avec les notations utilisées dans les paragraphes antérieurs :

$$T_{i^+k^+} = J_k^+ T_\mu J_i^+ T_\mu, \qquad T_{i^-k^-} = J_k^- T_\mu J_i^- T_\mu.$$

Le résultat important est la symétrie du tenseur T_{ik}.

Théorème. — *Pour toute représentation à $l^+ + l^-$ entier et équation* $(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2) T_\mu = 0$ *séparable, le tenseur moment cinétique est symétrique.*

b. Équation (47) *non séparable.* — Dans ces conditions on a l'équation

$$(50) \qquad (J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2) T_\mu = 0.$$

Considérons alors le lagrangien

$$(120) \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (J_k^+ T_\mu J_k^+ T_\mu + J_k^- T_\mu J_k^- T_\mu + \chi^2 T_\mu T_\mu),$$

on en déduit immédiatement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_\mu} = \chi^2 T_\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ T_\mu)} = J_k^+ T_\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- T_\mu)} = J_k^- T_\mu,$$

soit d'après (86) :

$$J_k^+(J_k^+ T_\mu) + J_k^-(J_k^- T_\mu) - \chi^2 T_\mu = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation (50).

Les composantes du tenseur moment cinétique sont alors

$$(121) \quad \begin{cases} T_{i^+k^+} = J_k^+ T_\mu J_i^+ T_\mu, \qquad T_{i^-k^-} = J_k^- T_\mu J_i^- T_\mu, \qquad T_{i^+k^-} = J_k^- T_\mu J_i^+ T_\mu, \\ T_{i^-k^+} = J_k^+ T_\mu J_i^- T_\mu. \end{cases}$$

Avec les relations de symétrie suivantes :

$$(122) \quad T_{i^+k^+} = T_{k^+i^+}, \qquad T_{i^-k^-} = T_{k^-i^-}, \qquad T_{i^+k^-} = T_{k^-i^+}, \qquad T_{i^-k^+} = T_{k^+i^-}.$$

Les deux dernières expressions ne sont pas symétriques en i^+, k^- et i^-, k^+; on peut écrire

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} T_{i^+k^+} & T_{i^-k^+} \\ T_{i^+k^-} & T_{i^-k^-} \end{vmatrix}$$

satisfaisant à $J_k^+ T_{ik} = 0$.

D'où le tenseur antisymétrique

$$S_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ik} \\ -S_{ik} & 0 \end{vmatrix},$$

avec

$$(123) \qquad S_{ik} = T_{i^-k^+} - T_{i^+k^-} = J_i^+ T_\mu J_k^- T_\mu - J_k^- T_\mu J_k^+ T_\mu,$$

on est alors amené à chercher un tenseur $\mathcal{S}_{ikl}$ analogue au tenseur de Belinfante-Rosenfeld, tel que

$$(124) \qquad S_{ik} = J_l^+ \mathcal{S}_{ikl}^+ + J_l^- \mathcal{S}_{ikl}^-.$$

4.6. Remarques sur les opérateurs « moment cinétique ». — On peut alors faire une remarque analogue à celle qui a été faite dans le cas de l'approximation non relativiste concernant les opérateurs moments cinétiques qui sont des constantes du mouvement, c'est-à-dire les opérateurs S'^2, S'_3, J_3^+ et J_3^- mais auparavant nous résumerons les résultats auxquels nous sommes parvenus concernant le tenseur antisymétrique S_{ik} déduit du tenseur moment cinétique T_{ik}.

a. Cas où l'équation (47) *est séparable.* — Pour toutes les représentations $l^+ + l^-$ entier, T_{ik} étant symétrique S_{ik} est identiquement nul.

Pour les représentations où $l^+ + l^-$ est demi-entier,

(125) $$S_{ik} = \begin{vmatrix} S_{ik}^+ & 0 \\ 0 & S_{ik}^- \end{vmatrix},$$

avec

$$S_{ik}^+ = J_l^+ \mathcal{S}_{ikl}, \qquad S_{ik}^- = J_l^- \mathcal{S}_{ikl}.$$

Dans le cas des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on a établi que

(126) $$S_{ikl} = \frac{h}{2}\left[\tilde{\Phi}(\sigma_i \sigma_l \sigma_k - \sigma_k \sigma_l \sigma_i)\Phi\right]$$

Nous établirons dans une étude ultérieure que cette interprétation est également valable pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Ceci suggère, comme on l'avait aussi indiqué à l'approximation non relativiste de la théorie, que l'existence de $\mathcal{S}_{ikl}$ est lié au caractère bivalué de la représentation du groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées.

