ROLAND GUY

Sur la forme intégrale de l'équation d'évolution d'un système physique et ses solutions

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 2 (1961), p. 129-148

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1961__17_2_129_0>

Sur la forme intégrale de l'équation d'évolution d'un système physique et ses solutions.

par

Roland GUY,

Université de Montréal (Dép. Math.).

SOMMAIRE.

Le chapitre I rappelle comment, à partir d'un principe d'hérédité au sens de Volterra, A. Visconti a obtenu, par analogie au cas réel, une forme très générale d'équation d'évolution d'un système physique. On cherche à légitimer rigoureusement cette analogie. Pour cela, on considère l'ensemble $\mathcal{L}(B)$ des endomorphismes d'un espace de Banach B complet qui forme un anneau normé. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{C}_s$ des fonctions définies dans l'intervalle $[a, b]$ de R, à valeurs dans $\mathcal{L}(B)$, continues au sens de la norme de $\mathcal{L}(B)$, peut être considéré comme un $\mathcal{L}(B)$-module, topologique à gauche. La recherche de la forme des applications linéaires, bornées en un certain sens, de $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{L}(B)$, généralise le problème classique de la forme des fonctionnelles sur un certain espace fonctionnel. On montre qu'on obtient une intégrale de Stieltjes-Riemann, généralisée à des opérateurs.

Dans le chapitre II, on restreint l'espace de Banach à être un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ complet pour étudier les solutions de l'équation de Visconti, qui est une équation intégrale vectorielle dans $\mathfrak{h}$ à noyau opératoriel non borné. On cherche les conditions d'existence les plus larges, compatibles avec la méthode des approximations sucessives. Le théorème d'existence est appliqué à l'étude du problème de Cauchy d'une équation différentielle homogène dans un espace de Hilbert à noyau non borné.

INTRODUCTION.

Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, parue en 1950, A. Visconti (1) a donné une forme d'équation d'évolution d'un système physique qui, par sa généralité, permettait de retrouver les équations d'évolution des formalismes intégraux moyennant quelques transformations.

Pour parvenir à ce résultat, il s'est appuyé sur un principe d'hérédité au sens de Volterra (2). Mais alors que Volterra n'avait envisagé que des fonctions à valeurs réelles, Visconti a utilisé des fonctions à valeurs opérateurs. Il a traduit le principe d'hérédité par une équation ayant pour les opérateurs, même forme que pour les fonctions à valeurs réelles. Mathématiquement, le pas était considérable.

Le premier problème qui se pose est de légitimer par des considérations rigoureuses ce qui a été posé par analogie.

L'équation obtenue étant une équation intégrale à noyau opérateur, portant sur des fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert ou de Banach, un deuxième problème à examiner est celui de l'existence de ses solutions.

Nous rappellerons d'abord rapidement comment on obtient, par analogie, l'équation de Visconti, puis nous examinerons comment on peut justifier rigoureusement cette équation; enfin nous donnerons des conditions d'existence des solutions qui sont plus larges que celles que nous avons obtenues dans notre thèse (3).

CHAPITRE I.

LA FORME DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME PHYSIQUE.

1. **L'équation de Visconti.** — On définit classiquement l'état d'un système physique par sa fonction d'onde $\psi(t)$. L'évolution du système est régi par une famille d'opérateurs dépendant du temps que nous

(1) *Cf.* A. Visconti [1], [2], [3], [4]; P. Destouches-Février ([1], [2]); J.-L. Destouches et F. Aeschlimann; R. Guy ([1], [2]).

(2) V. Volterra ([1], [2], [3]).

(3) *Cf.* aussi R Guy ([3], [4], [5]).

désignerons par $\mathcal{U}(t, t_0)$ et que, par abus de langage, nous appellerons opérateur d'évolution. Généralement on distingue le cas d'un système isolé ou libre du cas d'un système perturbé ou en interaction avec le reste de l'Univers.

Si $\mathcal{U}_0(t, t_0)$, $\mathcal{H}_0$, $\psi_0(t)$, sont l'opérateur d'évolution, l'hamiltonien et la fonction d'ondes d'un système soustrait à toute influence extérieure, l'équation d'évolution d'un tel système s'écrit ([4])

$$i\frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial t} = \mathcal{H}_0 \mathcal{U}_0.$$

Supposons ensuite qu'au temps $t = t_0$, le système soit mis en interaction avec le reste de l'Univers. On peut déterminer la forme de l'équation d'évolution de la manière suivante due à Visconti ([5]) :

On suppose que la différence entre $\mathcal{U}(t, t_0)$, opérateur d'évolution lorsque le système est en interaction et $\mathcal{U}_0(t, t_0)$, opérateur d'évolution lorsque le système est libre, dépend de toutes les valeurs opératorielles prises par $\mathcal{U}(t, t_0)$ lorsque t parcourt l'intervalle temporel $[t, t_0]$. Si $K(t, t_0)$ est cette différence, on peut écrire

$$K(t, t_0) = \mathbf{F}\,\mathcal{U}(t, t_0),$$

où $\mathbf{F}$ indique une fonction de $\mathcal{U}(t, t_0)$ à valeurs dans un ensemble d'opérateurs dépendant de deux paramètres.

