ANNALES DE L'I. H. P.

GUY RIDEAU

Un modèle résoluble en théorie quantique des champs : le modèle de Wentzel

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 2 (1961), p. 91-128
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1961__17_2_91_0>

Un modèle résoluble en théorie quantique des champs : le modèle de Wentzel.

par

Guy RIDEAU,

Institut H. Poincaré.

Sommaire. — Partant des résultats obtenus dans un travail antérieur [1], on donne la construction explicite des vecteurs propres du modèle de Wentzel selon les différents cas possibles. Pour chacun d'eux est étudiée la structure correspondante de l'espace de Hilbert, ainsi que le mode d'obtention des créateurs et annihilateurs physiques. On montre qu'en présence d'états liés, ou d'états pathologiques, il n'existe pas de transformation canonique permettant de passer des créateurs (et annihilateurs) libres aux créateurs (et annihilateurs) physiques.

Dans un précédent article, publié en collaboration avec A. Chevalier, nous avions donné les formes explicites des opérateurs de création et d'annihilation des particules physiques dans le modèle de Wentzel, en étudiant sous cet angle les différents cas possibles, en fonction des valeurs de la constante de couplage ([1]).

Afin d'étudier le modèle plus en détail, nous nous sommes attachés à la construction des vecteurs propres de l'hamiltonien total et les résultats obtenus font l'objet du présent article. Nous nous sommes tout particulièrement intéressés aux cas où apparaissent soient des états liés, soient les états dits pathologiques, et à la caractérisation de la structure de l'espace de Hilbert sous ces deux hypothèses, structure à laquelle nous avons relié la construction des opérateurs de création et d'annihilation des particules physiques.

Il n'est pas interdit d'espérer que les résultats obtenus ici sont, pour une part, susceptibles de généralisation à des modèles plus réalistes et, pour cette raison il nous a semblé utile de faire pour le modèle de Wentzel ce qui a été fait, d'une manière si intensive, pour le modèle du méson scalaire neutre. Cette étude nous a paru d'autant plus s'imposer que, tout en restant élémentaire (au sens du mot « élémentaire » en théorie quantique des champs) le modèle de Wentzel présente des traits beaucoup plus susceptibles de susciter la réflexion sur les problèmes de structure des théories de champ, et d'aider, en même temps, à leur compréhension.

Nous n'avons pas repris les questions de renormalisation et de passage à la source ponctuelle, qui avaient été discutées lors du précédent article. Une des raisons a été l'ambiguïté propre au problème de la renormalisation de la constante de couplage, ambiguïté qui ne pouvait pas plus être levée par l'étude détaillée du modèle. A vrai dire, notre but n'a pas été d'apporter une contribution au problème des divergences en théorie des champs mais bien plus, un peu dans la ligne des travaux de van Hove, de nous en affranchir pour diriger surtout notre attention sur la description des différentes formes d'espace de Hilbert où se trouve plongé le modèle.

Nous avons placé en début d'exposé une assez longue étude mathématique où sont utilisés des résultats classiques dus à Muskhelishvili et son école ([2]) sur les équations intégrales singulières. Nous concevons bien les inconvénients d'une telle présentation, mais, l'étude entière du modèle étant commandée par quelques propriétés mathématiques relativement simples, il nous a paru plus commode d'éviter au lecteur l'inconvénient de reports continuels à un appendice.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE.

I. *Étude d'une équation intégrale singulière.* — Nous voulons résoudre l'équation intégrale singulière suivante :

$$\text{(A)}\qquad w(\mathbf{k}) + \frac{2\lambda}{1-2\lambda\,F^{-}(\omega_k)}\int d\mathbf{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})^2}{2\,\omega_{k'}}\,\frac{1}{\omega_k-\omega_{k'}-i\varepsilon}\,w(\mathbf{k}') = \frac{1}{1-2\lambda\,F^{-}(\omega_k)},$$

$$k=|\mathbf{k}|,\qquad \omega_k=\sqrt{k^2+m^2},\qquad F(z)=\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{z^2-\omega_k^2}.$$

Posons :

$$W(z) = 1 - 2\lambda \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k} \frac{w(\mathbf{k})}{z - \omega_k}, \qquad (z, \text{ variable complexe});$$

$W(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe muni d'une coupure de m à ∞ sur l'axe réel, et tendant vers 1 quand z tend vers l'infini ([2]).

Sur la coupure, en notant que $w(\mathbf{k})$ ne dépend que de k,

$$W^+(x) - W^-(x) = 8\pi^2\lambda i \sqrt{x^2 - m^2} f(x)^2 w(\sqrt{x^2 - m^2}) \qquad (x > m).$$

Donc :

$$\frac{1}{8\pi^2\lambda ikf(\omega_k)^2}(W^+(\omega_k) - W^-(\omega_k)) = w(\mathbf{k}).$$

Comme :

$$8\pi^2\lambda ikf(\omega_k)^2 = (1 - 2\lambda F^+(\omega_k)) - (1 - 2\lambda F^-(\omega_k)),$$

il vient finalement, à partir de (A),

$$\text{(B)} \qquad \frac{W^+(x)}{W^-(x)} = \frac{1 - 2\lambda F^+(x)}{1 - 2\lambda F^-(x)} \qquad (m < x < \infty)$$

et l'on montre aisément qu'étant donnée $W(z)$, holomorphe dans le plan complexe muni d'une coupure de m à l'∞ sur l'axe réel, tendant vers 1 quand $|z| \to \infty$ et vérifiant (B) sur la coupure, la fonction :

$$w(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^2 i\lambda kf(\omega_k)^2}[W^+(\omega_k) - W^-(\omega_k)]$$

vérifie l'équation intégrale singulière (A).

Considérons la solution particulière suivante de (B) :

$$X(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_m^\infty \frac{dx}{x - z} \log \frac{1 - 2\lambda F^+(x)}{1 - 2\lambda F^-(x)},$$

en convenant de choisir comme branche du logarithme celle pour laquelle $\lim\limits_{x \to \infty} \log \frac{1 - 2\lambda F^+(x)}{1 - 2\lambda F^-(x)} = 0$. Nous aurons deux cas à distinguer :

α. $1 - 2\lambda F(m) > 0$, condition pour que le modèle de Wentzel n'ait ni états liés, ni états pathologiques ([1]).

Si alors nous suivons par continuité la variation du logarithme, nous voyons que $\lim\limits_{x \to m} \log \frac{1 - 2\lambda F^+(x)}{1 - 2\lambda F^-(x)} = 0$ (l'argument de $1 - 2\lambda F(m)$ étant nul). Dans ce cas ([2], chap. 10), $X(z)$ est une fonction non nulle dans toute partie finie du plan et telle que $X(\infty)=1$. Si $W(z)$ est une quelconque solution de (B), $\frac{W(z)}{X(z)}$ est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe et tendant vers 1 quand $|z|\to\infty$, si la même condition est imposée à $W(z)$. Il résulte alors du théorème de Liouville que la seule solution de (B) tendant vers 1 quand $|z|\to\infty$ est précisément $X(z)$.

β. $1-2\lambda F(m)<0$, auquel cas le modèle de Wentzel a, soit des états liés, soit des états pathologiques ([1]).

En suivant par continuité la variation du logarithme, nous aurons $\lim_{x\to m}\log\frac{1-2\lambda F^+(x)}{1-2\lambda F^-(x)}=-2\pi i$, car, dans le voisinage de $x=m$, les parties réelle et imaginaire de $1-2\lambda F^+(x)$ sont négatives ($\lambda<0$).

Dans ces conditions ([2], chap. 10), la fonction $W_0(z)=\frac{X(z)}{z-m}$, qui satisfait aussi à la condition (B), est bornée pour $z=m$, tend vers zéro quand $|z|\to\infty$ et reste non nulle dans toute portion finie du plan. Toute solution de (B) ayant au plus un pôle à l'infini s'écrit $W_0(z)P(z)$, où $P(z)$ est un polynome. En particulier, les solutions de (B) tendant vers 1 quand $|z|\to\infty$ sont de la forme

$$W(z)=z\,W_0(z)+\alpha\,W_0(z)\qquad(\alpha,\ \text{constante quelconque}).$$

Comme $w(\mathbf{k})$, solution de (A), est donnée par

$$w(\mathbf{k})=\frac{W^+(\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}=\frac{W^-(\omega_k)}{1-2\lambda F^-(\omega_k)},$$

nous en concluons d'abord que $w(\mathbf{k})$ est une quantité réelle, ensuite que, dans le cas (α) :

$$w(\mathbf{k})=\frac{X^+(\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}$$

et que, dans le cas (β) :

$$w(\mathbf{k})=\frac{\omega_k W_0^+(\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}+\alpha\frac{W_0^+(\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}.$$

Il s'ensuit que la fonction $w_0(\mathbf{k})=\frac{W_0^+(\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}$ est solution de l'équation (A) sans second membre, et l'on montre facilement que :

$$W_0(z)=-2\lambda\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{w_0(\mathbf{k})}{z-\omega_k}.$$

II. *Étude d'une équation nonlinéaire.* — Soit l'équation

$$\text{(C)} \qquad w(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + 2\lambda \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w(\mathbf{k}')}{\omega_k + \omega_{k'}}}.$$

Posons

$$W(z) = 1 - 2\lambda \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w(\mathbf{k}')}{z - \omega_{k'}}.$$

En multipliant (C) par $8\pi^2 ikf(\omega_k)^2$, il vient

$$W^+(\omega_k) - W^-(\omega_k) = \frac{1}{W(-\omega_k)} 8\pi^2 i\lambda kf(\omega_k)^2.$$

Autrement dit, la fonction $W(z)\,W(-z)$ est une fonction paire de z, holomorphe dans le plan complexe muni de deux coupures $-\infty$ à $-m$ et de m à ∞ sur l'axe réel, le saut sur cette dernière étant égal à $8\pi^2 i\lambda kf(\omega_k)^2$. En tenant compte de $\lim\limits_{|z|\to\infty} W(z) = 1$, il vient nécessairement

$$W(z)\,W(-z) = 1 - 2\lambda\,F(z),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{W^+(\omega_k)}{W^-(\omega_k)} = \frac{1 - 2\lambda\,F^+(\omega_k)}{1 - 2\lambda\,F^-(\omega_k)}$$

c'est-à-dire que toute solution de (C) [quand (C) a des solutions] est solution de (A).

Étudions la réciproque

Cas α. — Il y a une seule solution $w(\mathbf{k})$ de (A) et;

$$W(z) = 1 - 2\lambda \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k} \frac{w(\mathbf{k})}{z - \omega_k}$$

vérifie la condition (B) et n'a pas de zéros. La fonction $\dfrac{1 - 2\lambda\,F(z)}{W(-z)}$ est alors une fonction tendant vers 1 quand $|z| \to \infty$, holomorphe dans tout le plan complexe muni d'une coupure sur l'axe réel de m à ∞, et vérifiant la condition (B) sur cette coupure. D'après l'unicité de la solution de (B) :

$$W(z) = \frac{1 - 2\lambda\,F(z)}{W(-z)},$$

d'où se déduit l'équation (C) en faisant $z = \omega_k - i\varepsilon$ et en notant que $w(\mathbf{k}) = \dfrac{W^-(\omega_k)}{1 - 2\lambda\,F^-(\omega_k)}$.

Cas β. — Si $w_\alpha(\mathbf{k})$ est solution générale de (A) alors,

$$1-2\lambda\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{w_\alpha(\mathbf{k})}{z-\omega_k}=(z+\alpha)\,W_0(z),$$

où $W_0(z)$ est holomorphe, non nulle, dans le plan complexe muni d'une coupure sur l'axe réel de m à ∞. La fonction $\Gamma_\alpha(z)=\dfrac{1-2\lambda\,F(z)}{(\alpha-z)\,W_0(-z)}$ tend vers 1 quand $|z|\to\infty$, est holomorphe dans tout le plan complexe muni d'une coupure sur l'axe réel de m à ∞, sauf en $z=\alpha$ où elle possède un pôle de partie principale $\dfrac{1-2\lambda\,F(\alpha)}{(\alpha-z)\,W_0(-\alpha)}$. Sur la coupure le saut de $\Gamma_\alpha(z)$ est égal à $8\pi^2 i\lambda k f(\omega_k)^2\,\dfrac{1}{(\alpha-\omega_k)\,W_0(-\omega_k)}$. On déduit aisément de tout ceci :

$$\frac{1-2\lambda\,F(z)}{(\alpha-z)\,W_0(-z)}=\frac{1-2\lambda\,F(\alpha)}{(\alpha-z)\,W_0(-\alpha)}$$
$$+1-2\lambda\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{1}{z-\omega_k}\,\frac{1}{(\alpha-\omega_k)\,W_0(-\omega_k)}.$$

et si α est égal à une racine de $1-2\lambda\,F(z)=0$, nous voyons que $\dfrac{1}{(\alpha-\omega_k)\,W_0(-\omega_k)}$ vérifie l'équation (A). Supposons donc α égal à une telle racine. $\Gamma_\alpha(z)$ vérifie la condition (B), tend vers 1 quand $|z|\to\infty$, est holomorphe dans tout le plan complexe muni d'une coupure sur l'axe réel de m à ∞. Donc,

$$\Gamma_\alpha(z)=(z+\beta)\,W_0(z).$$

soit :

$$1-2\lambda\,F(z)=(z+\beta)\,(\alpha-z)\,W_0(z)\,W_0(-z)$$

et la parité de $1-2\lambda\,F(z)$ et de $W_0(z)\,W_0(-z)$ entraîne nécessairement $\alpha=\beta$. Si, alors, nous faisons $z=\omega_k-i\varepsilon$ dans :

$$(z+\alpha)\,W_0(z)\,(\alpha-z)\,W_0(-z)=1-2\lambda\,F(z),$$

il vient :

$$w_\alpha(\mathbf{k})=\frac{(\omega_k+\alpha)\,W_0^-(\omega_k)}{1-2\lambda\,F^-(\omega_k)}=\frac{1}{(\alpha-\omega_k)\,W_0(-\omega_k)}$$
$$=\frac{1}{1+2\lambda\displaystyle\int d\mathbf{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}}\,\frac{w_\alpha(\mathbf{k}')}{\omega_k+\omega_{k'}}},$$

c'est-à-dire l'équation (C).