b. Cas où l'équation (47) *n'est pas séparable.* — Dans ces conditions, le tenseur S_{ik} peut prendre sa forme la plus générale

$$S_{ik} = \begin{vmatrix} S_{i^+k^+} & S_{i^+k^-} \\ S_{i^-k^+} & S_{i^-k^-} \end{vmatrix}.$$

On a obtenu les résultats suivants :

— pour les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ avec $l^+ + l^- = \frac{2n+1}{2}$ et $n > 0$, le tenseur S_{ik} a sa forme la plus générale :

$$S_{ik} = \begin{vmatrix} S_{i^+k^+} & S_{i^+k^-} \\ S_{i^-k^+} & S_{i^-k^-} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta^+ J_l^+ \mathcal{S}_{ikl} & \eta^- J_l^+ \mathcal{S}_{ikl} \\ \eta^+ J_l^- \mathcal{S}_{ikl} & \eta^- J_l^- \mathcal{S}_{ikl} \end{vmatrix},$$

nous déterminerons ultérieurement le tenseur $\mathcal{S}_{ikl}$;

— pour toutes les représentations pour lesquelles $l^+ + l^-$ est entier, on a

$$S_{i^+k^+} = S_{i^-k^-} =,$$

de telle sorte que le tenseur S_{ik} a la forme

$$S_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ik} \\ S_{ik} & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{avec} \quad S_{ik} = J_l \mathcal{S}_{ikl}.$$

Nous n'examinerons pas ici les propriétés de ces tenseurs.

On voit donc que sauf dans le cas simple des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ où $\mathfrak{S}_{ik0}$ est associé aux matrices τ_i, il restera à chercher si pour les autres représentations, il en est de même. On remarquera que pour les représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$, $\mathfrak{S}_{ik}$ est nul et $\mathfrak{S}_{ik0}$ identiquement nul; ce qui signifie que les vecteurs d'onde de cette deuxième représentation correspondent à des ondes de caractère isoboson.

Le tenseur $\mathfrak{S}_{ik0}$ n'est pas le seul à interpréter, on a, en effet, à considérer les projections des opérateurs moments cinétiques qui sont des constantes du mouvement :

a. En premier lieu considérons les opérateurs

$$S'^2 = S'_k S'_k \qquad \text{et} \qquad S'_3 = J'^+_3 + J'^-_3.$$

Ils ont pour valeur moyenne :

$$\langle S'^2 \rangle = s'(s'+1)\hbar^2, \qquad \langle S'_3 \rangle = m'\hbar.$$

Tout au long de cette étude nous nous sommes limités pour des raisons déjà données aux valeurs minimales de s', c'est-à-dire

$$s' = |\, l^+ - l^- \,|.$$

La valeur moyenne de S'_3 est caractérisée par la propriété de changer de signe quand on passe d'une fonction d'onde à la fonction d'onde conjuguée de charge. Comme en plus il prend les valeurs $\pm \frac{1}{2}$ pour les quatre représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, la valeur zéro pour les représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{D}(1, 1)$ et que cette valeur nulle est également possible pour $\mathcal{D}(1, 0)$ ou $\mathcal{D}(0, 1)$, on en conclut qu'il a des propriétés analogues aux opérateurs nombre de baryons et nombre de leptons.

On pourra donc interpréter $S'_{3\,\mathrm{op}}$ comme l'opérateur nombre de baryons $\left[\text{et nombre de leptons pour les représentations } \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$.
Dans l'étude non relativiste, on avait appelé J'_3 l'opérateur « polarisation », ce nom pourrait convenir à S'_3 mais il est préférable de ne pas introduire une nouvelle dénomination.

Nous reviendrons dans une étude ultérieure sur l'interprétation de cet opérateur.

b. Il reste encore les deux opérateurs J_3^+ et J_3^- qui sont caractérisés par les relations

$$J_3^+ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) = m^+ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-),$$
$$J_3^- Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) = m^- Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-)$$

dans un système d'unités où $\hbar$ est pris égal à 1.

Pour trouver une interprétation à ces opérateurs il faut les appliquer aux vecteurs des espaces invariants sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations complexes conjuguées, nous n'examinerons pas ces questions ici.

5° **Formalisme hamiltonien.** — Nous allons donner le formalisme hamiltonien pour tous les cas particuliers des représentations précédemment étudiées.