Cette manière d'écrire implique l'hypothèse de dissipation héréditaire de Volterra qui consiste à dire que l'hérédité ne s'exerce qu'à partir d'un temps t_0 non indéfiniment éloigné. De plus, des superpositions dans les conditions initiales devant entraîner des superpositions dans les prévisions, on suppose que l'hérédité est linéaire, donc que $\mathbf{F}$ est une fonction linéaire de $\mathcal{U}(t, t_0)$,

On sait que si $f(t)$ est une fonction réelle de $t \in [a, b]$, appartenant soit à l'espace vectoriel des fonctions continues C soit à l'espace des fonctions de carré intégrable L^2, l'application A, qui à $f(t)$ fait correspondre un nombre, est une fonctionnelle sur cet ensemble; si de plus cette application est bornée, des théorèmes d'analyse fonctionnelle nous

---

([4]) *Cf.* A. Visconti ([2], [3]).
([5]) *Cf.* A. Visconti ([2], [3]).

apprennent que la forme la plus générale d'une telle application est donnée par

$$\mathrm{A}f = \int_a^b f(\tau)\,dk(\tau) \quad \text{si } f \in \mathrm{C} \qquad \text{ou par} \quad \mathrm{A}f = \int_a^b \mathrm{K}(\tau) f(\tau)\,d\tau \quad \text{si } f(\tau) \in \mathrm{L}^2.$$

Si l'on suppose que les noyaux $\mathrm{K}(t)$ et $k(t)$ dépendent d'un paramètre supplémentaire, on obtient non plus un nombre mais une fonction de ce paramètre

$$h(t) = \int_a^b f(\tau)\,dk_t(\tau) \qquad \text{ou} \qquad g(t) = \int_a^b \mathrm{K}(t, \tau) f(\tau)\,d\tau,$$

alors $\int_a^b \mathrm{K}(t, \tau)\{.\}\,d\tau$, par exemple, définit une application de L^2 en lui-même. Visconti, par analogie à ce résultat a posé

$$\mathbf{F} = \int_a^b \mathcal{F}(t, \tau)\{.\}\,d\tau,$$

où $\mathcal{F}(t, \tau)$ est une famille d'opérateurs dépendant de deux paramètres, ce qui donne pour l'opérateur d'évolution

$$\mathfrak{U}(t, t_0) = \mathfrak{U}_0(t, t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(t, \tau)\,\mathfrak{U}(\tau, t_0)\,d\tau. \tag{V}$$

La première démarche à tenter pour donner une forme stricte à cette analogie est de chercher la forme des applications linéaires qui, à des opérateurs bornés dépendant d'un paramètre font correspondre un opérateur qui n'est fonction d'aucun paramètre. Dans le cas habituel, on a une application d'un espace vectoriel dans son corps des scalaires, tandis que dans celui qui nous occupe, nous aurons l'application d'un module dans son anneau d'opérateurs. C'est ce problème d'analyse fonctionnelle que nous allons étudier.

2. L'anneau $\mathcal{C}_s$ des fonctions continues en norme. — Soit $\mathcal{L}(\mathrm{B})$, l'ensemble des endomorphismes d'un espace de Banach complet B, muni de la norme habituelle que nous désignerons par $|.|$. On sait qu'il forme un anneau relativement au produit habituel au sens des opérateurs.

Considérons alors une fonction $\mathrm{A}(t)$ définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ de R, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathrm{B})$, que nous supposerons continue en norme. Si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble de telles fonctions, on voit facilement qu'il forme un groupe additif et de plus un module à gauche ou à droite relativement à l'anneau $\mathcal{L}(B)$. On désignera le module à gauche par $\mathcal{C}_s$ (le module à droite serait désigné par $\mathcal{C}_d$).

On peut introduire dans $\mathcal{C}_s$ une topologie qu'on peut faire dériver d'une sous-norme [6]. Posons, si $A(t) \in \mathcal{C}_s$,

$$\| A(t) \| = \sup_{t \in [a, b]} | A(t) |.$$

On a

1° $\| A(t) \| > 0$ et $\| A(t) \| = 0 \Leftrightarrow A(t) = 0$;

2° Si $\alpha \in \mathcal{L}(B)$, $\|\alpha A(t)\| = \sup|\alpha A(t)| \leqq |\alpha| \sup |A(t)| = |\alpha| . \|A(t)\|$;

3° $\| A(t) + B(t) \| \leqq \| A(t) \| + \| B(t) \|$ si A, $B \in \mathcal{C}_s$, ce qui est immédiat de

$$| A(t) + B(t) | \leqq | A(t) | + | B(t) | \qquad \text{pour tout } t \in [a, b],$$

d'où

$$\sup (| A(t) | + | B(t) |) \leqq \sup | A(t) | + \sup | B(t) |,$$

d'après les propriétés de sup.

D'autre part, on peut voir facilement que cette topologie est compatible avec la structure de $\mathcal{L}(B)$-module de $\mathcal{C}_s$. C'est donc un $\mathcal{L}(B)$-module sous-normé.

Notre but est de montrer que les formes linéaires sur $\mathcal{C}_s$, bornées en un sens que nous préciserons ensuite, ont une forme intégrale généralisant l'intégrale de Stieltjes. Mais nous avons besoin pour cela d'un certain nombre de définitions et de propriétés que nous allons énoncer.

3. Approximation des fonctions $F(t)$ de $\mathcal{C}_s$. — Soit $[a, \nu]$ un intervalle fermé, où $\nu \in [a, b]$. Introduisons tout d'abord la famille de fonctions suivante :

$$F_{n,a\nu}(t) = \begin{cases} I \in \mathcal{C}_s & \text{si } t \in [a, \nu], \\ \beta_{n,\nu}(t) \in \mathcal{C}_s & \text{si } t \in \left[\nu, \nu + \frac{1}{n}\right], \quad \left(\nu + \frac{1}{n}\right) \in [a, b], \\ 0 \in \mathcal{C}_s & \text{si } t \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \beta_{n,\nu}(t) = I n\left(t_\nu + \frac{1}{n} - t\right); \qquad \text{alors} \quad \| \beta_{n,\nu}(t) \| = 1$$

---

[6] J'appelle sous-norme, une fonction à valeurs réelles qui a les propriétés d'une norme, sauf celle qui s'écrit $\| \alpha A(t) \| = | \alpha | . \| A(t) \|$ qui est remplacée par la suivante $\| \alpha A(t) \| \leqq | \alpha | . \| A(t) \|$, pour $\alpha \in \mathcal{L}(B)$ et $A(t) \in \mathcal{C}_s$.