Comme, suivant les cas, $1 - 2\lambda F(z) = 0$ a les racines $\pm\sigma$ de $\pm i\rho$([1]), il s'ensuit, dans chaque cas, l'existence de deux solutions communes à l'équation (A) et à l'équation (C).

III. *Détermination de* V (**k**, **l**). — Nous voulons déterminer V (**k**, **l**), fonction symétrique des variables **k** et **l**, et vérifiant l'équation

$$\int d\mathbf{k}'\, \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^*\, V(\mathbf{k}', \mathbf{l}) = \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}).$$

En posant : $V(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 2\lambda \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{f(\omega_l)}{\sqrt{2\omega_l}} W(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, nous nous ramènerons à la résolution de l'équation intégrale

$$(\mathrm{A}') \quad W(\mathbf{k}, \mathbf{l}) + \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda F^-(\omega_k)} \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{\omega_k - \omega_{k'} - i\varepsilon} W(\mathbf{k}', \mathbf{l}) = \frac{1}{1 - 2\lambda F^-(\omega_k)} \frac{1}{\omega_k + \omega_l}.$$

Soit $w(\mathbf{k})$ une solution commune de (A) et (C). La fonction $\frac{w(\mathbf{k})\, w(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l}$ est telle que :

$$\begin{aligned} &\frac{w(\mathbf{k})\, w(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l} + \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda F^-(\omega_k)} \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{\omega_k - \omega_{k'} - i\varepsilon} \frac{w(\mathbf{k}')\, w(\mathbf{l})}{\omega_{k'} + \omega_l} \\ &= \frac{1}{\omega_k + \omega_l} \left\{ w(\mathbf{k})\, w(\mathbf{l}) + \frac{2\lambda\, w(\mathbf{l})}{1 - 2\lambda F^-(\omega_k)} \left[\int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w(\mathbf{k}')}{\omega_k - \omega_{k'} - i\varepsilon} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w(\mathbf{k}')}{\omega_{k'} + \omega_l} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1 - 2\lambda F^-(\omega_k)} \frac{1}{\omega_k + \omega_l}, \end{aligned}$$

en tenant compte de (A) et (C).

Dans le cas (α) où l'équation (A), homogène n'a pas de solutions non nulles, nous avons obtenu la seule solution possible de (A′).

Dans le cas (β), $\frac{w(\mathbf{k})\, w(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l}$ est une solution particulière de (A′). Donc, en tenant compte de la symétrie de W (**k**, **l**) :

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{w(\mathbf{k}(\, w(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l} + \mu\, w_0(\mathbf{k})\, w_0(\mathbf{l}).$$

1° Quand $1 - 2\lambda F(z) = 0$ a les deux racines réelles $\pm\sigma$, W (**k**, **l**) doit encore satisfaire à la condition

$$(\mathrm{A}'') \qquad \frac{1}{\sigma + \omega_l} = 2\lambda \int \frac{d\mathbf{k}'}{\sigma - \omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} W(\mathbf{k}', \mathbf{l}).$$

Prenons comme solution commune à (A) et (C) la fonction

$$w_{-\sigma}(\mathbf{k}) = (\omega_k - \sigma)\, w_0(\mathbf{k}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
2\lambda \int \frac{d\mathbf{k}'}{\sigma - \omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \mathrm{W}(\mathbf{k}', \mathbf{l})
&= \frac{2\lambda}{\sigma + \omega_l} \left\{ \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w_{-\sigma}(\mathbf{k}')\, w_{-\sigma}(\mathbf{l}')}{\sigma - \omega_{k'}} \right. \\
&\quad \left. + \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w_{-\sigma}(\mathbf{k}')\, w_{-\sigma}(\mathbf{l}')}{\omega_{k'} + \omega_l} \right\} \\
&\quad + 2\lambda\mu \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{\sigma - \omega_{k'}} w_0(\mathbf{k}')\, w_0(\mathbf{l}').
\end{aligned}$$

D'après l'équation (C), vérifiée par $w_{-\sigma}(\mathbf{k})$:

$$2\lambda \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{w_{-\sigma}(\mathbf{k}')\, w_{-\sigma}(\mathbf{l})}{\omega_{k'} + \omega_l} = 1 - w_{-\sigma}(\mathbf{l}).$$

Par ailleurs :

$$1 - 2\lambda \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{\sigma - \omega_{k'}} w_{-\sigma}(k') = (z - \sigma)\, \mathrm{W}_0(z)\,|_{z=\sigma} = 0,$$

$$2\lambda \int d\mathbf{k}' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{\sigma - \omega_{k'}} w_0(k') = -\mathrm{W}_0(\sigma),$$

d'où finalement :

$$2\lambda \int dk' \frac{f(\omega_{k'})^2}{2\omega_{k'}} \frac{\mathrm{W}(\mathbf{k}', \mathbf{l})}{\sigma - \omega_{k'}} = \frac{1}{\sigma + \omega_l} - \mu\, w_0(\mathbf{l})\, \mathrm{W}_0(\sigma).$$

En conclusion, la seule solution $\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, symétrique en $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$, vérifiant (A′) et (A″) est donnée par

$$\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{w_{-\sigma}(\mathbf{k})\, w_{-\sigma}(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l}.$$

2° Quand $1 - 2\lambda \mathrm{F}(z) = 0$ a les deux racines imaginaires pures $\pm i\rho$, nous aurons à chercher $\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ vérifiant, en plus de l'équation (A′), la condition

$$(\mathrm{A}''') \qquad \frac{1}{\rho + i\omega_l} = 2\lambda \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k} \frac{1}{\rho - i\omega_k} \mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l}).$$

Or, $\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, vérifiant (A′) est nécessairement de la forme

$$\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{w_{-i\rho}(\mathbf{k})\, w_{-i\rho}(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l} + \mu\, w_0(\mathbf{k})\, w_0(\mathbf{l})$$

et de la valeur de μ sera déterminée en écrivant que $\mathrm{W}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ vérifie (A‴).

En conduisant le calcul comme ci-dessus et tenant compte des égalités :

$$2\lambda\int d\mathbf{k}\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{w_{-i\rho}(\mathbf{k})\,w_{-i\rho}(\mathbf{l})}{\omega_k+\omega_l}=1-w_{-i\rho}(\mathbf{l}),$$

$$-2\lambda\int d\mathbf{k}\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{w_{-i\rho}(\mathbf{k})}{i\rho+\omega_k}=1+2i\rho\mathrm{W}_0(-i\rho),$$

$$2\lambda\int d\mathbf{k}\frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k}\,\frac{w_0(\mathbf{k})}{\rho-i\omega_k}=i\mathrm{W}_0(-i\rho),$$

on trouve $\mu=2i\rho$, d'où, finalement, pour l'expression cherchée de $\mathrm{W}(\mathbf{k},\mathbf{l})$,

$$\mathrm{W}(\mathbf{k},\mathbf{l})=\frac{w_{i\rho}(\mathbf{k})\,w_{i\rho}(\mathbf{l})}{\omega_k+\omega_l}.$$

CHAPITRE I.

LE CAS SANS ÉTAT LIÉ.

1. Détermination du vide physique. — Dans [1], l'hamiltonien de Wentzel :

$$(1)\qquad \mathcal{H}=\int d\mathbf{k}\,\omega_k a_{\mathbf{k}}^{\star}a_{\mathbf{k}} + \Delta\mathrm{M}+\lambda\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{2\omega_{k_1}}}\,\frac{f(\omega_{k_2})}{\sqrt{2\omega_{k_2}}}(a_{\mathbf{k}_1}^{\star}a_{\mathbf{k}_2}^{\star}+2a_{\mathbf{k}_1}^{\star}a_{\mathbf{k}_2}+a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2})$$

($\Delta\mathrm{M}=$ self-énergie du vide; $a_{\mathbf{k}'}$, $a_{\mathbf{k}}^{\star}$, opérateurs d'annihilation et de création d'un champ de bosons) a été mis sous la forme

$$(2)\qquad \mathcal{H}=\int d\mathbf{k}\,\omega_k\mathrm{A}_{\mathbf{k}}^{\star}\mathrm{A}_{\mathbf{k}},$$

avec

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_{\mathbf{k}}^{\star}=\int d\mathbf{k}'\Gamma_1(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,a_{\mathbf{k}'}^{\star}+\int d\mathbf{k}'\Gamma_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,a_{\mathbf{k}'},\\ \Gamma_1(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}')+\dfrac{2\lambda}{1-2\lambda\mathrm{F}^{+}(\omega_k)}\,\dfrac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\dfrac{1}{\omega_k-\omega_{k'}+i\varepsilon}\,\dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\\ \Gamma_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\dfrac{2\lambda}{1-2\lambda\mathrm{F}^{+}(\omega_k)}\,\dfrac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\dfrac{1}{\omega_k+\omega_{k'}}\,\dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}},\\ \mathrm{F}(z)=\int d\mathbf{k}\dfrac{f(\omega_k)^2}{z^2-\omega_k^2}, \end{cases}$$

la valeur de λ étant telle que $1-2\lambda\mathrm{F}(m)>0$.

On montrait alors aisément que les $A^\star_{\mathbf{k}}$ n'étaient rien d'autre que les opérateurs de création « ingoing ».

Étant donné (2), le vide physique Ψ_0, vecteur normé vérifiant

$$\mathcal{H}\Psi_0 = 0$$

est aussi défini par :

$$A_{\mathbf{k}}\Psi_0 = 0, \qquad \text{quel que soit } \mathbf{k}. \tag{4}$$

soit donc par :

$$\int d\mathbf{k}'\,\Gamma_1(\mathbf{k},\mathbf{k}')^\star\, a_{\mathbf{k}'}\Psi_0 + \int d\mathbf{k}'\,\Gamma_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')^\star\, a^\star_{\mathbf{k}'}\Psi_0 = 0. \tag{5}$$

Si nous notons que, dans le cas actuellement envisagé, l'équation intégrale singulière :

$$\int d\mathbf{k}'\,\Gamma_1(\mathbf{k},\mathbf{k}')^\star f(\mathbf{k}') = 0$$

n'a pas de solution non identiquement nulle [Intr. I, (α)] nous déduisons immédiatement de (5) l'annulation de toutes les composantes $\langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{2n+1} | \Psi_0\rangle$ (le vecteur de base $\frac{1}{\sqrt{p!}} a^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots a^\star_{\mathbf{k}_p}|0\rangle$ est noté par $|\mathbf{k}_1, \ldots \mathbf{k}_p\rangle$).

La même circonstance permet de remplacer (5) par :

$$a_{\mathbf{k}}\Psi_0 + \int d\mathbf{k}'\,V(\mathbf{k},\mathbf{k}')\, a^\star_{\mathbf{k}'}\Psi_0 = 0, \tag{6}$$

où $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, quantité réelle, fonction symétrique de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ est l'unique solution de (*cf.* Intr. III) :

$$\int d\mathbf{k}'\,\Gamma_1(\mathbf{k},\mathbf{k}')^\star\, V(\mathbf{k}',\mathbf{l}) = \Gamma_2(\mathbf{k},\mathbf{l})^\star. \tag{7}$$

On conclut immédiatement de (6) que :

$$\langle \mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 | \Psi_0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2!}} V(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)\langle 0 | \Psi_0\rangle. \tag{8}$$

Chacune des autres composantes va s'exprimer systématiquement à l'aide d'un hafnien, nouvel être mathématique introduit par Caianiello ([3]) et dont la loi de développement par rapport aux éléments d'une ligne, permet, en raisonnant par récurrence et s'appuyant sur (6), de justifier la formule générale :

$$(9)\qquad \langle \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_{2n} | \Psi_0 \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n!}} \langle 0 | \Psi_0 \rangle \left| \begin{matrix} V(\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2) & V(\mathbf{l}_1\mathbf{l}_3) & \ldots & V(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_{2n}) \\ & V(\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3) & \ldots & V(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_{2n}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & V(\mathbf{l}_{2n-1}, \mathbf{l}_{2n}) \end{matrix} \right|_+ ,$$

la notation adoptée pour le hafnien du second membre étant celle de Caianiello ([3]). Quant au facteur $\langle 0 | \Psi_0 \rangle$ il se détermine en écrivant la normalisation à l'unité du vecteur Ψ_0.

On peut déduire de (9) une expression plus compacte de Ψ_0, qui nous sera commode dans la suite. Pour cela nous remarquerons que, dans un terme quelconque du développement du hafnien au second membre de (9), apparaît le produit de n facteurs $V(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, d'arguments tous distincts, de sorte qu'après multiplication par $\frac{1}{\sqrt{2n!}} a^\star_{\mathbf{l}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{l}_{2n}} | 0 \rangle$ et intégration sur tous les $\mathbf{l}_i$, chaque terme donne la contribution $\frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{l}\, V(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a^\star_{\mathbf{k}} a^\star_{\mathbf{l}} \right)^n | 0 \rangle$. Par ailleurs, on se convainc facilement, en raisonnant par récurrence, que le nombre de termes du développement du hafnien est égal à $\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$. D'où

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\int d\mathbf{l}_1 \ldots d\mathbf{l}_{2n} | \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_{2n} \rangle \langle \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_{2n} | \Psi_0 \rangle \\ &\quad = \langle 0 | \Psi_0 \rangle \sum_n \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \left(\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{l}\, V(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a^\star_{\mathbf{k}} a^\star_{\mathbf{l}} \right)^n | 0 \rangle \end{aligned}$$

et finalement

$$(11)\qquad \Psi_0 = \langle 0 | \Psi_0 \rangle \left(\exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{l}\, V(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a^\star_{\mathbf{k}} a^\star_{\mathbf{l}} \right) | 0 \rangle.$$

Remarquons pour conclure cette étude du vide, que la réalité de $V(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ assure l'identité du vide des opérateurs « ingoing » et du vide des opérateurs « outgoing ». Ces derniers sont en effet donnés par des expressions déduites de (3) en y remplaçant $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ par leurs imaginaires conjugués, de sorte que le vide « outgoing » est de nouveau défini par (6), $V(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ vérifiant l'équation déduite de (7) en y remplaçant $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^\star$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^\star$ par $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$.