5.1. Représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. — Considérons le lagrangien (100)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\Phi}(\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^-)\Phi - (J_k^+ \tilde{\Phi}\Gamma_k^+ + J_k^- \tilde{\Phi}\Gamma_k^-)\Phi\right] - \chi_1 \tilde{\Phi}\Phi. \tag{100}$$

On définira les moments généralisés p_k et $\tilde{p}_k$ canoniquement conjugués aux variables Φ et $\tilde{\Phi}$ pour les relations

$$p_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\Phi)}, \qquad \tilde{p}_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\tilde{\Phi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\tilde{\Phi})}, \tag{127}$$

d'où l'on tire

$$p_k = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-), \qquad \tilde{p} = -\frac{1}{2}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\Phi. \tag{128}$$

Ici, comme dans le cas non relativiste, le jacobien de la transformation de l'espace Φ, $\tilde{\Phi}$ en l'espace p_k, $\tilde{p}$ est nul, car

$$D = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(J_i^\pm \Phi)\,\partial(J_k^\pm \Phi)} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(J_i^\pm \tilde{\Phi})\,\partial(J_k^\pm \tilde{\Phi})} \right\| = 0.$$

Il faut donc utiliser le formalisme développé par Dirac ([16]), nous suivrons encore la présentation qui en a été faite par Mercier ([17]). Calculons d'abord l'hamiltonien

$$H = p_k(J_k^+ + J_k^-)\Phi + (J_k^+ + J_k^-)\tilde{\Phi}\tilde{p}_k - \mathcal{L},$$

([16]) P. A. M. Dirac, *Canad. J. Math.*, vol. 2, 1950; vol. 3, 1951.

([17]) A. Mercier, *Analytical and canonical formalism in Physics*, North. Holl. Publ. Co.

on a

$$p_k(J_k^+ + J_k^-)\,\Phi = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,(J_k^+ + J_k^-)\,\Phi,$$

mais d'après les propriétés des matrices $\Gamma_k^{\pm}$ $\left(\text{ici } \Gamma_k^+ = \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\right.$ $\left.\Gamma_k^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix}\right)$, on a

$$\Gamma_k^+ J_k^- \Phi = \Gamma_k^- J_k^+ \Phi = 0,$$

d'où

$$p_k(J_k^+ + J_k^-)\,\Phi = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\,(\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^-)\,\Phi,$$

d'où il reste

$$\text{H} = \chi_1\,\tilde{\Phi}\Phi. \tag{129}$$

Nous montrerons dans une autre étude qu'il est toujours possible de normer ces spineurs à l'unité, d'où l'on déduit

$$\langle \text{H} \rangle = \chi_1. \tag{130}$$

Le jacobien D étant nul, les p_k, $\tilde{p}_k$, Φ, $\tilde{\Phi}$ ne sont pas indépendants, en effet, on a

$$p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-) = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}(\Gamma_k^+\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-\Gamma_k^-) = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\begin{vmatrix} \sigma_k\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\sigma_k \end{vmatrix},$$

soit

$$p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-) = \frac{3}{2}\tilde{\Phi}, \tag{131}$$

d'une façon analogue :

$$(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\tilde{p} = -\frac{3}{2}\Phi. \tag{132}$$

On mettra ces relations sous la forme

$$w_1 \equiv \tilde{\Phi} - \frac{2}{3}p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-) = 0, \qquad w_2 \equiv \Phi + \frac{2}{3}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\tilde{p}_k = 0. \tag{133}$$

Considérons alors les quantités

$$v_1 = -\frac{1}{2}\chi_1\Phi, \qquad v_2 = -\frac{1}{2}\chi_1\tilde{\Phi} \tag{134}$$

et soit l'hamiltonien

$$\begin{aligned} \tilde{\text{H}} &\equiv \text{H} - \left[\frac{\chi_1}{2}\tilde{\Phi}\Phi - \frac{\chi_1}{3}p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\Phi\right]\left[\frac{\chi_1}{2}\tilde{\Phi}\Phi + \frac{\chi_1}{3}\tilde{\Phi}\,(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\tilde{p}_k\right] \\ &\equiv \frac{\chi_1}{3}\left[p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\Phi - \tilde{\Phi}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\tilde{p}_k\right]. \end{aligned} \tag{135}$$

Nous allons montrer que les équations canoniques sont

$$(136\,a)\qquad (J_k^+ + J_k^-)\,\Phi = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_k}, \qquad (J_k^+ + J_k^-)\,\tilde{\Phi} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{p}_k},$$

$$(136\,b)\qquad (J_k^+ + J_k^-)\,p_k = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\Phi}, \qquad (J_k^+ + J_k^-)\,\tilde{p}_k = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{\Phi}}.$$

En effet, on a

$$(J_k^+ + J_k^-)\,\Phi = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_k} = \frac{1}{3}\chi_1(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\Phi,$$

multiplions à gauche par $(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)$,

$$(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,(J_k^+ + J_k^-)\,\Phi = \frac{\chi_1}{3}(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-)\,\Phi.$$

Soit si l'on tient compte des propriétés des matrices Γ_k^+, Γ_k^-, du spineur Φ et des opérateurs J_k^+, J_k^-,

$$(\Gamma_k^+ J_k^+ + \Gamma_k^- J_k^- - \chi_1)\,\Phi = 0.$$

Ce qui est bien l'équation (66). On démontrerait de façon analogue que la seconde relation ($136\,a$) fournit l'équation adjointe de la précédente.