THÉORÈME I. 1. — *Toute fonction* $F(t) \in \mathcal{C}_s$ *peut être approchée autant qu'on le désire dans* $\mathcal{C}_s$ *par une combinaison linéaire à coefficients dans* $\mathcal{L}(B)$ *de fonctions* $F_{n.a\nu}(t)$.

A cet effet, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ par des points

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$$

et l'on forme la fonction

$$G_n(t) = (F(\xi_1) - F(\xi_2))\, F_{n,at_1}(t) + \ldots + F(\xi_p)\, F_{n,at_p}(t),$$

où

$$t_{i-1} \leqq \xi_i \leqq t_i.$$

Examinons cette fonction dans un intervalle quelconque $t_{i-1} \leqq t \leqq t_i$. Tout d'abord dans le cas

$$(a) \qquad t_{i-1} + \frac{1}{n} \leqq t \leqq t_i.$$

D'après la définition de $F_{n,at_i}(t)$, on a

$$F_{n,at_j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = i,\ i+1,\ \ldots,\ p, \\ 0 & \text{pour } j < i. \end{cases}$$

Il reste pour G_n,

$$G_n(t) = F(\xi_i).$$

Dans le cas

$$(b) \qquad t_{i-1} \leqq t \leqq t_{i-1} + \frac{1}{n},$$

on aura

$$F_{n,at_j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = i,\ i+1,\ \ldots,\ p, \\ \beta_{n,t_j}(t) & \quad \text{»} \quad j = i-1, \\ 0 & \quad \text{»} \quad j < i-1, \end{cases}$$

ce qui donne

$$G_n(t) = (F(\xi_{i-1}) - F(\xi_i))\, \beta_{n,t_{i-1}}(t) + F(\xi_i)\, 1.$$

Si l'on garde fixes les points t_i, mais qu'on fait tendre n vers l'infini $\left(\frac{1}{n} < \min\limits_i |t_{i-1} - t_i|\right)$, $\| G_n(t) \|$ tend vers une valeur comprise entre $|F(\xi_i)|$ et $|F(\xi_{i-1}) - F(\xi_i)| + |F(\xi_i)|$.

Formons ensuite

$$\| F(t) - G_n(t) \|.$$

Dans le cas (a), il vient

$$\| F(t) - G_n(t) \| = \| F(t) - F(\xi_i) \| = \sup | F(t) - F(\xi_i) |.$$

On peut toujours, en vertu de la continuité en norme, trouver une partition de $[a, b]$ telle que $| t - \xi_i | < \eta$ entraîne $| F(t) - F(\xi_i) | < \varepsilon$.

Cette différence peut ainsi être rendue plus petite que ε.

Dans le cas (b)

$$\begin{aligned} \| F(t) - G_n(t) \| &= \| F(t) - F(\xi_i) - (F(\xi_{i-1}) - F(\xi_i))\, \beta_{n,t_{i-1}}(t) \| \\ &\leqq \sup [\, | F(\xi_{i-1}) - F(\xi_i) | . | \beta_{n,t_{i-1}}(t) | + | F(t) - F(\xi_i) | \,]. \end{aligned}$$

Comme plus haut, on peut toujours trouver une partition de $[a, b]$ de telle manière que le deuxième terme soit plus petit que ε; quant au premier, écrivons-le

$$\begin{aligned} | F(\xi_{i-1}) - F(\xi_i) | . | \beta_{n,t_{i-1}}(t) | \leqq\ & | F(\xi_i) - F(t_{i-1}) | . | \beta_{n,t_{i-1}}(t) | \\ & + | F(\xi_{i-1}) - F(t_{i-1}) | . | \beta_{n,t_{i-1}}(t) |, \end{aligned}$$

comme $| \xi_i - t_{i-1} | \leqq | t_{i-1} - t_i |$ et $| \xi_{i-1} - t_{i-1} | \leqq | t_{i-2} - t_{i-1} |$, les deux premiers facteurs des deux termes peuvent être rendus arbitrairement petits. Donc, quel que soit i envisagé, en vertu de la continuité uniforme,

$$\| F(t) - G_n(t) \| < 2\varepsilon.$$

4. **Les applications de $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{L}_s(B)$.** — On envisage les applications A' de $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{L}_s(B)$, considéré comme un anneau à gauche par rapport à lui-même, satisfaisant à

a. $A'\left(\sum_1^n A_i(t)\right) = \sum_1^n A'(A_i(t))$, pour $A_i \in \mathcal{C}_s$;

b. $A'(\alpha A(t)) = \alpha A'(A(t))$, homogénéité à gauche, pour $\alpha \in \mathcal{L}(B)$; $A(t) \in \mathcal{C}_s$;

c. il existe un nombre $\mathcal{M}_{A'}$ tel que

$$| A'(A(t)) | < \mathcal{M}_{A'} \sup_{t \in [a,b]} | A(t) |$$

quel que soit

$$A(t) \in \mathcal{C}_s.$$

On peut noter une telle application

$$\langle A, A' \rangle$$

et l'on voit facilement que c'est une application bilinéaire sur $\mathcal{C}_s \times \mathcal{C}_d^*$, l'ensemble $\mathcal{C}_d^*$ des applications $\{A'\}$ étant le dual algébrique de $\mathcal{C}_s$ qui est $\mathcal{L}(B)$-module à droite. On peut noter $\|A'\|$ la plus petite des bornes $\mathfrak{M}_{A'}$ et l'on voit facilement que c'est une sous-norme dans $\mathcal{C}_d^*$ et que

$$|\langle A, A'\rangle| \leqq \|A\|.\|A'\|_{\mathcal{C}_d^*}.$$

Introduisons la notion de *points réguliers et singuliers pour* A'. Les éléments de $\mathcal{C}_s$ sont définis dans $[a, b]$. Soient alors les intervalles

$$I_1 = [t'_1, t''_1] \subset I_2 = [t'_2, t''_2] \subset \ldots \subset I = [a, b].$$