2. Détermination des autres vecteurs propres. — Les vecteurs propres de l'hamiltonien (1) autres que le vide, sont, par suite de (2), les vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} A^{\star}_{\mathbf{k}_1} \ldots A^{\star}_{\mathbf{k}_n} \Psi_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il nous est évidemment possible d'effectuer, en partant des formules (3) et (11), un calcul direct et d'obtenir ainsi une expression générale. Cependant, à cette méthode longue et relativement compliquée, nous préférerons une méthode globale que la simplicité du modèle de Wentzel rend particulièrement élégante.

Pour cela, nous introduirons la fonctionnelle

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n \, \varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \varphi(\mathbf{k}_n) \, A^{\star}_{\mathbf{k}_1} \ldots A^{\star}_{\mathbf{k}_n} \Psi_0 = \left[\exp \int d\mathbf{k} \, \varphi(\mathbf{k}) \, A^{\star}_{\mathbf{k}}\right] \Psi_0,$$

où $\varphi(\mathbf{k})$ est une fonction d'une certaine classe (1).

Il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned} &\left[\exp \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} \, d\mathbf{q} \, V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, a^{\star}_{\mathbf{p}} a^{\star}_{\mathbf{q}}\right] A^{\star}_{\mathbf{q}} \left[\exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} \, d\mathbf{q} \, V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, a^{\star}_{\mathbf{p}} a^{\star}_{\mathbf{q}}\right] \\ &\qquad = \int d\mathbf{k}' \, a^{\star}_{\mathbf{k}'} G(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \int d\mathbf{k}' \, \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \, a_{\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

avec :

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Gamma_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) - \int d\mathbf{l} \, \Gamma_2(\mathbf{k}', \mathbf{l}) \, V(\mathbf{l}, \mathbf{k}). \tag{12}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\left[\exp \int d\mathbf{k} \, \varphi(\mathbf{k}) \, A^{\star}_{\mathbf{k}}\right] \Psi_0 \\ &\quad = \langle 0 \mid \Psi_0 \rangle \left[\exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} \, d\mathbf{q} \, V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, a^{\star}_{\mathbf{p}} a^{\star}_{\mathbf{q}}\right] \\ &\quad \times \left\{ \exp \left[\int d\mathbf{k} \, d\mathbf{k}' \, a^{\star}_{\mathbf{k}'} G(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \, \varphi(\mathbf{k}) \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + \int d\mathbf{k} \, d\mathbf{k}' \, \varphi(\mathbf{k}) \, \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \, a_{\mathbf{k}'} \right] \right\} \mid 0 \rangle. \end{aligned}$$

---

(1) Le caractère formel du calcul qui va suivre rend inutile toute autre précision sur ce point.

En appliquant alors les méthodes de calcul de Feynman ([4]), il vient, en posant :

$$(13)\qquad \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int d\mathbf{l}'\, \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}')\, G(\mathbf{l}', \mathbf{l}),$$

$$\begin{aligned}&\exp\left[\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}) + \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \varphi(\mathbf{k})\, \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, a_{\mathbf{k}'}\right] |\, 0 \rangle \\ &= \left\{\exp\left[\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}'}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \varphi(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}')\right]\right\} |\, 0 \rangle,\end{aligned}$$

d'où pour finir :

$$\begin{aligned}&\left[\exp \int d\mathbf{k}\, \varphi(\mathbf{k})\, A^\star_{\mathbf{k}}\right] \Psi_0 \\ &\quad = \langle 0 \,|\, \Psi_0 \rangle \left[\exp - \frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a^\star_{\mathbf{p}} a^\star_{\mathbf{q}}\right] \\ &\qquad \times \left\{\exp\left[\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}'}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}) \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \varphi(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}')\right]\right\} |\, 0 \rangle.\end{aligned}$$

On en tire $A^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots A^\star_{\mathbf{k}_n} \Psi_0$ par :

$$\begin{aligned}&A^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots A^\star_{\mathbf{k}_n} \Psi_0 \\ &\quad = \langle 0 \,|\, \Psi_0 \rangle \left[\exp - \frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a^\star_{\mathbf{p}} a^\star_{\mathbf{q}}\right] \frac{\delta^{(n)}}{\delta\varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \delta\varphi(\mathbf{k}_n)} \\ &\qquad \times \left\{\exp\left[\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}'}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}) \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \varphi(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}')\right]\right\} \Big|_{\varphi = 0} |\, 0 \rangle.\end{aligned}$$

Si l'on note que les dérivées d'ordre impair de la fonctionnelle $\left[\exp \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \varphi(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}')\right]$ sont nulles et que, par ailleurs,

$$\frac{\delta^{(2n)}}{\delta\varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \delta\varphi(\mathbf{k}_{2n})} \left[\exp \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \varphi(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k}')\right] = \begin{vmatrix} \tilde{V}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) & \tilde{V}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3) & \ldots & \tilde{V}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_{2n}) \\ & \tilde{V}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) & \ldots & \ldots\ldots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{V}(\mathbf{k}_{2n-1}, \mathbf{k}_{2n}) \end{vmatrix}_+,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^{(p)}}{\delta\varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \delta\varphi(\mathbf{k}_p)} \left[\exp \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}'}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k})\right] \\ &\quad = \left\{\prod_{i=1}^{p} \int d\mathbf{k}'_i\, a^\star_{\mathbf{k}'_i}\, G(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}_i)\right\} \left[\exp \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, a^\star_{\mathbf{k}'}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k})\right]\end{aligned}$$

(où la première formule résulte immédiatement des considérations du paragraphe précédent), il suffit d'appliquer la règle analogue pour les produits de fonctionnelles, à la règle de Leibniz relative aux produits de fonctions pour obtenir la formule générale :

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad & A^{\star}_{\mathbf{k}_1}\ldots A^{\star}_{\mathbf{k}_n}\Psi_0 = \langle 0 \mid \Psi_0\rangle \left[\exp -\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}\, V(\mathbf{q}, \mathbf{q})\, a^{\star}_{\mathbf{p}} a^{\star}_{\mathbf{q}}\right] \\
& \times\left\{ \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\sigma'} \left| \begin{matrix} \tilde{V}(\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}) & \ldots & \tilde{V}(\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_{2p}}) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{V}(\mathbf{k}_{i_{2p-1}}, \mathbf{k}_{i_{2p}}) \end{matrix} \right|_{+} \right. \\
& \left. \times \prod_{j=1}^{n-2p} \left(\int dk'_j\, a^{\star}_{\mathbf{k}'_j}\, (G\mathbf{k}'_j, \mathbf{k}_{i_{2p+j}}) \right) \right\} \mid 0 \rangle.
\end{aligned}
$$

où $\left[\frac{n}{2}\right]$ est l'entier immédiatement inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$ et où σ' sont toutes les permutations $i_1, i_2, \ldots, i_{2p}, i_{2p+1}, \ldots, i_n$ de $1, 2, \ldots, n$, telles que :

$$
\begin{aligned}
& i_{2p} > i_{2p-1} > \ldots > i_2 > i_1 \quad , \\
& i_n > i_{n-1} > \ldots > i_{2p+2} > i_{2p+1}.
\end{aligned}
$$

Examinons de plus près les quantités (12) et (13). En notant que :

$$
V(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 2\lambda \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k}} \frac{f(\omega_l)}{\sqrt{2\,\omega_l}} \frac{w(\mathbf{k})\, w(\mathbf{l})}{\omega_k + \omega_l},
$$

où $w(\mathbf{k})$ est l'unique solution de l'équation (A) de l'introduction, il vient, par un calcul direct, qui tient compte de (C) :

$$
\begin{aligned}
(15)\quad G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = {} & \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
& - 2\lambda \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k}} w(\mathbf{k}) \frac{1}{\omega_k - \omega_{k'} - i\varepsilon} \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\,\omega_{k'}}} \frac{1}{w(\mathbf{k}')\,[1 - 2\lambda F^{+}(\omega_{k'})]}.
\end{aligned}
$$

Remarquons, en passant, les relations :

$$
(16)\qquad \int d\mathbf{k}'\, \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^{\star}\, G(\mathbf{k}', \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}),
$$

$$
(17)\qquad \int d\mathbf{k}'\, G(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \Gamma_1(\mathbf{k}', \mathbf{l})^{\star} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}),
$$

l'équation (16) se démontrant à partir des identités entre $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ obtenues en écrivant que les $A^{\star}_{\mathbf{k}'}$, $A^{\star}_{\mathbf{k}}$ vérifient les relations de commutation habituelles, et l'équation (17), à partir des identités entre $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ résultant des relations de commutation entre les $a^\star_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}$, exprimés à partir des $A^\star_{\mathbf{k}}$, $A_{\mathbf{k}}$ ([1]). Il résulte, de plus, des considérations de l'introduction [I, (α)], que $G(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ est l'unique solution des équations (16) et (17). Quand à $\tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, il se calcule directement à partir de (15), le résultat étant :

$$\tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 2\lambda \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{w(\mathbf{k})[1 - 2\lambda F^+(\omega_k)]} \frac{1}{\omega_k + \omega_l} \times \frac{f(\omega_l)}{\sqrt{2\omega_l}} \frac{1}{w(\mathbf{l})[1 - 2\lambda F^+(\omega_l)]} \tag{18}$$

si l'on tient compte des équations (A) et (C) vérifiées par $w(\mathbf{k})$.

3. La transformation canonique. — Si U est l'opérateur unitaire tel que

$$U a^\star_{\mathbf{k}} U^\star = A^\star_{\mathbf{k}},$$

nous devons avoir :

$$A^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots A^\star_{\mathbf{k}_n} \Psi_0 = U a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} | 0 \rangle$$

et il doit être possible, à partir de (14), de déterminer l'expression opératorielle complète de U.

Nous allons montrer que :

$$\begin{aligned} U = \langle 0 | \Psi_0 \rangle & \left[\exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a^\star_{\mathbf{p}} a^\star_{\mathbf{q}} \right. \\ & \times \left\{ \sum \frac{1}{n!} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n\, d\mathbf{l}_1 \ldots d\mathbf{l}_n \right. \\ & \times g(\mathbf{k}_1, \mathbf{l}_1) \ldots g(\mathbf{k}_n, \mathbf{l}_n)\, a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} a_{\mathbf{l}_1} \ldots a_{\mathbf{l}_n} \\ & \times \left[\exp \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} \right], \end{aligned} \tag{19}$$

avec :

$$g(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = G(\mathbf{k}, \mathbf{l}) - \delta(\mathbf{k}, \mathbf{l}). \tag{20}$$

Supposons, en effet, que nous ayons déjà montré que :

$$U a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} | 0 \rangle = A^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots A^\star_{\mathbf{k}_n} \Psi.$$

Considérons

$$U a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} a^\star_{\mathbf{k}_{n+1}} | 0 \rangle = [U, a^\star_{\mathbf{k}_{n+1}}] a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} | 0 \rangle + a^\star_{\mathbf{k}_{n+1}} U a^\star_{\mathbf{k}_1} \ldots a^\star_{\mathbf{k}_n} | 0 \rangle. \tag{21}$$

Pour simplifier l'écriture, notons $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$, $\tilde{\mathcal{V}}$ respectivement les trois opérateurs du second membre de (19). Nous avons :

$$[\mathcal{V}, a_{\mathbf{k}}^\star] = 0, \qquad [\mathcal{S}, a_{\mathbf{k}}^\star] = \int d\mathbf{l}\, g(\mathbf{l}, \mathbf{k})\, a_{\mathbf{l}}^\star\, \mathcal{S}, \qquad [\tilde{\mathcal{V}}, a_{\mathbf{k}}^\star] = \int d\mathbf{l}\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a_{\mathbf{l}}\, \tilde{\mathcal{V}}.$$

Par ailleurs :

$$[a_{\mathbf{k}}, \mathcal{S}] = \mathcal{S} \int d\mathbf{k}'\, g(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, a_{\mathbf{k}'}$$

soit, encore :

$$a_{\mathbf{k}}\mathcal{S} = \int d\mathbf{k}'\, \mathrm{G}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \mathcal{S}\, a_{\mathbf{k}'}$$

d'où, en tenant compte de (16) :

$$\int d\mathbf{k}'\, \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^\star a_{\mathbf{k}'}\mathcal{S} = \mathcal{S}\, a_{\mathbf{k}}. \tag{22}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}}, a_{\mathbf{k}}^\star] &= \mathcal{V}\mathcal{S}[\tilde{\mathcal{V}}, a_{\mathbf{k}}^\star] + \mathcal{V}[\mathcal{S}, a_{\mathbf{k}}^\star]\tilde{\mathcal{V}} + [\mathcal{V}, a_{\mathbf{k}}^\star]\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} \\
&= \int d\mathbf{l}\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, \mathcal{V}\mathcal{S}\, a_{\mathbf{l}}\tilde{\mathcal{V}} + \int d\mathbf{l}\, g(\mathbf{l}, \mathbf{k})\, a_{\mathbf{l}}^\star\, \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} \\
&= \int d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, \Gamma_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}')^\star \mathcal{V} a_{\mathbf{l}'}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} + \int d\mathbf{l}\, g(\mathbf{l}, \mathbf{k})\, a_{\mathbf{l}}^\star\, \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} \\
&= \int d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, \Gamma_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}')^\star a_{\mathbf{l}'}\mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} + \int d\mathbf{l}\, g(\mathbf{l}, \mathbf{k})\, a_{\mathbf{l}}^\star\, \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} \\
&\quad + \int d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'\, d\mathbf{l}''\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, \Gamma_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}')^\star\, \mathrm{V}(\mathbf{l}', \mathbf{l}'')\, a_{\mathbf{l}''}^\star \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

Mais, d'après la définition de $\tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ et (17) :

$$\int d\mathbf{l}\, \tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, \Gamma_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}')^\star = \Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}')$$

d'où, finalement, en appliquant la définition de $\mathrm{G}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$:

$$[\mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}}, a_{\mathbf{k}}^\star] = \mathrm{A}_{\mathbf{k}}^\star\, \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}} - a_{\mathbf{k}}^\star\, \mathcal{V}\mathcal{S}\tilde{\mathcal{V}},$$

d'où, pour (21) :

$$\mathrm{U}\, a_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots a_{\mathbf{k}_{n+1}}^\star |\, 0 \rangle = \mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots \mathrm{A}_{\mathbf{k}_{n+1}}^\star \Psi_0,$$

dès lors qu'on suppose $\mathrm{U} a_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots a_{\mathbf{k}_n}^\star |\, 0 \rangle = \mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots \mathrm{A}_{\mathbf{k}_n}^\star \Psi_0$. Comme on vérifie immédiatement $\mathrm{U}\,|\, 0 \rangle = \Psi_0$, le résultat anoncé est démontré.