De la même façon :

$$(J_k^+ + J_k^-)\,p_k = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\Phi} = -\frac{1}{3}\chi_1\,p_k(\Gamma_k^+ + \Gamma_k^-).$$

Si, dans cette relation, on remplace p_k par son expression (128), on retrouve bien :

$$J_k^+\,\tilde{\Phi}\Gamma_k^+ + J_k^-\,\tilde{\Phi}\Gamma_k^- + \chi_1\,\tilde{\Phi} = 0.$$

Dans la terminologie de Dirac, H est une relation faible et $\tilde{H}$ une relation forte.

Il est clair que dans le formalisme précédent, au lieu d'utiliser le spineur Φ, on aurait pu prendre les deux spineurs à deux composantes $\varphi_1(\omega^+)$ et $\varphi_2(\omega^-)$ et l'on aurait défini :

$$p_{1k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\,\varphi_1)}, \qquad p_{2k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^-\,\varphi_2)}$$

et de la même façon $\tilde{p}_{1k}$, $\tilde{p}_{2k}$.

On aurait abouti aux mêmes résultats mais le formalisme qu'on a utilisé est évidemment plus élégant.

Si l'on utilise les variables canoniques, le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = p_k (J_k^+ + J_k^-)\Phi + (J_k^+ + J_k^-)\tilde{\Phi}\tilde{p}_k - \chi_1\tilde{\Phi}\Phi \tag{137}$$

et le tenseur moment cinétique :

$$T_{ik} = p_k (J_i^+ + J_i^-)\Phi + (J_i^+ + J_i^-)\tilde{\Phi}\tilde{p}_k - \delta_{ik}\mathcal{L}. \tag{138}$$

Sous cette forme synthétique, il est inutile de distinguer les composantes T_{i+k+} et T_{i-k-}.

On en déduit

$$T_{ii} = p_i (J_i^+ + J_i^-)\Phi + (J_i^+ + J_i^-)\tilde{\Phi}\tilde{p}_i - 3\mathcal{L},$$

soit si l'on tient compte des équations du mouvement qui entraînent, comme on l'a vu $\mathcal{L} = 0$:

$$T_{ii} = \chi_i\tilde{\Phi}\Phi, \tag{139}$$

c'est-à-dire

$$T_{ii} = H. \tag{140}$$

Si l'on considère le tenseur symétrique Θ_{ij}

$$\Theta_{il} = T_{ij} - \frac{1}{2} S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}),$$

on tire

$$\Theta_{ii} = T_{ii}, \qquad \text{d'où} \qquad \Theta_{ii} = H.$$

Donc l'opérateur S_{ij} ne modifie pas l'énergie hamiltonienne du champ et ceci lève la réserve qu'on avait faite sur l'interprétation de l'opérateur S_{ij} comme opérateur de spin.

5.2. Cas des représentations $l^+ + l^-$ demi-entier différent de $\frac{1}{2}$. — *Cas du lagrangien* (111). — Considérons alors le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}_l\sigma_k J_k^+ \Phi_l - J_k^+ \tilde{\Phi}_l\sigma_k\Phi_l + J_k^+ \Phi'_l\, J_k^+ \Phi'_l] - \chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l\Phi_l + \frac{1}{2}\chi_\alpha^2\Phi'_l\,\Phi'_l. \tag{111}$$

On définira alors les moments généralisés $p_{lk}, \tilde{p}_{lk}, p'_{kl}$ canoniquement conjugués aux variables Φ_l, $\tilde{\Phi}_l$, Φ'_l par les relations

$$p_{kl} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi_l)}, \qquad p'_{kl} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi'_l)}, \qquad \tilde{p}_l = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(J_k^+\Phi'_l)}. \tag{141}$$

Du lagrangien, on déduit immédiatement

$$p_{kl} = \frac{1}{2}\Phi_l\sigma_k, \qquad \tilde{p}_{kl} = -\frac{1}{2}\sigma_k\Phi_l, \qquad p'_{kl} = J_k^+\Phi'_l. \tag{142}$$

Ici également le jacobien de la transformation de l'espace de configuration des variables Φ_l, $\tilde{\Phi}_l$, Φ'_l, $J_k^+\Phi_l$, $J_k^+\tilde{\Phi}'_l$, $J_k^+\Phi'_l$, en l'espace des phases, Φ_l, $\tilde{\Phi}_l$, Φ'_l, p_{kl}, $\tilde{p}_{kl}$, p'_{kl}, est nul, on utilisera donc le formalisme de Dirac.