L'ensemble $E(t'_1, t''_1)$ des fonctions continues en norme dans I_1 et nulles en dehors de I_1 est un sous-ensemble de l'ensemble $E(t'_2, t''_2)$ des fonctions continues dans $I_2 \supset I_1$ et nulles en dehors de I_2, puisque toute fonction nulle en dehors de I_2 le sera en dehors de I_1 et que toutes les fonctions continues dans I_2 le seront aussi dans I_1. On a les relations d'inclusion

$$E(t'_1, t''_1) \subset E(t'_2, t''_2) \subset \ldots \subset E(a, b) = \mathcal{C}_s.$$

Il est clair que si $\|A'\|_{(t'_1, t''_1)}$ est la plus petite borne supérieure pour A' sur $E(t'_1, t''_1)$, elle ne peut pas être supérieure à $\|A'\|_{(t'_2, t''_2)}$ la plus petite borne supérieure de A' sur $E(t'_2, t''_2)$, de sorte que

$$\|A'\|_{(t'_1, t''_1)} \leqq \|A'\|_{(t'_2, t''_2)} \leqq \ldots \leqq \|A'\|_{(a, b)} = \|A'\|_{\mathcal{C}_d^*}.$$

Supposons $\tau \in I$ fixe et $\varepsilon > 0$ un nombre décroissant vers zéro, $\|A'\|_{(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)}$ ne peut que décroître lorsque $\varepsilon \to 0$; on a une suite monotone décroissante bornée inférieurement qui tend vers une limite; soit $a(\tau)$ cette limite,

si $a(\tau) > 0$, on dira que τ est un *point singulier* pour A';
si $a(\tau) = 0$, on dira que τ est un *point régulier* pour A' (7).

Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, des points distincts, choisis dans $[a, b]$. On peut trouver n intervalles disjoints I_i les contenant : $\tau_i \in I_i$. Il est alors possible de choisir n fonctions $A_i(t)$ appartenant à $E(I_i) = E(t'_i, t''_i)$,

(7) Nous suivons, en le généralisant, un raisonnement de P. Lévy.

telles, qu'en vertu de la définition du supremum et de la condition c à laquelle satisfont les éléments de $\mathcal{C}_d^*$, on ait

$$|\langle A_i(t),\ A'\rangle| > \|A'\|_{(t'_i, t''_i)} \sup_{t\in[t'_i, t''_i]} |A_i(t)| - \frac{\varepsilon}{n} \geqq a(\tau_i) \sup |A_i(t)| - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit alors la fonction $A(t)$ définie sur la réunion $\bigcup_1^n I_i : A(t) = \sum_1^n A_i(t)$. $A(t)$ est telle qu'elle est égale à l'un ou à l'autre des $A_i(t)$, les autres étant nuls. Ainsi, pour chaque valeur de t, $|\langle A, A'\rangle|$ est égal à l'un ou à l'autre des $|\langle A_i, A'\rangle|$ et de même

$$|\langle A_i,\ A'\rangle| \leqq \|A'\|_{(a,b)} \sup_{t\in[t'_i, t''_i]} |A_i(t)|.$$

En faisant la somme, il vient

$$\sum_1^n a(\tau_i) \sup_{t\in[t'_i, t''_i]} |A_i(t)| - \varepsilon$$
$$\leqq \sum_1^n |\langle A_i,\ A'\rangle| < \|A'\|_{(a,b)} + \text{max de } (\sup|A_1|,\ \sup|A_2|,\ \ldots,\ \sup|A_n|).$$

Or, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de τ_i pour lesquels $a(\tau_i)$ dépasse un nombre positif donné arbitrairement petit, d'où le

THÉORÈME I. 2. — *L'ensemble de tous les points singuliers de* A' *est dénombrable.*

Nous avons défini A' pour les $A \in \mathcal{C}_s$, or la limite pour $n \to \infty$ des F_{n, at_i} n'appartient pas à $\mathcal{C}_s$, on n'obtient pas une fonction continue comme limite. Il faut donc étendre l'ensemble de définition de A'. Nous le ferons ainsi

$$A'\left(\lim_{n\to\infty} F_{n, at_i}\right) =_d \lim_{n\to\infty} A'(F_{n, a_{ti}})$$

si cette limite existe. Et nous allons précisement montrer qu'elle existe. Pour cela formons

$$F_{n, at_i}(t) - F_{m, at_i}(t) = F_{n,m}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $n < m$, d'où $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, cette fonction est continue dans $\left[t_i,\ t_i + \frac{1}{n}\right]$ et nulle en dehors, donc $F_{n,m} \in E\left(t_i,\ t_i + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$|\langle F_{n,m},\ A'\rangle| < \|A'\|_{\left(t_i, t_i+\frac{1}{n}\right)} \sup |\beta_{n,t_i}(t) - \beta_{m,t_i}|,$$

lorsque $n \to \infty$, $\|A'\|_{\left(t_i, t_i+\frac{1}{n}\right)} \to a(t_i)$. Il est clair que $\langle F_{n, at_i}, A' \rangle$ et $\langle F_{m, at_i}, A' \rangle \in \mathcal{L}(B)$. Or on sait que $\mathcal{L}(B)$ est complet si B l'est; si donc $a(t_i) = 0$, $\{F_{n, at_i}\}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(B)$ qui a une limite, désignons-la par $\mathcal{F}(t_i)$:

$$\lim_{n \to \infty} \langle F_{n, at_i}, A' \rangle = \mathcal{F}(t_i) =_d \left\langle \lim_{n \to \infty} F_{n, at_i}, A' \right\rangle,$$

nous poserons de plus $\mathcal{F}(t_0 - 0) = 0$. Nous pouvons alors avoir de suite la forme des applications de $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{L}_s(B)$.