4. Calcul du facteur $\langle 0 \,|\, \Psi_0 \rangle$. — Nous avons

$$\frac{1}{|\langle 0 \,|\, \Psi_0 \rangle|^2} = \langle 0 \,|\, \mathcal{V}^\star \mathcal{V} \,|\, 0 \rangle.$$

En dérivant par rapport à λ, il vient

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{|\langle 0 \mid \Psi_0 \rangle|^2} = \left\langle 0 \left| \frac{d\mathcal{V}^\star}{d\lambda}\mathcal{V} \right| 0 \right\rangle + \left\langle 0 \left| \mathcal{V}^\star \frac{d\mathcal{V}}{d\lambda} \right| 0 \right\rangle.$$

Mais :

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\int \frac{d}{d\lambda} \mathrm{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a^\star_{\mathbf{p}} a^\star_{\mathbf{q}}\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, \mathcal{V},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{\lambda}\int d\mathbf{k}'\, \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}')\frac{1}{1-2\lambda \mathrm{F}^-(\omega_{k'})}\mathrm{V}(\mathbf{k}', \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{\lambda}\int d\mathbf{k}'\, \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}')^\star \frac{1}{1-2\lambda \mathrm{F}^+(\omega_{k'})}\mathrm{V}(\mathbf{k}', \mathbf{q})\end{aligned}$$

et :

$$\mathrm{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int dk'\, \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}')\, \Gamma_2(\mathbf{k}', \mathbf{q})^\star = \int dk'\, \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}')^\star\, \Gamma_2(\mathbf{k}', \mathbf{q}).$$

Si, alors, on tient compte de :

$$[a_{\mathbf{k}'}, \mathcal{V}] = -\int d\mathbf{k}'\, \mathrm{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, a^\star_{\mathbf{k}'}\mathcal{V},$$

nous pourrons écrire :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}\langle 0 \mid \mathcal{V}^\star \mathcal{V} \mid 0 \rangle \\ &\quad = \frac{1}{2\lambda}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p}'\, d\mathbf{q}'\, d\mathbf{q}''\, \frac{1}{1-2\lambda \mathrm{F}^+(\omega_{p'})} \\ &\qquad \times \mathrm{V}(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \langle 0 \mid \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')^\star a_{\mathbf{p}} \mathcal{V}^\star \mathcal{V}\, \mathrm{G}(\mathbf{q}', \mathbf{q}'')\, a^\star_{\mathbf{q}'} \mid 0 \rangle\, \Gamma_2(\mathbf{q}'', \mathbf{q})^\star \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p}'\, d\mathbf{q}'\, d\mathbf{q}'' \\ &\qquad \times \Gamma_2(\mathbf{q}'', \mathbf{q}) \langle 0 \mid \mathrm{G}(\mathbf{q}', \mathbf{q}'')^\star a_{\mathbf{q}'} \mathcal{V}^\star \mathcal{V}\, \mathrm{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, a^\star_{\mathbf{p}} \mid 0 \rangle \frac{\mathrm{V}(\mathbf{p}', \mathbf{q})}{1-2\lambda \mathrm{F}^-(\omega_{p'})}.\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\mathcal{V}\int d\mathbf{k}'\, \mathrm{G}(\mathbf{k}', \mathbf{k})\, a^\star_{\mathbf{k}'} \mid 0 \rangle = \frac{1}{\langle 0 \mid \Psi_0 \rangle} \mathrm{A}^\star_{\mathbf{k}} \Psi_0,$$

d'où finalement en tenant compte de la norme de $\mathrm{A}^\star_{\mathbf{k}}\Psi_0$ et des expressions respectives de $\mathrm{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et $\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{l})$:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{d}{d\lambda}|\langle 0 \mid \Psi_0 \rangle|^2}{|\langle 0 \mid \Psi_0 \rangle|^2} &= -4\lambda \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, \frac{f(\omega_p)^2}{2\omega_p}\frac{f(\omega_q)^2}{2\omega_p} \\ &\quad \times \frac{w(\mathbf{p})\, w(\mathbf{q})}{(\omega_p + \omega_q)^2} \frac{1}{(1-2\lambda \mathrm{F}^+(\omega_q))(1-2\lambda \mathrm{F}^-(\omega_p))},\end{aligned}$$

ce qui se mettra sous une forme plus agréable en notant que d'après l'équation (C) de l'introduction mathématique :

$$2\lambda \int d\mathbf{k}'\, \frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_{k'}} \frac{1}{(\omega_k + \omega_{k'})^2} w(\mathbf{k}') = \frac{1}{w(\mathbf{k})^2}\frac{d}{d\omega_k} w(\mathbf{k})$$

et que, comme dans ([1]) :

$$\frac{1}{(1-2\lambda F^+(\omega_p))(1-2\lambda F^-(\omega_p))}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2 i\lambda p f(\omega_p)^2}\left[\frac{1}{1-2\lambda F^-(\omega_p)}-\frac{1}{1-2\lambda F^+(\omega_p)}\right].$$

Il vient ainsi, en prenant $x=\omega_p$ comme variable d'intégration :

$$\frac{1}{|\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle|^2}\frac{d}{d\lambda}|\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle|^2$$
$$=\frac{1}{2\pi i\lambda}\int_m^\infty dx\,\frac{1}{w(x)}\frac{dw}{dx}\left[\frac{1}{1-2\lambda F^+(x)}-\frac{1}{1-2\lambda F^-(x)}\right].$$

Nous avons calculé le second membre de (23) pour $m=0$ et $f(\omega_k)=\frac{K^2}{K^2+k^2}$, avec pour résultat, quand $\lambda>0$,

$$\frac{d}{d\lambda}\log|\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle|^2=\frac{1}{4\pi^2\lambda}\,\frac{1}{2+\lambda\pi^2 K}\left\{\log(1+2\lambda\pi^2 K)+\sqrt{2\lambda\pi^2 K}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{2\lambda\pi^2 K}\right\}.$$
$$-\frac{\pi^2 K}{2}\,\frac{1}{2+\lambda\pi^2 K}-\frac{\pi^2 K}{4}\,\frac{1}{1+2\lambda\pi^2 K},$$

d'où l'on peut déduire que $|\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle|^2$ tend vers zéro comme $\frac{1}{\sqrt{K}}$ quand K augmente indéfiniment (passage à la source ponctuelle). Nous voyons apparaître le même comportement que dans le cas du méson scalaire neutre à source fixe : les composantes sur la base de Fock du champ libre des vecteurs propres de l'hamiltonien total tendent vers zéro en même temps que la dimension de la source.

5. **La transformation canonique et la matrice S.** — La relation entre la matrice de transformation U et la matrice S est particulièrement simple et remarquable. Formons en effet :

$$e^{i\mathcal{H}t}\,U\,e^{-i\mathcal{H}t}=\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle\,(e^{i\mathcal{H}t}\mathcal{V}\,e^{-i\mathcal{H}t})\,(e^{i\mathcal{H}t}\mathcal{S}\,e^{-i\mathcal{H}t})\,(e^{i\mathcal{H}t}\tilde{\mathcal{V}}\,e^{-i\mathcal{H}t})$$

et étudions la limite de cette expression quand $t\to+\infty$; $e^{i\mathcal{H}t}a^\star_{\mathbf{k}}\,e^{-i\mathcal{H}t}$ tend alors vers $\tilde{A}^\star_{\mathbf{k}}\,e^{it\omega_k}$ avec ([1] :

$$\tilde{A}^\star_{\mathbf{k}}=A^\star_{\mathbf{k}}-4\lambda i\pi\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{1}{1-2\lambda F^+\omega_k)}\int d\mathbf{k}'\,\delta(\omega_k-\omega_{k'})\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}}A^\star_{\mathbf{k}'}. \tag{24}$$

La limite de $e^{i\mathcal{H}t}\mathcal{V}\,e^{-i\mathcal{H}t}$ est donc :

$$\lim_{t\to+\infty}\exp-\lambda\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,w(\mathbf{p})\,w(\mathbf{q})\frac{f(\omega_p)}{\sqrt{2\omega_p}}\,\frac{f(\omega_q)}{\sqrt{2\omega_q}}\,\frac{e^{it(\omega_p+\omega_q)}}{\omega_p+\omega_q}\tilde{A}^\star_{\mathbf{p}}\tilde{A}^\star_{\mathbf{q}}$$
$$=\exp-\lambda\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,w(\mathbf{p})\,w(\mathbf{q})\frac{f(\omega_p)}{\sqrt{2\omega_p}}\,\frac{f(\omega_q)}{\sqrt{2\omega_q}}\,\tilde{A}^\star_{\mathbf{p}}\tilde{A}^\star_{\mathbf{q}}\,\delta(\omega_p+\omega_q)=I.$$

On montre, de même, que la limite de $e^{i\mathcal{H}t}\tilde{\mathcal{V}}\,e^{-i\mathcal{H}t}$ est I.

Quant à $e^{-i\mathcal{H}t}\mathcal{S}\,e^{-i\mathcal{H}t}$, nous aurons :

$$(25)\quad \lim_{t\to\infty} e^{i\mathcal{H}t}\mathcal{S}\,e^{-i\mathcal{H}t}$$
$$=\sum\frac{1}{n\,!}\int d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n\,d\mathbf{l}_1\ldots d\mathbf{l}_n$$
$$\times(-4\lambda i\pi)^n\frac{1}{1-2\lambda\,\mathrm{F}^+(\omega_{k_1})}\frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{2\,\omega_{k_1}}}\cdots\frac{1}{1-2\lambda\,\mathrm{F}^+(\omega_{k_n})}\frac{f(\omega_{k_n})}{\sqrt{2\,\omega_{k_n}}}$$
$$\times\delta(\omega_{k_1}-\omega_{l_1})\ldots\delta(\omega_{k_n}-\omega_{l_n})\frac{f(\omega_{l_1})}{\sqrt{2\,\omega_{l_1}}}\cdots\frac{f(\omega_{l_n})}{\sqrt{2\,\omega_{l_n}}}\tilde{\mathrm{A}}^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots\tilde{\mathrm{A}}^\star_{\mathbf{k}_n}\tilde{\mathrm{A}}_{\mathbf{l}_1}\ldots\tilde{\mathrm{A}}_{\mathbf{l}_n},$$

en tenant compte de

$$\int_{-\infty}^{t}du\,e^{iu(\omega_p-\omega_q)}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{it(\omega_p-\omega_q)}}{\omega_p-\omega_q-i\varepsilon}.$$

Or, $\tilde{\mathrm{A}}^\star_{\mathbf{k}}=\mathrm{S}\,\mathrm{A}^\star_k\,\mathrm{S}^\star$, et il résulte de (24) que la matrice S a la forme (25), en y remplaçant les $\tilde{\mathrm{A}}^\star_{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}}$ par $\mathrm{A}^\star_{\mathbf{k}}$, $\mathrm{A}_{\mathbf{k}}$. Donc, le second membre de (25) est égal à $\mathrm{SSS}^\star=\mathrm{S}$. Autrement dit, au facteur $\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle$ près, on passe de U à la matrice S en égalant $\mathcal{V}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ à l'opérateur unité et en remplaçant dans $\mathcal{S}$ chaque $\frac{1}{\omega_k-\omega_l-i\varepsilon}$ par $2\pi i\,\delta(\omega_k-\omega_l)$. Nous devons d'ailleurs remarquer que, dans une théorie où la source serait représentée par un champ quantique, le facteur $\langle 0\,|\,\Psi_0\rangle$ serait absorbé par la renormalisation d'amplitude de ce champ.

CHAPITRE II.

CAS AVEC ÉTATS LIÉS.