On a la relation faible

$$H = p_{kl}J_k^+\Phi_l + J_k^+\Phi_l\tilde{p}_{kl} + p'_{kl}J_k^+\Phi'_l - \mathcal{L} = \chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l\Phi_l + \frac{1}{2}(p'_{kl}p'_{kl} - \chi_\alpha^2\Phi'_l\Phi'_l),$$

soit

$$H = \chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l\Phi_l + \frac{1}{2}(p'_{kl}p'_{kl} - \chi_\alpha^2\Phi'_l\Phi'_l), \tag{143}$$

d'où

$$\langle H \rangle = \chi_{1\alpha}\langle\tilde{\Phi}_l\Phi_l\rangle + \frac{1}{2}\langle p'_{kl}p'_{kl} - \chi_\alpha^2\Phi'_l\Phi'_l\rangle. \tag{144}$$

De la nullité du jacobien on déduit que les grandeurs p_{kl}, $\tilde{p}_{kl}$, Φ_l, $\tilde{\Phi}_l$ ne sont pas indépendantes.

En effet, on a

$$p_{kl}\sigma_k = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_l\sigma_k\sigma_k = \frac{3}{2}\tilde{\Phi}_l, \qquad \sigma_k\tilde{p}_{kl} = -\frac{1}{2}\sigma_k\sigma_k\tilde{\Phi}_l = -\frac{3}{2}\tilde{\Phi}_l.$$

On mettra ces deux relations sous la forme

$$w_1 \equiv \tilde{\Phi}_l - \frac{2}{3}\tilde{p}_{kl}\sigma_k = 0, \qquad w_2 \equiv \Phi_l + \frac{2}{3}\sigma_k\tilde{p}_{kl} = 0. \tag{145}$$

Introduisons alors les quantités

$$v_1 = -\frac{1}{2}\chi_{1\alpha}\Phi_l, \qquad v_2 = -\frac{1}{2}\chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l \tag{146}$$

et considérons l'hamiltonien fort

$$\mathrm{H} \equiv H - \left(\frac{1}{2}\chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l\Phi_l - \frac{\chi_{1\alpha}}{3}p_{kl}\sigma_k\Phi_l\right) - \left(\frac{1}{2}\chi_{1\alpha}\Phi_l\Phi_l + \frac{1}{3}\chi_{1\alpha}\tilde{\Phi}_l\sigma_k\tilde{p}_{kl}\right),$$

il vient

$$\tilde{H} = \frac{1}{3}\chi_1[p_{kl}\sigma_k\Phi_l - \tilde{\Phi}_l\sigma_k\tilde{p}_{kl}] + \frac{1}{2}(p'_{kl}p'_{kl} - \chi_\alpha^2\Phi'_l\Phi'_l), \tag{147}$$

nous allons montrer que les équations canoniques sont :

$$J_k^+\Phi_l = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_{kl}}, \qquad J_k^+\Phi_l = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{p}_{kl}}; \tag{148 a}$$

$$J_k^+\Phi'_l = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{kl}}; \tag{148 b}$$

$$(149\,a)\qquad J^{+}_{kl}p_{kl} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Phi_l}, \qquad J^{+}_{k}\tilde{p}_{kl} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Phi_l};$$

$$(149\,b)\qquad J'_{k}p'_{kl} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi'_l}.$$

Pour ($148\,a$) et ($148\,b$) le résultat est évident. Par ailleurs, on a

$$J^{+}_{k}\Phi_l = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{kl}} = \frac{1}{3}\chi_{1\alpha}\sigma_k\Phi_l, \qquad \text{soit} \quad \sigma_k J^{+}_{k}\Phi_l = \chi_{1\alpha}\Phi_l,$$

c'est bien l'équation d'ondes. De même

$$J^{+}_{kl}p_{kl} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Phi_l} = -\frac{1}{3}\chi_1 p_{kl}\sigma_k = -\frac{1}{3}\chi_1\left(\frac{1}{2}\tilde{\Phi}^{-}_{l}\sigma_k\sigma_k\right) = -\frac{1}{2}\chi_1\tilde{\Phi}_l.$$

Le tenseur moment cinétique s'écrit

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Phi}_l\sigma_k J^{+}_{i}\Phi_l - J^{+}_{i}\tilde{\Phi}_l\sigma_k\Phi_l\right) + J^{+}_{i}\Phi'_l\, J^{+}_{k}\Phi'_l - \delta_{ik}\mathcal{L},$$

d'où

$$(150)\qquad T_{ii} = H.$$

On retrouve un résultat analogue à celui des représentations

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

5.3. Représentation avec $l^{+} + l^{-}$ entier. — *a. Cas où l'équation* (47) *est séparable.* — Considérons alors le lagrangien (119) :

$$(119)\qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[J^{+}_{k}T_{\mu}\,J^{+}_{k}T_{\mu} + J^{+}_{k}T'_{\mu}\,J^{+}_{k}T'_{\mu} + \chi^2_{\alpha}\,T_{\mu}T_{\mu} + \chi^2_{\beta}\,T'_{\mu}T'_{\mu}\right].$$