5. Forme des applications de $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{L}_s(B)$. — D'après l'homogénéité de A′, nous pouvons écrire

$$\langle G_n, A' \rangle = (F(\xi_1) - F(\xi_2)) \langle F_{n, at_1}, A' \rangle + \ldots + F(\xi_p) \langle F_{n, at_p}, A' \rangle,$$

si, gardant les points t_i fixes, n devient très grand, on vient de voir dans le paragraphe précédent, que ceci tend vers une limite

$$S = (F(\xi_1) - F(\xi_2)) \mathcal{F}(t_1) + \ldots + F(\xi_p) \mathcal{F}(t_p),$$

ou encore en introduisant $\mathcal{F}(t_0) = 0$,

$$S = F(\xi_1)(\mathcal{F}(t_1) - \mathcal{F}(t_0)) + F(\xi_2)(\mathcal{F}(t_2) - \mathcal{F}(t_1)) + \ldots + F(\xi_p)(\mathcal{F}(t_p) - \mathcal{F}(t_{p-1})).$$

Or, d'après le théorème I.1, nous avons

$$|\langle F(t) - G_n(t), A' \rangle| < 2\, \mathfrak{M}_{A'} \varepsilon.$$

D'où, si le plus grand des intervalles $|t_{i-1} - t_i| \to 0$, S tendra vers une limite qui peut s'écrire

$$\langle F(t), A' \rangle = \int_{a-0}^{b+0} F(t)\, d\mathcal{F}(t),$$

qui est bien une forme intégrale. Cette intégrale généralise les intégrales de Stieltjes-Riemann, telles qu'elles sont définies dans le livre de E. Hille par exemple [8].

---

[8] *Voir* E. HILLE.

6. **Propriétés de $\mathcal{F}(t)$ fonction génératrice.** — Nous dirons qu'une fonction définie dans $[a, b]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(B)$ est *à variation bornée en norme* si, quelle que soit la partition de $[a, b]$ par les points

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b,$$

la quantité

$$\Phi_p = \sum_1^p |\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}(t_{i-1})|$$

est bornée. Nous appellerons $\sup \Phi_p = \Phi$ qui est égal à $\int_a^b |d\mathcal{F}(t)|$, *la variation totale en norme* de $\mathcal{F}(t)$ dans $[a, b]$.

Pour n très grand, nous avons

$$\sum_1^p |\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}(t_{i-1})| = \sum_1^p |A'[F_{n,at_i} - F_{n,at_{i-1}}]| < \mathfrak{M}_{A'} \sum_1^p \sup |F_{n,at_i} - F_{n,at_{i-1}}|.$$

Examinons cette dernière somme dans un intervalle quelconque (t_{i-1}, t_i).

Dans le cas (a) $t_{i-1} + \frac{1}{n} \leq t \leq t_i$:

$$\alpha = \sum_1^p \| F_{n,at_j} - F_{n,at_{j-1}} \| = \ldots = \| F_{n,at_{i-1}} - F_{n,at_{i-2}} \|$$
$$+ \| F_{n,at_i} - F_{n,at_{i-1}} \| + \ldots + \| F_{n,at_p} - F_{n,at_{p-1}} \|,$$

devient

$$\alpha = | I |;$$

dans le cas (b) $t_{i-1} \leq t \leq t_{i-1} + \frac{1}{n}$,

$$\alpha = \| \beta_{n,t_{i-1}}(t) \| + \| I - \beta_{n,t_{i-1}}(t) \| < 2 \| I \|.$$

Théorème I.3. — *La fonction $\mathcal{F}(t)$, fonction génératrice de la forme A′, est à variation bornée en norme :*

$$\Phi_p = \sum_1^p |\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}(t_{i-1})| < 2\,\mathfrak{M}_{A'}.$$

D'après ce que nous venons de voir, toute application A′ détermine une fonction $\mathcal{F}(t)$ à variation bornée en norme. La question qui se pose alors est de savoir si cette représentation est unique.

Supposons qu'il y ait deux fonctions génératrices pour A', soient $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{F}'(t)$, alors

$$\langle F(t),\ A'\rangle = \int_a^b F(t)\, d\mathcal{F}(t),$$

$$\langle F(t),\ A'\rangle = \int_a^b F(t)\, d\mathcal{F}'(t);$$

d'où

$$\int_a^b F(t)\, d(\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}'(t)) = 0 = \int_a^b F(t)\, d\mathcal{G}(t)$$

quel que soit $F(t)$; ainsi, il existerait une fonction $\mathcal{G}(t)$ telle que $\int_a^b F(t)\, d\mathcal{G}(t) = 0$, qui ne se réduirait pas à une constante : nous allons montrer ([9]) que $\int_a^b F(t)\, d\mathcal{G}'(t) = 0$ pour tout $F(t) \in \mathcal{C}_s$ si et seulement si $\mathcal{G}'(t)$ est une constante sur un ensemble partout dense dans $[a, b]$.

Nécessité. — Soit $d \in [a, b]$ un point de continuité de A'. Choisissons la fonction suivante :

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, d], \\ \alpha(t) \in \mathcal{C}_s & \text{si } t \in \left[d, d + \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[d + \frac{1}{n}, b\right], \end{cases}$$

avec $\alpha(t) = 1n\left(d + \frac{1}{n} - t\right)$.