Nous avons montré ([1]) que le modèle de Wentzel admet des états liés quand la constante de couplage λ vérifie la double inégalité :

$$(26)\qquad -\frac{1}{2\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{\omega_k^2}}<\lambda<-\frac{1}{2\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{k^2}}.$$

L'hamiltonien (1) s'écrit alors :

$$(27)\qquad \mathcal{H}=\int d\mathbf{k}\,\omega_k\,\mathrm{A}^\star_{\mathbf{k}}\mathrm{A}_{\mathbf{k}}+\sigma\,\mathrm{A}^\star_\sigma\mathrm{A}_\sigma.$$

Dans (27), les opérateurs $\mathrm{A}^\star_{\mathbf{k}}$ sont encore donnés par la formule (3), l'opérateur $\mathrm{A}^\star_\sigma$ par :

$$(28)\quad \mathrm{A}^\star_\sigma=\frac{1}{\mathrm{N}}\left\{\int d\mathbf{k}'\,\frac{1}{\sigma-\omega_{k'}}\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\,\omega_{k'}}}\,a^\star_{\mathbf{k}}+\int dk'\,\frac{1}{\sigma+\omega_{k'}}\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\,\omega_{k'}}}\,a_{\mathbf{k}'}\right\}.$$

Le carré de N est égal à :

$$N^2 = 2\sigma \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)^2}{(\omega_k^2 - \sigma^2)^2}$$

et σ est racine positive $(0 < \sigma < m)$ de :

$$1 - 2\lambda F(z) = 0.$$

Les opérateurs $A_{\mathbf{k}}^\star$, $A_{\mathbf{k}}$ vérifient les relations de commutation habituelles des créateurs et annihilateurs tandis que

$$[A_\sigma, A_\sigma^\star] = 1,$$

A_σ, $A_\sigma^\star$ commutant par ailleurs avec les $A_{\mathbf{k}}^\star$, $A_{\mathbf{k}}$.

1. Détermination du vide physique. — Le vide physique vérifiant

$$\mathcal{H}\Psi_0 = 0$$

peut, d'après (27), être aussi bien défini par

$$A_{\mathbf{k}}\Psi_0 = A_\sigma \Psi_0 = 0. \tag{29}$$

Nous montrerons d'abord, en appliquant les résultats de l'introduction mathématique, que les composantes de Ψ_0 sur les vecteurs de base à un nombre impair de particules sont toutes nulles. Pour commencer, nous établirons ce résultat pour $\langle 0 | a_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle$. En effet, d'après (29),

$$\int d\mathbf{k}' \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^\star \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} | \Psi_0 \rangle = 0, \qquad \int d\mathbf{k}' \frac{1}{\sigma - \omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} | \Psi_0 \rangle = 0.$$

D'après la première équation, $\langle 0 | a_{\mathbf{k}'} | \Psi_0 \rangle = K \dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}} w_0(\mathbf{k}')$, où $w_0(\mathbf{k})$ est solution de l'équation (A) homogène (Intr. math.) et K une constante. Si K est $\neq 0$, il résulte alors de la seconde équation que $W_0(z) = -2\lambda \displaystyle\int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)^2}{2\omega_k} \frac{w_0(\mathbf{k})}{z - \omega_k}$ est nulle pour $z = \sigma$. Or, de par sa construction [*cf.* Intr. math. I, (β)], $W_0(z) \neq 0$ pour tout point à distance finie. Donc, nécessairement, $K = 0$.

Pour le reste de la démonstration, nous raisonnerons par récurrence en supposant déjà démontrée l'annulation des composantes de Ψ_0 sur les vecteurs de base à $(2n - 1)$ particules. Alors :

$$\int d\mathbf{k}' \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^\star \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}_1} \dots a_{\mathbf{k}_{2n}} | \Psi_0 \rangle = 0,$$

$$\int d\mathbf{k}' \frac{1}{\sigma - \omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}_1} \dots a_{\mathbf{k}_{2n}} | \Psi_0 \rangle = 0.$$

D'après la première équation et les propriétés de symétrie de $\langle 0 \mid a_{\mathbf{k}_1} \ldots a_{\mathbf{k}_{2n+1}} \mid \Psi_0 \rangle$, nous devrons avoir :

$$\langle 0 \mid a_{\mathbf{k}_1} \ldots a_{\mathbf{k}_{2n+1}} \mid \Psi_0 \rangle = \mathrm{K} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}_1})}{\sqrt{2\,\omega_{\mathbf{k}_1}}} \cdots \frac{f\omega_{\mathbf{k}_{2n+1}}}{\sqrt{2\,\omega_{\mathbf{k}_{2n+1}}}} w_0(\mathbf{k}_1) \ldots w_0(\mathbf{k}_{2n+1}),$$

et, de nouveau, l'impossibilité de vérifier la seconde équation par suite des propriétés de $\mathrm{W}_0(z)$ entraîne $\mathrm{K} = 0$.

Considérons maintenant $\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mid \Psi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,!}} \langle 0 \mid a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \mid \Psi_0 \rangle$. Nous aurons :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mid \Psi_0 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2\,!}} \langle 0 \mid \Psi_0 \rangle \mathrm{V}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &= -\frac{2\lambda}{\sqrt{2\,!}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}_1})}{\sqrt{2\,\omega_{\mathbf{k}_1}}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}_2})}{\sqrt{2\,\omega_{\mathbf{k}_2}}} \mathrm{W}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \langle 0 \mid \Psi_0 \rangle, \end{aligned}$$

où $\mathrm{W}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ vérifie les équations (A′) et (A″) de l'Introduction mathématique. Les raisonnements faits alors nous ont montré que $\mathrm{W}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ était ainsi univoquement déterminée.

Il est alors facile de montrer que $\langle \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{2n} \mid \Psi_0 \rangle$ a, en fonction de $\mathrm{V}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ la même expression que celle obtenue dans la première partie, car, en effet, elle ne pourrait en différer que par un terme de la forme $\mathrm{K} \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{2\,\omega_{k_1}}} \cdots \frac{f(\omega_{k_{2n}})}{\sqrt{2\,\omega_{k_{2n}}}} w_0(\mathbf{k}_1) \ldots w_0(\mathbf{k}_{2n})$ et si $\mathrm{K} \neq 0$, la deuxième condition (29) ne peut être satisfaite.

D'où, en définitive, la même expression formelle de Ψ_0 que dans la première partie :

$$\Psi_0 = \langle 0 \mid \Psi_0 \rangle \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{l}\, \mathrm{V}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a_{\mathbf{k}}^{\star} a_{\mathbf{l}}^{\star} \right) \right\} \mid 0 \rangle.$$

2. Les autres vecteurs propres de l'hamiltonien total. — Pour la détermination des autres vecteurs propres de l'hamiltonien total, nous recourrons à l'artifice formel, déjà utilisé dans la première partie, en notant que :

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m} \frac{1}{n\,!} \frac{u^m}{m\,!} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n\, \varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \varphi(\mathbf{k}_n)\, \mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^{\star} \ldots \mathrm{A}_{\mathbf{k}_n}^{\star} (\mathrm{A}_{\sigma}^{\star})^m \Psi_0 \\ &\quad = \langle 0 \mid \psi_0 \rangle \exp\left[\int d\mathbf{k}\, \varphi(\mathbf{k})\, \mathrm{A}_{\mathbf{k}}^{\star} + u\, \mathrm{A}_{\sigma}^{\star} \right] \exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{l}\, \mathrm{V}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, a_{\mathbf{k}}^{\star} a_{\mathbf{l}}^{\star} \mid 0 \rangle. \end{aligned}$$

En s'appuyant sur les propriétés de la fonction $w_0(\mathbf{k})$ et sur la valeur de $W(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ (Intr. math. III), on montre aisément que

$$\left\{\exp\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,V(\mathbf{k},\mathbf{l})\,a^\star_{\mathbf{k}}a^\star_{\mathbf{l}}\right\}A^\star_\sigma\left\{\exp-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,V(\mathbf{k},\mathbf{l})\,a^\star_{\mathbf{k}}a^\star_{\mathbf{l}}\right\}$$
$$=\frac{2\sigma W_0(-\sigma)}{N}A_0+\frac{1}{N}\int d\mathbf{k}'\frac{1}{\sigma+\omega_{\mathbf{k}'}}\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}}a_{\mathbf{k}'},$$

avec

$$A_0=\int d\mathbf{k}\frac{f(w_k)}{\sqrt{2w_k}}w_0(\mathbf{k})\,a^\star_{\mathbf{k}}.$$

Comme, par ailleurs, les calculs du paragraphe 2 de la première partie peuvent être entièrement repris, avec les mêmes définitions (12) et (13) des quantités $G(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ et $\tilde{V}(\mathbf{k},\mathbf{l})$, il vient, en appliquant de nouveau les méthodes de calcul de Feynmann ([4]),

$$(30)\quad \sum_{n,m}\frac{1}{n!}\frac{u^m}{m!}\int d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n\,\varphi(\mathbf{k}_1)\ldots\varphi(\mathbf{k}_n)\,A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}(A^\star_\sigma)^m\Psi_0$$
$$=\langle 0|\Psi_0\rangle\left\{\exp-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,V(\mathbf{k},\mathbf{l})\,a^\star_{\mathbf{k}}a^\star_{\mathbf{l}}\right\}$$
$$\times\exp\left\{\int d\mathbf{k}'a^\star_{\mathbf{k}'}\left[\int d\mathbf{k}\,G(\mathbf{k}',\mathbf{k})\,\varphi(\mathbf{k})+\frac{2u\sigma W_0(-\sigma)}{N}\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}}w_0(\mathbf{k}')\right]\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left[\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,\tilde{V}(\mathbf{k},\mathbf{l})\,\varphi(\mathbf{k})\,\varphi(\mathbf{l})+\frac{4\sigma u W_0(-\sigma)}{N}\int d\mathbf{k}\,\varphi(\mathbf{k})\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{W_0(-\omega_k)}{1-2\lambda F^+(\omega_k)}+\frac{u^2\sigma W_0(-\sigma)^2}{\lambda N^2}\right]\right\}|0\rangle.$$

1° Les vecteurs $A^\star_{\mathbf{k}_1}A^\star_{\mathbf{k}_2}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}\Psi_0$.

Nous les obtiendrons à partir de (30) en y faisant $u=0$ et en appliquant l'opération $\dfrac{\delta^{(n)}}{\delta\varphi(\mathbf{k}_1)\ldots\delta\varphi(\mathbf{k}_n)}$. Comme pour $u=0$, le second membre de (30) est formellement identique au second membre de (13), les $A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_1}\Psi_0$ seront donnés par la formule (14), compte tenu de la valeur de $V(\mathbf{k},\mathbf{l})$ propre au cas étudié.

2° Les vecteurs $(A^\star_\sigma)^m\Psi_0$.

En posant $\varphi(\mathbf{k})\equiv 0$ dans (30), il vient

$$\sum\frac{u^m}{m!}(A^\star_\sigma)^m\Psi_0=\langle 0|\Psi_0\rangle\left\{\exp-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,V(\mathbf{k},\mathbf{l})\,a^\star_{\mathbf{k}}a^\star_{\mathbf{l}}\right\}$$
$$\times\left\{\exp\left[2A_0\sqrt{2|\lambda|\sigma}\frac{\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}u-\left(\frac{u\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}\right)^2\right]\right\}|0\rangle.$$

Mais d'après la forme bien connue de la fonction génératrice des polynomes de Hermite :

$$\exp\left[2A_0\sqrt{2|\lambda|\sigma}\frac{\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}-\left(\frac{u\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}\right)^2\right]$$
$$=\sum_0^\infty\left(\frac{u\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}\right)^m\frac{1}{m!}H_m(A_0\sqrt{2|\lambda|\sigma}),$$

où $H_m(x)$ est le polynome de Hermite d'ordre m. D'où :

$$(31)\qquad (A_\sigma^\star)^m\Psi_0=\langle 0|\Psi_0\rangle\left\{\exp-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,V(\mathbf{k},\mathbf{l})\,a_\mathbf{k}^\star a_\mathbf{l}^\star\right\}$$
$$\times\left(\frac{\sigma W_0(-\sigma)}{N\sqrt{2|\lambda|\sigma}}\right)^m H_m(A_0\sqrt{2|\lambda|\sigma})|0\rangle.$$

3° Les vecteurs $A_{\mathbf{k}_1}^\star\ldots A_{\mathbf{k}_n}^\star(A_\sigma^\star)^m\Psi_0$.

Par la même méthode de calcul que celle du paragraphe 2 (1re partie), nous aurons d'abord

$$(32)\qquad \sum_{m=1}^\infty\frac{u^m}{m!}A_{\mathbf{k}_1}^\star\ldots A_{\mathbf{k}_n}^\star(A_\sigma^\star)^m\Psi_0$$
$$=\langle 0|\Psi_0\rangle\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,V(\mathbf{p},\mathbf{q})\,a_\mathbf{p}^\star a_\mathbf{q}^\star\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2u\sigma W_0(-\sigma)}{N}A_0+\frac{u^2\sigma W_0(-\sigma)}{2\lambda N^2}\right]\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{(\sigma')}\begin{vmatrix}\tilde V(\mathbf{k}_{i_1},\mathbf{k}_{i_2}) & \ldots & \tilde V(\mathbf{k}_{i_1},\mathbf{k}_{i_{2p}})\\ & \ddots & \vdots\\ & & \tilde V(\mathbf{k}_{i_{2p-1}},\mathbf{k}_{i_{2p}})\end{vmatrix}\right.$$
$$\times\prod_{j=1}^{n-2p}\left[\int d\mathbf{k}'_j\,a_{\mathbf{k}'_j}^\star\,G(\mathbf{k}'_j,\mathbf{k}_{i_{2p+j}})\right.$$
$$\left.\left.+2u\frac{\sigma W_0(-\sigma)}{N}\frac{f(\omega_{k_{i_{2p+j}}})}{\sqrt{2\omega_{k_{i_{2p+j}}}}}\frac{W_0(-\omega_{k_{i_{2p+j}}})}{1-2\lambda F^+(\omega_{k_{i_{2p+j}}})}\right]\right\}|0\rangle,$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ et la sommation en (σ') ayant la même signification que dans (14).