Les moments canoniquement conjugués aux variables de champ T_{μ} et T'_{μ} sont définis par les relations

$$(151)\qquad p_{k\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J^{+}_{k}T_{\mu})} = J^{+}_{k}T_{\mu}, \qquad p'_{k\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J^{+}_{k}T'_{\mu})} = J^{+}_{k}T'_{\mu};$$

d'où l'on déduit l'hamiltonien

$$(152)\qquad H = p_{k\mu}J^{+}_{k}T_{\mu} + p'_{k\mu}J^{+}_{k}T'_{\mu} - \mathcal{L},$$

soit

$$(153)\qquad H = \frac{1}{2}\left[p_{k\mu}p_{k\mu} + p'_{k\mu}p'_{k\mu} - \chi^2_{\alpha}\,T_{\mu}T_{\mu} - \chi^2_{\beta}\,T'_{\mu}\right],$$

on déduit immédiatement de cet hamiltonien les équations du mouvement

$$(154)\quad \left\{\begin{aligned} &J_k^+ T_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_{k\mu}} = p_{k\mu}, && J'_k T'_\mu = \frac{\partial H}{\partial p'_{k\mu}} = p'_{k\mu}, \\ &J_k^+ p_{k\mu} = -\frac{\partial H}{\partial T_\mu} = \chi_\alpha^2 T_\mu, && J_k^+ p'_{k\mu} = -\frac{\partial H}{\partial T'_\mu} = \chi_\beta^2 T'_\mu, \end{aligned}\right.$$

soit précisément

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2) T_\mu = 0, \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi_\beta^2) T'_\mu = 0,$$

on observera qu'on a encore

$$T_{ii} = H.$$

b. Cas où l'équation (47) *n'est pas séparable.* — A partir du lagrangien (120) :

$$(120)\qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}[J_k^+ T_\mu J_k^+ T_\mu + J_k^- T_\mu J_k^- T_\mu - \chi^2 T_\mu T_\mu T_\mu],$$

on retrouve d'une façon analogue les résultats précédents :

$$(155)\qquad p_{k\mu}^{\pm} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^{\pm} T_\mu)} J_k^{\pm} T_\mu,$$

soit

$$(155)\quad H = p_{k\mu}^+ J_k^+ T_\mu + p_{k\mu}^- J_k^- T_\mu - \mathcal{L}, \qquad H = \frac{1}{2}(p_{k\mu}^+ p_{k\mu}^+ + p_{k\mu}^- p_{k\mu}^- - \chi^2 T_\mu T_\mu).$$

6. **L'opérateur de charge.** — Ici comme à l'approximation non relativiste, on suivra le raisonnement de Pauli [18]. La charge est liée à l'invariance du lagrangien sous la transformation de jauge :

$$(94)\qquad \Phi \to \Phi e^{i\alpha}, \qquad \tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi} e^{-i\alpha}.$$

Ceci nous a conduit à l'expression générale du courant de charge V_k donné par la relation (96) :

$$(96)\quad V_k^+ = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \Phi)} \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^+ \tilde{\Phi})} \tilde{\Phi}, \qquad V_k^- = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \Phi)} \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (J_k^- \tilde{\Phi})} \tilde{\Phi}.$$

Mais considérons les fonctions $Z_{l^+ l^- s'}^{m^+ m^- m'}(\omega^+, \omega^-)$ qui sont les constituants des vecteurs d'onde associés aux représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations tridimensionnelles complexes :

$$Z_{l,^+ l^-, s'}^{m^+, m^-, m}(\omega^+, \omega^-) = e^{j(m^+\varphi^+ + m^-\varphi^-)} \sum (l^+, l^-, s', -m' \mid l^+, l^-, -m'^+, -m'^-) \\ \times e^{j(m'^+\psi^+ + m'^-\psi^-)} \Theta_{l^+}^{m^+, m'^+}(\theta^+) \Theta_{l^-}^{m^-, m'^-}(\theta^-),$$

([18]) W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 3, 1941, 203.

de sorte que les relations (94) sont réalisées en posant

$$\alpha = m'\beta' + m^-\beta^- + m'^+\beta'^+ + m'^-\beta'^-, \tag{157}$$

mais à cause de la propriété des paramètres de Clebsch-Gordan d'être nuls sauf si $m'^+ + m'^- = m'$, l'expression s'écrit

$$\alpha = m^+\beta^+ + m^-\beta^- + m'\gamma', \tag{158}$$

de sorte que l'invariance de jauge revient à l'invariance du lagrangien sous une variation arbitraire de φ^+, ψ^+, φ^-, ψ^- ; or pour établir cette invariance il faut calculer $\delta\Phi$.