L'intégrale $\int_a^b F\, d\mathcal{G}'$ se décompose en trois intégrales correspondant aux trois intervalles définis ci-dessus. La première est égale à $\mathcal{G}'(d) - \mathcal{G}'(a)$, la dernière est nulle, tandis que

$$\left| \int_d^{d+\frac{1}{n}} \alpha(t)\, d\mathcal{G}'(t) \right| \leq \sup_{t \in \left]d, d+\frac{1}{n}\right[} |\alpha(t)| \int_d^{d+\frac{1}{n}} |d\mathcal{G}'(t)|$$
$$= \text{variation totale de } \mathcal{G}'(t),$$

qui, lorsque $n \to \infty$, tend vers zéro.

([9]) Nous supposerons que $\mathcal{G}(t)$ est à variation bornée en norme et est la fonction génératrice d'une application quelconque de $\mathcal{C}_d^*$.

En définitive, si l'intégrale est nulle quel que soit $F(t)$,

$$\mathcal{G}'(d) - \mathcal{G}'(a) = 0,$$

$\mathcal{G}'$ est bien une constante.

Suffisance. — Réciproquement, si aux points de continuité de A', $\mathcal{G}'(t)$ est une constante, c'est que l'intégrale est nulle, les termes de définition de l'intégrale étant tous nuls. Or nous avons vu que l'ensemble des points de discontinuité de A' est dénombrable dans $[a, b]$, il suit de là que l'ensemble des points de continuité de A' est partout dense dans $[a, b]$ et les points de cet ensemble peuvent être pris comme points de partition de $[a, b]$ pour définir l'intégrale.

Ceci montre que si l'on pose $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$, $\int_a^b F(t)\, d\mathcal{G}(t) = 0$ entraîne que

$$\mathcal{G} = \text{Cte} = \mathcal{F} - \mathcal{F}'.$$

On a alors le théorème

THÉORÈME I.4. — *A toute application A' il correspond une et une seule fonction génératrice $\mathcal{F}(t)$.*

Ceci généralise les théorèmes bien connus sur la forme intégrale des fonctionnelles dus à F. Riez et M. Fréchet. Il est probable qu'on puisse arriver à une généralisation du type Lebesgue, l'intégrale de Bochner ([10]) en serait un cas particulier.

D'autre part, nous n'avons obtenu qu'une partie des résultats que nous désirions obtenir, il faudrait maintenant montrer que toute application de $\mathcal{C}_s$ en lui-même est de la forme

$$\mathbf{F}\, F(t) = \int_a^b F(t)\, d\mathcal{F}_\tau(t) = G(\tau),$$

c'est-à-dire que $G(\tau) \in \mathcal{C}_s$, donc est une fonction continue en norme, mais pour cela il faut un certain nombre de résultats qu'il n'est pas aisé d'obtenir. Les méthodes classiques ne se généralisent pas facilement, car elles reposent sur la notion de convexité, donc sur la notion d'ordre des nombres réels et nous n'avons rien de semblable ici.

([10]) *Cf.* E. HILLE, p. 78 et suiv.

CHAPITRE II.

EXISTENCE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE VISCONTI.

1. Remarques préliminaires. — Nous allons nous restreindre maintenant au cas où l'espace de Banach est un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ complet. Nous poserons

$$\mathcal{U}(t, t_0)\, x = x(t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}_0(t, t_0)\, x = x_0(t) \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{h},$$

l'équation de Visconti (V) s'écrit alors

$$(v) \qquad x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Nous voulons établir par la méthode des approximations successives l'existence de solutions de cette équation dans le cas où $\mathcal{F}(t,\tau)$ n'est pas borné. Nous nous restreindrons dans cette étude, au cas où $\mathcal{F}$ ne dépend que d'un paramètre.

Le théorème spectral nous apprend que le domaine de définition $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ d'un opérateur hermitien non borné $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{h}$ est

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \left\{ x \in \mathfrak{h} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\| d\mathrm{E}(\lambda)\, x \|^2 = \| \mathcal{F} x \|^2 < \infty = l_{\mathcal{F},x} \right\},$$

où $\mathrm{E}(\lambda)$ est la décomposition de l'unité pour $\mathcal{F}$.

Comme $\| x \|$ est toujours fini, il est possible de trouver au moins un nombre $b_{\mathcal{F},x}$ tel que

$$(1) \qquad \| \mathcal{F} x \| \leq b_{\mathcal{F},x} \| x \|.$$

Si l'on envisage une famille $\mathcal{F}(t)$ d'opérateurs non bornés de domaines $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$ dépendant d'un paramètre t variant dans un intervalle compact I de la droite réelle R, on peut écrire l'inégalité (1) pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\| \mathcal{F}(t)\, x(t) \| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{F}(t), x(t)}(t)\, \| x(t) \|.$$

Nous écrirons $x(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$ pour indiquer, que pour la valeur t du paramètre, le point $x \in \mathfrak{h}$ est du domaine de $\mathcal{F}$. Nous indiquerons d'autre part par $\Delta_{x(t)} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$ le domaine des valeurs de la fonction $x(t)$ et par E l'ensemble des fonctions dont le domaine $\Delta \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$.

Nous allons imposer à la famille $\mathcal{F}(t)$ des conditions qui nous permettront d'utiliser encore la méthode des approximations successives. Nous supposerons que $\mathcal{F}(t)$ satisfait aux deux conditions suivantes :

a. $b_{\mathcal{F}(t), x(t)}(t)$ *est indépendant des points de* Δ_x, *mais seulement de ces points et ceci pour toute fonction de* E.