Dès lors pour obtenir l'expression de $A_{\mathbf{k}_1}^\star\ldots A_{\mathbf{k}_n}^\star(A_\sigma^\star)^n\Psi_0$, il suffit de prendre la valeur pour $u=0$ de la $m^{\text{ième}}$ dérivée en u du second membre de (32). Par suite de sa complexité, nous laisserons au lecteur le soin d'écrire la formule générale correspondante.

3. L'absence de Transformation canonique. — Dans le cas présent, il ne saurait exister de matrice unitaire U telle qu'on ait :

$$A^\star_{\mathbf{k}} = U a^\star_{\mathbf{k}} U^\star.$$

En effet, une telle matrice appliquerait chaque vecteur $a^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots a^\star_{\mathbf{k}_n}|0\rangle$ sur le vecteur $A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}\Psi_0$ et U ne peut être unitaire que si le système des $A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}\Psi_0$ est complet.

Néanmoins, il est toujours intéressant d'introduire l'opérateur U faisant passer de $a^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots a^\star_{\mathbf{k}_n}|0\rangle$ à $A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}\Psi_0$. Cet opérateur isométrique a la forme (19), quand les grandeurs contenues dans (19) sont rapportées au $V(\mathbf{k}, 1)$ propre au cas actuellement étudié. Il est alors facile de montrer que :

$$U a^\star_k U^\star = A^\star_k UU^\star \tag{33}$$

En effet, pour pouvoir reprendre intégralement le calcul du § 3 (1re partie), il suffit que reste valable la relation (22). Mais cette relation est obtenue à partir de (16), dont la démonstration exige seulement que les $A^\star_{\mathbf{k}}$, $A_{\mathbf{k}}$ vérifient les relations de commutation habituelles des créateurs et annihilateurs. Or, nous savons qu'il en est bien ainsi, quelle que soit la valeur de λ, pour les opérateurs définis par (3) ([1]). Nous aurons donc :

$$U a^\star_{\mathbf{k}} U^\star = a^\star_{\mathbf{k}} UU^\star + [U, a^\star_{\mathbf{k}}]U = \left\{\int d\mathbf{k}'\,\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a^\star_{\mathbf{k}'} + \int d\mathbf{k}'\,\Gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}'}\right\} UU^\star,$$

c'est-à-dire (33).

L'opérateur $UU^\star$ est un projecteur (U étant isométrique $U^\star U = I$) dont l'expression, à partir des créateurs et annihilateurs du champ libre, s'obtient très simplement en remarquant que par suite de définition même de U :

$$UU^\star A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}(A^\star_\sigma)^m\Psi_0 = \delta_{m,0} A^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots A^\star_{\mathbf{k}_n}(A^\star_\sigma)^m\Psi_0,$$

d'où résulte :

$$UU^\star = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (A^\star_\sigma)^n (A_\sigma)^n. \tag{34}$$

Si, par ailleurs, on tient compte de :

$$\sum_n \frac{1}{n!} (A^\star_\sigma) UU^\star (A_\sigma)^n = I,$$

de la commutativité des $A_\sigma^\star$, A_σ avec les $A_{\mathbf{k}}^\star$, $A_{\mathbf{k}}$, et de la formule (33), il vient

$$A_{\mathbf{k}}^{\prime\star} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A_\sigma^\star)^n U a_{\mathbf{k}}^\star U^\star (A_\sigma)^n. \tag{35}$$

Pour éclairer la signification de cette formule, nous remarquerons que l'opérateur $U_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A_\sigma^{\star n})U$ est un opérateur isométrique, appliquant tout l'espace de Hilbert sur le sous-espace sous-tendu par les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{m!}}(A_\sigma^\star)^n A_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots A_{\mathbf{k}_m}^\star \Psi_0 \,(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Restreints à ce sous-espace, les opérateurs $U_n a_{\mathbf{k}}^\star U_n^\star$, $U_n a_{\mathbf{k}} U_n^\star$ vérifient les relations de commutation habituelles des créateurs et annihilateurs. L'écriture (35) de $A_{\mathbf{k}}^\star$ apparaît ainsi comme la décomposition de $A_{\mathbf{k}}^\star$ subordonnée à la décomposition de l'espace de Hilbert sous forme d'une somme directe de sous-espaces contenant, respectivement, zéro particule dans l'état σ, une particule dans l'état σ, deux particules dans l'état σ, etc. L'isomorphie de tous ces sous-espaces est évidente. Elle permet une autre décomposition de l'espace de Hilbert attaché au modèle, sous la forme d'un produit tensoriel hilbertien de deux espaces, un espace H_c, isomorphe à l'espace sous-tendu par l'ensemble des vecteurs $A_{\mathbf{k}_1}^\star \ldots A_{\mathbf{k}_n}^\star \Psi_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et un espace H_σ, isomorphe à l'espace sous-tendu par les vecteurs $(A_\sigma^\star)^m \Psi_0 \,(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Par rapport à ces deux décompositions équivalentes de l'espace de Hilbert du modèle, $A_{\mathbf{k}}^\star$, s'écrit :

$$A_{\mathbf{k}}^\star = \sum_n U_n a_{\mathbf{k}}^\star U_n^\star = U a_{\mathbf{k}}^\star U^\star \otimes I_\sigma \tag{36}$$

en désignant par I_σ l'opérateur unité sur $\mathcal{H}_\sigma$.

Quant aux opérateurs U_n, ils peuvent être caractérisés directement à partir de H_0 et $\mathcal{H}$. En effet, on montre aisément que :

$$A_\sigma^\star A_\sigma U U^\star = 0,$$

d'où, en combinant (33) et (27)

$$U H_0 U^\star = \mathcal{H} U U^\star.$$

Soit, puisque $U^\star U = I$

$$U H_0 = \mathcal{H} U$$

à partir de quoi l'on déduit la formule générale

$$U_n H_0 = (\mathcal{H} - n\sigma) U_n, \tag{37}$$

avec les conditions suivantes sur les U_n :

(38) $$U_n^* U_m = \delta_{nm} I.$$

Il apparaît donc, à ce point, que l'étude du modèle de Weutzel est essentiellement liée à la recherche des solutions isométriques de l'équation

(37 *bis*) $$U_E H_0 = (\mathcal{H} - E) U_E.$$

Quand cette équation n'a de solution que pour $E = 0$, nous nous trouvons dans le cas étudié dans la première partie : U_0 est alors unitaire et le modèle n'admet pas d'états liés. Quand l'équation est résoluble pour un ensemble discret de valeurs de E, nous nous trouvons dans le cas présent, les diverses valeurs de E donnant le spectre d'énergie des états liés. Les formules (36) définissent alors les opérateurs de création et d'annihilation des états physiques non liés.

Nous allons maintenant voir comment ces résultats se généralisent quand le système admet des états pathologiques.

CHAPITRE III.

LE CAS PATHOLOGIQUE.

Pour les valeurs de λ inférieures à $-\dfrac{1}{2\int d\mathbf{l}\,\dfrac{f(\omega_l)^2}{\omega_l^2}}$, l'hamiltonien de Weutzel peut s'écrire, à une constante près, qui est sans signification ([1]) :

(39) $$\mathcal{H} = \int d\mathbf{k}\,\omega_k A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}} + \rho\, A(-\rho)\, A(\rho) - \frac{i\rho}{2}$$

où $A_{\mathbf{k}}^*$ est encore défini par les formules (3) et où $i\rho$ est racine de $1 - 2\lambda F(z) = 0$. Quant aux opérateurs $A(-\rho)$ et $A(\rho)$, ils s'écrivent :

(40) $$A(\rho) = \frac{1}{N\sqrt{\rho}}\left\{\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{1}{\rho + i\omega_k}\,a_{\mathbf{k}} + \int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{1}{\rho - i\omega_k}\,a_{\mathbf{k}}^*\right\},$$

(41) $$A(-\rho) = \frac{1}{N\sqrt{\rho}}\left\{\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{1}{\rho - i\omega_k}\,a_{\mathbf{k}} + \int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{1}{\rho + i\omega_k}\,a_{\mathbf{k}}^*\right\},$$

N étant tel que :

$$N^2 = 2\int d\mathbf{k}\,\frac{f(\omega_k)^2}{(\rho^2 + \omega_k^2)^2}.$$

Les opérateurs $A(\rho)$, $A(-\rho)$ sont hermitiens, commutent avec les $A_{\mathbf{k}}$, $A_{\mathbf{k}}^{\star}$ et vérifient les relations de commutation

$$[A(-\rho), A(\rho)] = i. \tag{42}$$

L'imaginaire du second membre interdit de considérer $A(\rho)$ et $A(-\rho)$ comme des créateur et annihilateur et donc de reprendre les méthodes de calcul de la deuxième partie. De plus, elle implique le caractère non défini positif de l'hamiltonien (39), l'absence de vide et un spectre complètement continu d'énergies propres ([1]). Ce sont les détails de cette situation que nous voulons maintenant préciser.

1. Introduction d'un système de base auxiliaire. — Introduisons les opérateurs :

$$\mathcal{A}_{\rho}^{\star} = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(-\rho) - i\,A(\rho)], \qquad \mathcal{A}_{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(-\rho) + i\,A(\rho)]. \tag{43}$$

Ces opérateurs commutent avec les $A_{\mathbf{k}}^{\star}$, $A_{\mathbf{k}}$ et vérifient les relations de commutation habituelles des créateurs et annihilateurs.

La base auxiliaire que nous voulons considérer sera formée par l'ensemble des vecteurs $\frac{1}{\sqrt{n\,!}}\,\frac{1}{\sqrt{m\,!}}A_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots A_{\mathbf{k}_n}^{\star}(\mathcal{A}_{\rho}^{\star})^m\Psi_0$ où le « vide » Ψ_0 est défini par

$$A_{\mathbf{k}}\Psi_0 = \mathcal{A}_{\rho}\Psi_0 = 0. \tag{44}$$

Il sera commode, pour la suite des calculs, d'écrire ces vecteurs de base sous une forme ne faisant intervenir que l'opérateur $A(\rho)$ et les fonctions d'Hermite de cet opérateur. Pour cela, nous introduirons d'abord un « vecteur » Φ_0 par (Φ_0 ayant un caractère formel, puisqu'il n'est pas normé) :

$$\Phi_0 = e^{\frac{(A(\rho))^2}{2}}\Psi_0. \tag{45}$$

Ensuite, un simple raisonnement par récurrence, permet de démontrer la formule :

$$(\mathcal{A}_{\rho}^{\star})^m\Psi_0 = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^m H_m(A(\rho))\Psi_0, \tag{45 bis}$$

où $H_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynome de Hermite. De sorte que nous avons :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n!}}\,\frac{1}{\sqrt{m!}}A_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots A_{\mathbf{k}_n}^{\star}(\mathcal{A}_{\rho}^{\star})^m\Psi_0 \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\frac{1}{\sqrt{m!}}A_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots A_{\mathbf{k}_n}^{\star}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^m e^{-\frac{(A(\rho))^2}{2}}H_m(A(\rho))\Phi_0. \end{aligned} \tag{46}$$

Quand au vecteur Φ_0, on montre facilement, en utilisant (43) et (46) qu'il vérifie

(47) $$A_{\mathbf{k}}\Phi_0 = A(-\rho)\Phi_0 = 0.$$

Il résulte alors des calculs faits dans l'Introduction mathématique [III (20)] et en faisant des raisonnements analogues à ceux de la seconde partie, que l'on a

(48) $$\Phi_0 = \langle 0 \mid \Phi_0 \rangle \left[\exp - \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a^{\star}_{\mathbf{p}} a^{\star}_{\mathbf{q}} \right] \mid 0 \rangle$$

avec

(49) $$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\lambda \frac{w_{i\rho}(\mathbf{p})\, w_{i\rho}(\mathbf{q})}{\omega_p + \omega_q} \frac{f(\omega_p)}{\sqrt{2\omega_p}} \frac{f(\omega_q)}{\sqrt{2\omega_q}},$$

le facteur $\langle 0 \mid \Phi_0 \rangle$ étant obtenu en écrivant la normalisation à l'unité de Ψ_0.