De $\Phi \to \Phi e^{i\alpha}$, on déduit

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\,\delta\alpha = i\Phi\,\delta\alpha, \tag{159}$$

compte tenu de l'expression (158) cette relation devient

$$\delta\Phi = i\Phi(m^+\,\delta\beta^+ + m^-\,\delta\beta^- + m'\,\delta\gamma'), \tag{160}$$

considérons par exemple ce que donne cette formule pour l'un des spineurs donnés dans les expressions (15)

$$\varphi = \begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ Z^{-\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e^{i\alpha}\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} Z^{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \\ e^{i\alpha} Z^{-\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2}}(\omega^+,\ \omega^-) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\delta\Phi = \frac{i}{\hbar}(\sigma_3\,J_3^+ + S'_3)\,\Phi. \tag{161}$$

On reconnaît là une formule analogue à la formule du guidage de de Broglie. La formule (161) est un cas particulier de (160); si l'on désigne par I_3^+ et I_3^- les matrices de rotation infinitésimale correspondant à la troisième rotation dans les espaces des vecteurs d'onde on aboutirait à la formule générale

$$\delta\Phi = \frac{i}{\hbar}(I_3^+ J_3^+ + I_3^- J_3^- + S'_3)\,\Phi, \tag{162}$$

formule qui comme la précédente est la formule du guidage de de Broglie. L'opérateur de charge est

$$Q = \frac{\varepsilon}{\hbar}(I_3^+ J_3^+ + I_3^- J_3^- + S'_3) \tag{163}$$

et sa valeur moyenne donne la formule de Nishijima-Gell-Mann :

(164) $$\langle Q \rangle = \frac{\varepsilon}{\hbar}[\langle I_3^+ J_3^+ \rangle + \langle I_3^- J_3^- \rangle + \langle S'_3 \rangle].$$

Nous vérifierons, dans deux études ultérieures, l'une réservée aux bosons, l'autre aux fermions, que cette relation redonne bien dans tous les cas expérimentaux la formule de Nishijima-Gell-Mann.

Dans le cas de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ comme on l'a montré

$$I_3^+ = \sigma_3, \qquad I_3^- = 0;$$

d'où

$$Q = \frac{\varepsilon}{\hbar}(\sigma_3 J_3^+ + S'_3).$$

Pour $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, d'une façon analogue :

$$I_3^+ = 0, \qquad I_3^- = \sigma_3,$$

d'où

(165) $$Q = \frac{\varepsilon}{\hbar}(\sigma_3 J_3^+ + S'_3).$$

Enfin pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on pourra appliquer la formule (160) au quadrivecteur A_μ de l'expression (25), on vérifie immédiatement que

(166) $$Q = \frac{\varepsilon}{\hbar}(\Gamma_3^+ J_3^+ + \Gamma_3^- J_3^- + S'_3),$$

avec

$$T_3^+ = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma_3^- = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}$$

qui sont bien les opérateurs I_3^+ et I_3^- dans un espace quadridimensionnel. Nous donnerons ultérieurement les formules particulières correspondant aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\mathcal{D}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$.

7. Conclusions. — Dans cette étude à partir d'un simple postulat d'hypersphéricité, on a développé d'une façon générale la mécanique ondulatoire relativiste des ondes associées à une structure interne des particules élémentaires et caractérisée par son invariance sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes. D'une façon précise on a cherché l'équation vérifiée par les vecteurs d'onde des représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ telle que chaque composante satisfasse à l'équation du second ordre.

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\varphi = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\varphi = 0$$

ou à l'équation

$$(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)\varphi = 0.$$

Par ailleurs, on a donné un ensemble de solutions des équations précédentes et le problème qui reste à résoudre est de reconstituer à partir de ces solutions des vecteurs d'onde qui eux satisfassent aux équations d'onde. On a résolu cette équation dans le cas simple des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Nous étudierons ce problème dans un autre travail qui comportera essentiellement les points suivants :

a. classification des vecteurs d'onde associés à chaque représentation;

b. interprétation des opérateurs moments cinétiques J_3^+, J_3^-, S'_3;

c. interprétation du tenseur $\mathcal{S}_{ijk}$ analogue au tenseur de Belinfante-Rosenfeld des théories quantiques usuelles.