Cela revient à dire qu'il est possible de trouver au moins un nombre indépendant de t tel que (1) ait lieu et que l'ensemble des nombres satisfaisant à cette inégalité est borné; on désignera sa borne supérieure par $B_{\mathcal{F}(t), x(t)}$, c'est un nombre qui dépend de $\mathcal{F}(t)$ et du point $x(t) \in E$; pour $g \in E$, nous aurions une autre borne $B_{\mathcal{F}(t), g(t)}$. Il est clair que cette condition n'implique pas que $\mathcal{F}(t)$ est bornée sur $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$, pour cela il faudrait qu'il existe un majorant $\mathcal{B}_{\mathcal{F}(t)}$ des nombres $\{ B_{\mathcal{F}(t, x(t)} \}$ pour $x(t)$ parcourant E, ce qui aurait lieu, par exemple, si $\Delta_{x(t)} = \Delta_{q(t)} = \ldots = \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$, c'est-à-dire si le domaine de la fonction $x(t)$ recouvrait tout $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$.

b. $\mathcal{F}(t)\, x(t)$ *est intégrable au sens de Bochner* ([11]) *pour tout* $x(t) \in E$ *dans* I.

Il serait intéressant de savoir si par exemple $x(t)$ étant une fonction continue (au sens de la norme de $\mathfrak{h}$) à quelles conditions devrait satisfaire $\mathcal{F}(t)$ pour que la fonction $\mathcal{F}(t)\, x(t)$ soit intégrable. Dans le cas où l'on emploierait l'intégrale au sens de Bourbaki, $\mathcal{F}(t)\, x(t)$ devrait être réglée ([12]), on fait remarquer que la condition suffisante donnée au théorème 1 (livre IV, chap. IV, p. 3) ne peut pas être satisfaite par notre famille d'opérateurs. Il faut en effet pouvoir écrire la différence $\mathcal{F}(t)\, x(t) - \mathcal{F}(t)\, x(t_0)$. Ceci est impossible dans la présente situation du fait que $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)} \neq \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t_0)}$ pour $t \neq t_0$. Dans le cas du théorème 1, le domaine de la fonction est fixe, cette différence a un sens.

2. Procédé d'itération, existence d'une infinité d'itérés. — Introduisons un procédé d'itération en écrivant $x^{(0)} = x_0$ pour $x_0 \in E$,

$$x^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x^{(0)}(\tau)\, d\tau, \qquad \ldots, \qquad x^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x^{(n-1)}(\tau)\, d\tau, \qquad \ldots.$$

([11]) *Voir* E. HILLE, p. 78 et suiv.

([12]) N. BOURBAKI, livre IV, chap. II.

Montrons

THÉORÈME II.1. — *Il suffit que $\mathcal{F}(t)$ satisfasse à a et b pour assurer l'existence d'une infinité d'itérés.*

Pour cela il suffit de montrer que $\| \mathcal{F}(t)\, x^{(n)}(t) \| < \infty$ puisque par définition de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$ tout $x(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$ est tel que $\| \mathcal{F}(t)\, x(t) \| < \infty$.

Tout d'abord si $x^{(0)}(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$, $\mathcal{F}(t)\, x^{(0)}(t)$ est intégrable dans I, d'après b, $\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x^{(0)}(\tau)\, d\tau$ existe et par a :

$$\| \mathcal{F}(\tau)\, x^{(0)}(\tau) \| \leq B_{\mathcal{F}, x^{(0)}} \| x^{(0)}(\tau) \| \quad (^{13}),$$

alors

$$\| x^{(1)}(t) \| \leq \int_{t_0}^{t} \| \mathcal{F}(\tau)\, x^{(0)}(\tau) \|\, d\tau \leq B_{\mathcal{F}, x^{(0)}} \int_{t_0}^{t} \| x^{(0)}(\tau) \|\, d\tau.$$

Nous pouvons toujours supposer que $x^{(0)}(t)$ est une fonction bornée, par exemple une constante scalaire multipliant l'unité de $\mathfrak{h}$, nous supposons en tout cas que $\sup_{t \in I} \| x^{(0)}(t) \|$ existe, alors

$$\| x^{(1)}(t) \| \leq B_{x^{(0)}} \sup_{t \in I} \| x^{(0)}(t) \| \int_{t_0}^{t} d\tau \leq B_{x^{(0)}}\, \alpha\, | t - t_0 | < \infty,$$

si l'on pose $\alpha = \sup_{t \in I} \| x^{(0)}(t) \|$, ce qui montre que $x^{(1)}(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$.

D'après b, $\mathcal{F}(t)\, x^{(1)}(t)$ est intégrable et l'on a

$$\begin{aligned} \| x^{(2)}(t) \| &\leq \int_{t_0}^{t} \| \mathcal{F}(\tau)\, x^{(1)}(\tau) \|\, d\tau \leq B_{x^{(1)}} \int_{t_0}^{t} \| x^{(1)}(\tau) \|\, d\tau \\ &\leq B_{x^{(1)}} B_{x^{(0)}}\, \alpha \frac{(t - t_0)^2}{2\,!}, \end{aligned}$$

$x^{(2)}(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}$. Pour n quelconque, supposant vrai pour $n - 1$,

$$\| x^{(n)}(t) \| \leq B_{x^{(n-1)}} B_{x^{(n-2)}} \ldots B_{x^{(0)}}\, \alpha \frac{(t - t_0)^n}{n\,!}$$

et

$$\| \mathcal{F}(t)\, x^{(n)}(t) \| \leq B_{x^{(n)}} B_{x^{(n-1)}} \ldots B_{x^{(0)}}\, \alpha \frac{(t - t_0)^n}{n\,!} < \infty \quad \text{(I est compact).}$$

---

(13) Nous écrirons $B_{\mathcal{F}, x}$ ou même B_x au lieu de $B_{\mathcal{F}(t), x(t)}$ si aucune confusion n'est possible.