2. Construction des vecteurs propres. — Les vecteurs $A^{\star}_{\mathbf{k}_1} \ldots A^{\star}_{\mathbf{k}_n} (\mathcal{A}^{\star}_{\rho})^m \Psi_0$ sont vecteurs propres de

$$\int d\mathbf{k}\, \omega_k A^{\star}_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}},$$

pour la valeur propre $\omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_n}$. Nous aurons donc comme vecteurs propres de l'hamiltonien total, correspondant à la valeur propre $\omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_n} + E$, des vecteurs de la forme (à des facteurs de normalisation près, voir ci-dessous) :

(50) $$\Psi_E(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} A^{\star}_{\mathbf{k}_1} \ldots A^{\star}_{\mathbf{k}_n} \sum_m C_m(E)\, (\mathcal{A}^{\star}_{\rho})^m \Psi_0,$$

où $\sum_m C_m(E)\, (\mathcal{A}^{\star}_{\rho})^m \Psi_0$ est vecteur propre de l'opérateur :

$$\rho A(-\rho) A(\rho) - i\frac{\rho}{2} = \frac{i\rho}{2}((\mathcal{A}^{\star}_{\rho})^2 - (\mathcal{A}_{\rho})^2),$$

pour la valeur propre E. Les coefficients $C_m(E)$ vérifient la relation :

(51) $$\frac{2E}{i\rho} C_m(E) = C_{m-2}(E) - (m+1)(m+2)\, C_{m+2}(E).$$

Nous déterminerons, d'un coup : ces coefficients en calculant la fonction

$$D_E(x) = \sum_m C_m(E)\, x^m.$$

Par suite de (51), $D_E(x)$ vérifie l'équation différentielle

(52) $$\frac{d^2}{dx^2} D_E(x) - x^2 D_E(x) = \frac{2iE}{\rho} D_E(x).$$

En faisant le changement de variable $y = i^{\frac{1}{2}} x$, cette équation se ramène à une équation étudiée par van Kampen ([5]) dans un contexte très proche de celui qui nous occupe actuellement. Appliquant les méthodes de calcul de van Kampen, nous obtiendrons deux solutions linéairement indépendantes de (52) sous la forme

$$\text{(53)} \qquad D_E^+(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} e^{-\frac{t^2}{4} + tx},$$

$$\text{(54)} \qquad D_E^-(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} e^{-\frac{t^2}{4} - tx}.$$

Si maintenant l'on remarque que, par suite de l'expression de la fonction génératrice des polynome de Hermite :

$$e^{-\frac{x^2}{2} + tx} = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2} - tx} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

nous obtenons, comme solutions de (51), les coefficients

$$\text{(55)} \qquad C_m^+(E) = \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} e^{-\frac{t^2}{4}} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{(56)} \qquad C_m^-(E) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} e^{-\frac{t^2}{4}} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Revenant aux formules (45) et (45 *bis*), nous obtenons finalement deux vecteurs propres de $\rho A(-\rho) A(\rho) - i\frac{\rho}{2}$, correspondant à la valeur propre E, avec les expressions :

$$\Psi_E^+ = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4} - i\frac{E}{2\rho}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} \sum_n \Psi_n(t)\,(-i^n)\, \Psi_n(A(\rho))\, \Phi_0,$$

$$\Psi_E^- = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4} - i\frac{E}{2\rho}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2} - i\frac{E}{\rho}} \sum_n \Psi_n(t)\,(i)^n\, \Psi_n(A(\rho))\, \Phi_0,$$

où nous désignons par $\Psi_n(x)$ la fonction de Hermite normalisée :

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{n!}\, 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Mais, on montre facilement, que :

$$e^{-itx} = \sqrt{2\pi}\sum_n \Psi_n(t)\,(-i)^n\,\Psi_n(x),$$

$$e^{itx} = \sqrt{2\pi}\sum_n \Psi_n(t)\,(i)^n\,\Psi_n(x),$$

d'où finalement :

$$\Psi_E^+ = 2^{-\frac{1}{4}-i\frac{E}{2\rho}}\int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{E}{\rho}}\, e^{-it\mathrm{A}(\rho)}\Phi_0, \tag{57}$$

$$\Psi_E^- = 2^{-\frac{1}{4}-i\frac{E}{2\rho}}\int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2}-t\frac{E}{\rho}}\, e^{it\mathrm{A}(\rho)}\Phi_0. \tag{58}$$

C'est à partir de ces deux formules que nous allons, maintenant, pouvoir exprimer les vecteurs propres de l'hamiltonien (39) en fonction des vecteurs propres du champ libre.

3. Normalisation et expressions à partir du champ libre. — Formons le produit scalaire :

$$(\Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n), \Psi_{E'}^{A'}(\mathbf{k}'_1, \ldots, \mathbf{k}'_{n'})),$$

où A, A′ prennent les valeurs + ou —.

Étant donnée la commutation de $A_{\mathbf{k}}^*$, $A_{\mathbf{k}}$ avec $\mathfrak{A}_\rho$ et $\mathfrak{A}_\rho^*$, ce produit scalaire est nul pour $n \neq n'$, et pour $n = n'$, il vient :

$$(\Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n), \Psi_{E'}^{A'}(\mathbf{k}'_1, \ldots, \mathbf{k}'_n)) = \frac{1}{n!}\,P\begin{pmatrix}\mathbf{k}_1 & \ldots, & \mathbf{k}_n\\ \mathbf{k}'_1, & \ldots, & \mathbf{k}'_n\end{pmatrix}\sum_m m!\, C_m^A(E)\,(C_m^{A'}(E'))^*,$$

où $P\begin{pmatrix}\mathbf{k}_1, & \ldots, & \mathbf{k}_n\\ \mathbf{k}'_1, & \ldots, & \mathbf{k}'_n\end{pmatrix}$ note le permanent construit sur $\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}'_j)$, les coefficients $C_m^A(E)$ étant donnés par (55) et (56). Mais, d'après la normalisation bien connue des fonctions de Hermite, nous avons :

$$\sum_m m!\, C_m^A(E)\,(C_m^{A'}(E'))^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, G_E^A(x)\,(G_{E'}^{A'}(x))^*,$$

où la fonction $G_E^A(x)$ est donnée par :

$$G_E^A(x) = \sum_m C_m^A(E)\left(-\frac{iA}{\sqrt{2}}\right)^m e^{-\frac{x^2}{2}}\,H_m(x) = 2^{-\frac{1}{4}-i\frac{E}{2\rho}}\int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{E}{\rho}}\, e^{-iAtx},$$

d'après les résultats du paragraphe précédent.

Dans ces conditions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, G_E^A(x)(G_{E'}^{A'}(x))^* = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\rho}(E-E')} 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt'\, t^{-\frac{1}{2}-\frac{iE}{\rho}} t'^{-\frac{1}{2}+\frac{iE'}{\rho}} \delta(At - A't')$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } AA' = -, \\ 2^{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\rho}(E-E')}(2\pi)\displaystyle\int_0^\infty dt\, t^{-1-\frac{i}{\rho}(E-E')} & \text{si } AA' = +. \end{cases}$$

Avec le changement de variable $t = e^u$, la dernière intégrale écrite devient :

$$\int_0^\infty dt\, t^{-1-\frac{i}{\rho}(E-E')} = \int_{-\infty}^{+\infty} du\, e^{-\frac{iu}{\rho}(E-E')} = 2\pi\rho\,\delta(E - E')$$

d'où, finalement :

(59) $$(\Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n), \Psi_{E'}^{A'}(\mathbf{k}'_1, \ldots, \mathbf{k}'_n)) = \frac{1}{n!} P\begin{pmatrix}\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n \\ \mathbf{k}'_1, \ldots, \mathbf{k}'_n\end{pmatrix} \delta_{AA'}(2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho\, \delta(E - E').$$

Nous aurons donc une base orthonormée, au sens qu'a ce terme pour un spectre continu, en divisant les vecteurs (50) par $(2\pi)^{\frac{3}{4}} \rho^{\frac{1}{2}}$, les valeurs des coefficients $C_u(E)$ étant données par (55) et (56).

Quand aux expressions des vecteurs propres à partir des vecteurs de base du champ libre, nous les obtiendrons relativement aisément par application des méthodes déjà utilisées dans les première et seconde parties.

Nous formerons donc la fonctionnelle :

$$\sum_n \frac{1}{n!} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n\, \varphi(\mathbf{k}_1) \ldots \varphi(\mathbf{k}_n)\, \Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$$

$$= \langle 0 | \Phi_0 \rangle 2^{-\frac{1}{4}-i\frac{E}{2\rho}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{E}{\rho}} e^{-iAtA(\rho) + \int d\mathbf{k}\,\varphi(\mathbf{k}) A_{\mathbf{k}}^*} e^{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{q}}^*} | 0 \rangle,$$

où $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est donné par (49). En notant que :

(60) $$e^{\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p},\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{q}}^*} A(\rho)\, e^{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, V(\mathbf{p},\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{q}}^*}$$
$$= \frac{1}{N\sqrt{\rho}} \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\rho + i\omega_k} a_{\mathbf{k}} - \frac{2\rho W_0(i\rho)}{N\sqrt{\rho}} A_0,$$

où, de nouveau :

(61) $$A_0 = \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} w_0(\mathbf{k})\, a_{\mathbf{k}}^*,$$

nous aurons :

$$(62)\quad \sum_n \frac{1}{n!}\int d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n\,\varphi(\mathbf{k}_1)\ldots\varphi(\mathbf{k}_n)\,\Psi_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)$$

$$=\langle 0\,|\,\Phi_0\rangle\, 2^{-\frac{1}{4}-i\frac{\mathrm{E}}{2\rho}}\int_0^{\infty} dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{\mathrm{E}}{\rho}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{it^2\mathrm{W}_0(i\rho)^2}{2\lambda\mathrm{N}^2}+\frac{2i\mathrm{A}\rho t\mathrm{W}_0(i\rho)}{\mathrm{N}\sqrt{\rho}}\int d\mathbf{k}\,\varphi(\mathbf{k})\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k}}\,\frac{\mathrm{W}_0(-\omega_k)}{1-2\lambda\mathrm{F}^{+}(\omega_k)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}\,\varphi(\mathbf{k})\,\varphi(\mathbf{l})\,\tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k},\mathbf{l})\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,\mathrm{V}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,a_{\mathbf{p}}^{\star}a_{\mathbf{q}}^{\star}\right.$$
$$\left.+\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'\,a_{\mathbf{k}'}^{\star}\mathrm{G}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\,\varphi(\mathbf{k})+\frac{2i\mathrm{A}\rho t\mathrm{W}_0(i\rho)}{\mathrm{N}\sqrt{\rho}}\mathrm{A}_0\right]|\,0\rangle$$

et nous obtiendrons $\psi_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)$ en appliquant au second membre l'opération $\dfrac{\delta^{(n)}}{\delta\varphi(\mathbf{k}_1)\ldots\delta(\varphi(\mathbf{k}_n))}$ et en posant ensuite $\varphi(\mathbf{k})=0$.

Nous laisserons le soin au lecteur d'écrire la formule générale correspondante en utilisant la méthode de calcul de la première partie. $\mathrm{G}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ et $\tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{k},\mathbf{l})$ sont définis à partir de $\mathrm{V}(\mathbf{k},\mathbf{l})$, donné par (49), par les formules (12) et (13).

4. Structure de l'espace de Hilbert. — I. A partir de maintenant, nous désignerons par $\Psi_{\mathrm{E}}^{\mp}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)$ les vecteurs de base orthonormés, vecteurs propres du hamiltonien total. Et nous aurons :

$$(63)\quad \Psi_{\mathrm{E}}^{\mp}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{3}{4}}\frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n!}}\int_0^{\infty} dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{\mathrm{E}}{\rho}}e^{\mp it\mathrm{A}(\rho)}\mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots\mathrm{A}_{\mathbf{k}_n}^{\star}\Phi_0$$

en omettant le facteur $2^{-i\frac{\mathrm{E}}{\rho}}$ qui n'a pour effet que de modifier la phase.

Étant donnée l'expression (48) de Φ_0, nous pouvons reprendre, à propos des quantités $\mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots\mathrm{A}_{\mathbf{k}_n}^{\star}\Phi_0$, les raisonnements faits dans la première partie (§ 3), les $\mathrm{G}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ et $\tilde{\mathrm{V}}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ étant définis à partir de $\mathrm{V}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, donné par (49), par les formules (12) et (13). Nous obtenons ainsi une quantité U, ayant la forme (19), et telle que

$$(64)\quad \mathrm{U}\,|\,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\mathrm{A}_{\mathbf{k}_1}^{\star}\ldots\mathrm{A}_{\mathbf{k}_n}^{\star}\Phi_0.$$

Nous pouvons alors écrire

$$(65)\quad \Psi_{\mathrm{E}}^{\mp}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)=\mathrm{U}_{\mathrm{E}}^{\mp}\,|\,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle$$

où la quantité $U_E^{\pm}$ s'écrit :

$$U_E^{\pm} = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{2}{4}}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} dt\, t^{-\frac{1}{2}-i\frac{E}{\rho}} e^{\mp it A(\rho)} U. \tag{66}$$

Si l'on tient compte de l'orthonormalisation des vecteurs (63) on démontre aisément que :

$$(U_{E'}^{A'})^* U_E^A = \delta_{AA'}\,\delta(E - E'), \tag{67}$$

où, de nouveau, les A, A' prennent les valeurs + ou —.

Enfin, les vecteurs (63) étant vecteurs propres de l'hamiltonien total, il en résulte, pour les quantités U_E^A l'équation :

$$U_E^A H_0 = (\mathcal{H} - E)\, U_E^A, \tag{68}$$

où $\mathcal{H}$ est donné par (39).

Nous obtenons donc bien une généralisation des équations (37) et (38) de la seconde partie (§ 3) et nous pourrions chercher quelle est, dans le cas étudié, l'analogue de la formule (35). Mais, en fait, le remplacement d'une variable discrète par une variable continue modifie très considérablement la situation, car les quantités U_E^A ne peuvent être des opérateurs isométriques, par suite de (67) et, même, les vecteurs (63) n'appartenant pas, en fait, à l'espace de Fock (leur norme étant infinie) la signification mathématique précise de (64) et (65) est plus qu'ambiguë. Cette question est évidemment liée à celle de la nature exacte des quantités U_E^A. Et c'est une réponse à cette question que va nous fournir la méthode que nous allons maintenant suivre.

II. Considérons l'ensemble des vecteurs de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \varphi(E)\, \Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \qquad [(A = \pm),\ (n = 0, 1, 2, \ldots)]. \tag{69}$$

Si $\varphi(E)$ est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} dE\, |\varphi(E)|^2$ converge, cet ensemble de vecteurs sous-tend un espace de Hilbert isomorphe (à un facteur de normalisation près) avec l'espace de Fock du champ libre. En effet, étant donnée la définition de Φ_0 d'une part, la commutation de $A(\rho)$ avec les $A_{\mathbf{k}}^*$, $A_{\mathbf{k}}$, d'autre part, l'on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(E)\, \Psi_E^A(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, dE = \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\mathbf{k}_1}^* \ldots A_{\mathbf{k}_n}^* \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \varphi(E)\, \Psi_E^A,$$

ce qui, après division par $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dE\,|\,\varphi(E)\,|^2\right]^{\frac{1}{2}}$, peut être mis en correspondance isométrique avec le vecteur $\frac{1}{\sqrt{n\,!}}\,a^\star_{\mathbf{k}_1}\ldots a^\star_{\mathbf{k}_n}\,|\,0\rangle$.