En outre, un champ très vaste s'ouvre pour l'étude des intersections entre ces différentes ondes, étude qu'on pourra entreprendre avec un formalisme analogue à celui des théories usuelles. En première approximation, on cherchera à écrire les lagrangiens d'interactions invariants sous le groupe des rotations complexes conjuguées, ce qui est facilité par la mise en évidence pour la représentation où $l^+ + l^-$ est demi-entier du vecteur V_k de composantes

$$V_k = \begin{pmatrix} V_k^+ = \tilde{\Phi}_l \, \sigma_k \Phi_l \\ V_k^- = \tilde{\Phi}'_l \, \sigma_k \Phi'_l \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour l'interaction d'une onde de fermions et d'une onde de bosons associés aux représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$, on aura le lagrangien d'interaction

$$\mathcal{L}_i = g\,\varepsilon_{klm} V_k^+ F_{lm} = g\,\varepsilon_{klm} (V_k^+, V_k^-) \begin{vmatrix} F_{lm}^+ \\ F_{lm}^- \end{vmatrix} = g\,\varepsilon_{klm} (V_k^+ F_{lm}^+ + V_k^- F_{lm}^-),$$

soit encore

$$\mathcal{L} = g\,\varepsilon_{klm} (\tilde{\Phi}_j \Gamma_k^+ F_{lm}^+ \Phi_j + \tilde{\Phi}_j \Gamma_k^- F_{lm}^- \Phi_j). \tag{167}$$

Il est facile de voir que dans le cas où Φ est le spineur correspondant à l'une des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ou $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, l'équation se décompose, ce qui est en accord avec la non-conservation de la parité.

Dans une étude antérieure ([5]), nous avons obtenu une classification des particules élémentaires très proche de celle de Nishijima-Gell-Mann en considérant ces particules comme des états excités du rotateur de Nahano. L'étude qu'on vient d'exposer montre qu'il faut considérer, en réalité, ces particules, comme des ondes permanentes représentées mathématiquement par des vecteurs de l'espace invariant sous les représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées, les opérateurs $J_1^+ \pm iJ_2^+$ et $J_1^- \pm iJ_2^-$ effectuant la transformation d'un vecteur d'état de cet espace à un autre vecteur état du même espace.

Une question qui vient naturellement à l'esprit est le lien qui existe entre la mécanique ondulatoire usuelle et cette mécanique ondulatoire interne. Ce lien est fourni par l'isomorphisme entre le groupe de Lorentz et le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées, d'où l'on déduit qu'à une onde invariante sous le groupe de Lorentz on peut associer une et une seule onde invariante sous le groupe des rotations complexes conjuguées et inversement de sorte que cet isomorphisme local dans le cadre d'une interprétation causale de la mécanique ondulatoire prenant pour base l'existence du niveau subquantique, peut être considéré comme l'expression mathématique de la dualité physique entre ondes et corpuscules. En effet, si on laisse au mot onde sa signification habituelle (onde invariante sous le groupe de Lorentz) et si l'on considère que corpuscule est synonyme d'ondes permanentes invariantes sous le groupe des rotations complexes conjuguées, alors dans un gaz dense de tels corpuscules, supposé représenté en première approximation le milieu subquantique, une certaine organisation de ce milieu chaotique fera émerger les ondes associées à ces corpuscules.

Nous voudrions maintenant faire la remarque suivante : tout le formalisme développé dans cette étude pourrait être interprété dans le cadre des théories habituelles de l'espace du spin isotopique. Plusieurs auteurs ([19]) ont déjà envisagé pour cet espace abstrait un espace quadri-

([19]) *Voir* D'ESPAGNAT et PRENTKI dans *Progress in elementary particles and cosmic Ray Physics*, vol. 4, North. Holl. Pupl. Co.

dimensionnel à métrique lorentzienne mais aucun n'a utilisé le groupe des rotations complexes conjuguées, pourtant l'emploi de ce dernier groupe est plus intéressant car il fournit non seulement le spin isotopique et l'étrangeté, mais aussi le nombre de baryons, ce que ne fournit pas un espace quadridimensionnel à métrique lorentzienne. De plus, comme on l'a vu, les leptons s'intègrent très aisément dans ce formalisme, ce qu'ils ne font dans aucun autre. Quant à l'emploi d'un tel espace de spin isotopique abstrait s'il permet d'expliquer les interactions, il n'attribue aucune propriété physique aux opérateurs utilisés ce qui revient à douer le point qui représente le corpuscule de propriétés difficiles à comprendre. La théorie qu'on vient de développer semble montrer au contraire, que l'idée d'une structure des corpuscules permet d'interpréter les résultats qu'on obtient d'une façon très simple.

En terminant nous voudrions remercier M. le Professeur de Broglie, sans l'appui duquel ce travail n'aurait pu voir le jour, pour tous ses encouragements et ses conseils. Nos remerciements vont aussi à M. le Professeur Bohm pour son amical soutien et aux physiciens de l'Institut Henri Poincaré qui ont bien voulu nous faire part de leurs suggestions et de leurs critiques.