Il existe donc un opérateur $U^A[\varphi(E)]$, défini pour toute fonction $\varphi(E)$ de carré sommable, et tel que :

$$(70)\qquad U^A[\varphi(E)]\,|\,\mathbf{k}_1,\,\ldots,\,\mathbf{k}_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\,\varphi(E)\,\Psi^A_E(\mathbf{k}_1,\,\ldots,\,\mathbf{k}_n).$$

Pour avoir une transformation isométrique quand $\varphi(E)$ est normée à l'unité, il faut :

$$(71)\qquad (U^A[\varphi(E)])^\star\,U^A[\varphi(E)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\,|\,\varphi(E)\,|^2\,I = \|\,\varphi(E)\,\|^2.I$$

en posant, comme à l'habitude :

$$\|\,\varphi(E)\,\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dE\,|\,\varphi(E)\,|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il est facile de montrer, à partir de la valeur du produit scalaire de $\int_{-\infty}^{+\infty} dE\,\varphi(E)\,\Psi^A_E(\mathbf{k}_1,\,\ldots,\,\mathbf{k}_n)$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} dE\,\psi(E)\,\Psi^B_E(\mathbf{l}_1,\,\ldots,\,\mathbf{l}_n)$ que :

$$(72)\qquad (U^A[\varphi(E)])^\star\,U^B[\psi(E)] = \delta_{AB}(\varphi(E),\,\psi(E)).I.$$

Enfin il est clair que $U[\varphi(E)]$ dépend linéairement de la fonction $\varphi(E)$.

Comme il résulte de (71) que la borne de $U[\varphi(E)]$ est inférieure ou égale à $\|\,\varphi(E)\,\|$, nous conclurons, de toutes ces propriétés que $U^A[\varphi(E)]$ est fonction continue de $\varphi(E)$, au sens de la convergence en norme des $\varphi(E)$ et de la convergence uniforme des $U^A[\varphi(E)]$, c'est-à-dire que si $\varphi_\nu(E)\to\varphi(E)$ de telle sorte que $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|\,\varphi_\nu(E)-\varphi(E)\,\| = 0$, alors $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|\,U^A[\varphi_\nu(E)]-U^A[\varphi(E)]\,\| = 0$, en notant par $\|\,A\,\|$ la borne d'un opérateur A. Nous pouvons donc dire que $U^A[\varphi(E)]$ est une distribution à valeurs opératorielles, définie sur l'espace de Hilbert des fonctions d'une variable, de carré sommable.

La signification de U^A_E est maintenant presque immédiate à partir des définitions qui ont été données : U^A_E est reliée à la distribution $U^A[\varphi(E)]$ de la même manière que $\delta(x)$ est reliée à la distribution $\delta(\varphi)$. De sorte qu'on peut écrire, formellement :

$$(73)\qquad U^A[\varphi(E)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\,\varphi(E)\,U^A_E.$$

L'équation (72) n'est alors pas autre chose que la transcription, en termes de distribution, de la relation (67). Quant à (68) elle se transcrit sous la forme :

$$U^A[\varphi(E)]H_0 = \mathcal{H}U^A[\varphi(E)] - U^A[E\varphi(E)] \quad (^2) \tag{74}$$

dont la vérification directe est immédiate.

Cherchons maintenant une expression des $A^*_{\mathbf{k}}$ analogue à l'expression (35). Pour cela, nous remarquerons que l'espace de Hilbert total où se trouve plongé notre modèle peut s'écrire

$$\sum_{\alpha, A=\pm} \oplus H^A]\varphi_\alpha(E)], \tag{75}$$

où, de manière générale, $H^A[\varphi(E)]$ note l'espace de Hilbert sous-tendu par l'ensemble des vecteurs $U^A[\varphi(E)]|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle$ et où l'ensemble des $\varphi_\alpha(E)$ est une base orthonormée complète dans l'espace de Hilbert des $\varphi(E)$. Comme, par la définition même de $U^A[\varphi(E)]$, nous avons :

$$A^*_{\mathbf{k}}U^A[\varphi(E)]a^*_{\mathbf{k}_1}, \ldots, a^*_{\mathbf{k}_n}|0\rangle = U^A[\varphi(E)]a^*_{\mathbf{k}}a^*_{\mathbf{k}_1}, \ldots, a^*_{\mathbf{k}_n}|0\rangle,$$

un raisonnement simple donne :

$$A^*_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha, A=\pm} U^A[\varphi_\alpha(E)]a^*_{\mathbf{k}}(U^A[\varphi_\alpha(E)])^*. \tag{76}$$

L'on peut évidemment reprocher à cette formule, le recours à une certaine base de l'espace des $\varphi(E)$ et il serait préférable d'obtenir une expression de $A^*_{\mathbf{k}}$ débarassée de cette particularité gênante. C'est à quoi nous allons maintenant nous employer en faisant appel à la notion d'intégration sur un espace de Hilbert ([6], [7]), sans toutefois prétendre à une absolue rigueur mathématique.

III. Considérons donc une fonctionnelle $F[\varphi]$ définie sur l'espace de Hilbert des fonctions de module carré sommable $\varphi(E)$. Si l'on développe $\varphi(E)$ sur une base orthonormée complète $\{\varphi_\alpha(E)\}$, nous pourrons considérer $F[\varphi]$ comme une « fonction » $f(c_1, c_2, \ldots)$ d'une infinité de variables $c_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots)$, composantes de $\varphi(F)$ sur les vecteurs de base. Nous serons dans une situation particulièrement claire

(2) $E\varphi(E)$ n'est généralement pas de carré sommable mais l'on sait que les $\varphi(E)$ telles que $E\varphi(E)$ soient de carré sommable forment un ensemble dense dans L^2 et il n'y a plus qu'à faire appel à la continuité de la fonctionnelle $U[\varphi(E)]$.

si $f(c_1, c_2, \ldots)$ ne dépend en fait que d'un nombre fini de c_α, soit $c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n}$. Nous pourrons alors former l'intégrale ([7]) :

$$(77) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n})\, e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n |c_{\alpha_i}|^2} \prod_1^n \frac{d\gamma_{\alpha_i}}{\sqrt{2\pi}} \prod_1^n \frac{d\delta_{\alpha_i}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (c_{\alpha_i} = \gamma_{\alpha_i} + i\delta_{\alpha_i}).$$

Nous noterons par $\int \mathrm{F}[\varphi]\, d\varphi$ cette intégrale, et nous dirons que nous avons intégré la fonctionnelle $\mathrm{F}[\varphi]$ sur l'espace de Hilbert des $\varphi(\mathrm{E})$.

Tout en étant conscients du manque de rigueur mathématique ([6]), nous généraliserons cette « définition » de l'intégration sur l'espace de Hilbert en posant, pour $\mathrm{F}[\varphi]$ dépendant d'une infinité de composantes c_α :

$$(78) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{F}[\varphi]\, d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(c_1, c_2, \ldots)\, e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty |c_i|^2} \prod_1^\infty \frac{d\gamma_i}{\sqrt{2\pi}} \prod_1^\infty \frac{d\delta_i}{\sqrt{2\pi}} \\ \qquad (c_i = \gamma_i + i\delta_i). \end{cases}$$

et nous formerons le vœu que cette « définition » a un sens toutes les fois que nous saurons calculer le second membre.

Nous allons appliquer ces considérations au problème qui nous occupe en calculant l'intégrale :

$$(79) \qquad \mathrm{J}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{A}} = \int d\,\varphi(\mathrm{E})\, \mathrm{U}^{\mathrm{A}}[\varphi(\mathrm{E})]\, a_{\mathbf{k}}^{\star}\, \mathrm{U}^{\mathrm{A}}[\varphi(\mathrm{E})]^{\star}.$$

Nous aurons :

$$\mathrm{J}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{A}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha \bar{c}_\beta\, \mathrm{U}^{\mathrm{A}}[\varphi_\alpha(\mathrm{E})]\, a_{\mathbf{k}}^{\star}\, \mathrm{U}^{\mathrm{A}}[\varphi_\beta(\mathrm{E})]^{\star}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_\alpha |c_\alpha|^2} \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} \prod_\alpha \frac{d\delta_\alpha}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous admettrons que nous pouvons permuter sommation et intégration (ce que justifie, peut-être, la continuité uniforme des $\mathrm{U}[\varphi(\mathrm{E})]$) et nous remarquerons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha \bar{c}_\beta\, e^{-\frac{1}{2}\sum |c_\nu|^2} \prod_\rho \frac{d\gamma_\rho}{\sqrt{2\pi}} \prod_\sigma \frac{d\delta_\sigma}{\sqrt{2\pi}} = 2\,\delta_{\alpha\beta},$$

si l'on tient compte de :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

D'où, en définitive :

(80) $$J_{\mathbf{k}}^{A} = 2\sum_{\alpha} U^{A}[\varphi_{\alpha}(E)]\, a_{\mathbf{k}}^{\star} U^{A}[\varphi_{\alpha}(E)]^{\star},$$

soit, d'après (76) :

(81) $$A_{\mathbf{k}}^{\star} = \frac{1}{2}\sum_{A=\pm}\int d\varphi(E)\, U^{A}[\varphi(E)]\, a_{k}^{\star} U^{A}[\varphi(E)]^{\star},$$

d'où la référence à une base a été éliminée.

La formule ainsi obtenue semble, à première vue, très différente de la formule (36). Mais, en fait, l'espace $\mathcal{H}_{\sigma}$, sous-tendu par les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{n!}}(A_{\sigma}^{\star})^{n}\Psi_0$ est isomorphe à l'espace des fonctions $\varphi(E)$ de module carré sommable et les opérateurs isométriques U_n ne sont rien d'autre que des $U[\varphi_n(E)]$, où les $\varphi_n(E)$ sont les fonctions de Hermite. Et si $\varphi(E) = \sum_{n} c_n \varphi_n(E)$, nous pouvons introduire des distributions $U[\varphi(E)]$ par

$$U[\varphi(E)] = \sum_{n} c_n U_n.$$

Il suffit alors de reprendre les considérations ci-dessus pour mettre la formule (36) sous la forme (81). La différence essentielle entre les deux cas est donc uniquement de nature physique, l'identité étant totale sur le plan mathématique.

Conclusion. — Entre autres conséquences, cette longue étude nous semble mettre sérieusement en question l'assimilation qu'on a voulu faire entre le problème des fantômes dans le modèle de Lee et celui des états pathologiques dans le modèle de Wentzel. Alors que, dans le premier modèle, l'existence de fantômes entraînait un bouleversement profond de l'appareil mathématique utilisé, nous venons de voir qu'ici, la nature des choses n'a nul besoin d'être modifiée. Le cas pathologique implique une structure d'espace de Hilbert identique à la structure propre au cas avec états liés. Seul, diffère le sens physique qu'on peut donner à l'un et l'autre cas, mais, *a priori*, ainsi que l'avait déjà indiqué van Kampen, ([5]) le cas pathologique s'insère dans le cadre formel propre aux théories quantiques.

Par ailleurs, il nous paraît se dégager des résultats obtenus, des enseignements de portée générale sur la façon d'aborder l'étude détaillée d'un modèle de théorie des champs. Nous faisons ainsi allusion, d'une part, à la factorisation obtenue, dans la première partie, pour la matrice de transformation canonique, d'où résultait, de façon simple, la construction de la matrice S, les deux autres facteurs décrivant simplement l'habillage de la source, et, d'autre part, au rôle central joué, dans notre exposé, par l'équation (37 *bis*).

Nous devons, en effet, noter que cette équation fait abstraction de l'espace de Hilbert dans lequel est plongé le modèle et a les caractères d'un problème de valeurs propres posé dans « l'algèbre » engendrée à partir des $a^*_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}$, et de leurs produits. Sa généralisation covariante est immédiate et, dans l'exacte mesure où l'on peut penser que les problèmes de théories des champs doivent se poser dans le cadre de l'algèbre que nous venons d'indiquer, l'espace de Hilbert n'apparaissant qu'au stade final des interprétations physiques, il semble que cette équation devrait jouer un rôle important en relation avec le problème de la définition des champs liés en théorie des champs.

En terminant, je tiens à remercier mes collègues de l'Institut Poincaré, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu apporter à ce travail, et tout particulièrement M. A. Rot dont les remarques et suggestions auront contribué à améliorer le contenu de cet article et M. A. Chevalier, pour les discussions qui ont été à l'origine de l'introduction du produit tensoriel d'espaces de Hilbert dans la deuxième partie.

Je remercie aussi le comité de Rédaction des *Annales de l'Institut Poincaré*, qui a bien voulu accueillir cet article, ainsi que le Centre National de la Recherche Scientifique dont le soutien financier me permet de poursuivre mes recherches.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CHEVALIER et RIDEAU, *Nuovo Cimento*, t. 10, 1958, p. 228.
[2] MUSKHELISHOILI, *Singular integral equations*.
[3] CAIANIELLO, *Nuovo Cimento*, t. 10, 1953, p. 1634.
[4] FEYNMAN, *Physical Review*, t. 84, 1951, p. 108.
[5] VAN KAMPEN, *Physica*, t. 24, 1958, p. 545.
[6] FRIEDRICHS, *Mathematical aspects of quantum theory of Fields* (*Colloque de Lille*, 1957, p. 139).
[7] SEGAL, *Colloque de Lille*, 1957, p. 57.