Envisageons la suite

$$S_n(t) = x^{(0)} + \ldots + x^{(n)},$$

on a

$$\| S_n(t) \| < \left(1 + M_1(t - t_0) + M_2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \ldots + M_n \frac{(t-t_0)^n}{n!}\right] \alpha.$$

Si l'on peut trouver un nombre M tel que $M_n < M^n$, la série précédente converge vers une fonction $S(t)$. Cette hypothèse encore une fois n'entraîne pas en général que la famille soit bornée, pour cela, il faudrait que la réunion $\bigcup_i^{\infty} \Delta_{x^{(i)}}$ soit égale à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}(t)}$.

Il est clair que

$$\| S_n(t) \| < \alpha\, e^{M(t-t_0)}$$

quel que soit n, alors $S(t)$ est intégrable ([14]) et

$$\lim \int_I S_n(t)\, dt = \int_I S(t)\, dt$$

et nous pouvons énoncer

THÉORÈME II.2. — *Si $\mathcal{F}(t)$ satisfait aux conditions a, b et c: il est possible de trouver un nombre* M *tel que, quel que soit n,* $M_n < M^n$*;* $S(t)$ *est intégrable et la série* $S(t)$ *peut être intégrée terme à terme.*

3. Équations intégrales à coefficients opérateurs non bornés. — Envisageons l'équation intégrale

$$(v) \qquad x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Les $S_n(t)$ sont les approximations d'ordre n de la méthode des approximations successives pour (v).

Démontrons alors le

THÉORÈME II.3. — *Si $\mathcal{F}(t)$ satisfait aux conditions a, b, c et d : $\mathcal{F}(t)$ est fermé pour tout t dans* I, *alors :* 1° $S(t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}(t)}$*;* 2° $S(t)$ *est une fonction fortement et absolument continue et a une dérivée forte presque partout;* 3° *c'est une solution de* (v).

([14]) *Voir* HILLE, *loc. cit.*, théorème 3.7.9, p. 83.

1° Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}(t)\,S_n(t) \to L$. En effet, d'après a et c :

$$\| \mathcal{F}(t)\, x^{(j)}(t) \| \leqq B_{x^{(j)}} \| x^{(j)} \| \leqq M \| x^{(j)} \|,$$

alors

$$\| \mathcal{F}(t)\, S_n(t) \| \leqq \left(1 + \ldots + M^n \frac{(t-t_0)^n}{n!} \right) \alpha M \leqq M \| S_n \|$$

Comme $S_n \to S$, $\mathcal{F}(t)\, S_n(t) \to L$; $\mathcal{F}(t)$ étant fermé, pour tout $t \in I$,

$$\mathcal{F}(t)\, S(t) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(t)\, S_n(t) \qquad \text{et} \qquad S(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}(t)}.$$

2° On a

$$S(t) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau) \sum_{j=0}^{\infty} x^{(j)}\, d\tau = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau,$$

ce qui montre que $S(t)$ est la dérivée presque partout de $\alpha(t)$.

3° Remplaçons $x(t)$ sous le signe somme dans (v) par $S(t)$, l'intégrale existe d'après 1°, et l'on peut intervertir les deux signes de sommation, on a

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x^{(j)}(\tau)\, d\tau \right],$$

mais

$$\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x_0(\tau)\, d\tau = x^{(1)}(t), \qquad \ldots, \qquad x^{(j+1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x^{(j)}(\tau)\, d\tau,$$

la série entre crochets peut s'écrire $x(t) - x^{(0)}(t)$, d'où

$$x(t) - x^{(0)}(t) + x(t) \equiv x(t).$$

Théorème II.4. — *La série* $S(t)$ *est l'unique solution de* (V).

Supposons qu'il y en ait deux : $x(t)$ et $y(t)$, on aurait

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

$$y(t) = x^{(0)}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

en retranchant terme à terme, il vient

$$z(t) = x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, z(\tau)\, d\tau = F\, z(t).$$

On peut écrire

$$z^{(1)}(t) = \mathrm{F}\,z(t) = z(t),$$

$$z^{(2)}(t) = \mathrm{F}\,z(t) = z(t), \qquad \text{de même} \quad z^{(p)}(t) = \mathrm{F}\,z^{(p-1)}(t) = z(t).$$

Montrons que

$$\| x(t) - y(t) \| = \| z(t) \| = 0.$$

$\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(\tau)\, z(\tau)\, d\tau$ existe d'après le théorème II.2 et d'après b (la différence de deux solutions est encore une solution). Alors

$$\| z^{(1)}(t) \| \leqq \mathrm{B}_{z(t)} \sup \| z(t) \| (t - t_0), \qquad \sup \| z(t) \| = \beta,$$

$$\| z^{(n)}(t) \| < \beta\, \mathrm{B}_{z(n)} \frac{(t - t_0)^n}{n\,!} \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

4. **Application aux équations différentielles.** — On peut appliquer les théorèmes précédents à l'existence des solutions du problème de Cauchy relativement à l'équation différentielle homogène

$$\text{(D)} \qquad \frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(t)\, x(t).$$

Supposons que $\mathcal{F}(t)$ satisfasse à a, b, c, d.

Si $y(t)$ est solution de (D), elle est du domaine de $\mathcal{F}(t)$, elle est intégrable; on déduit (v) de (D) par intégration. Réciproquement si $y(t)$ est solution de (v) par le théorème II.3, c'est une fonction qui admet une dérivée forte presque partout, $y(t)$ a pour dérivée $\mathcal{F}(t)\, y(t)$ presque partout : (D) $\Leftrightarrow$ (v).

Alors par les théorèmes II.3 et II.4, (D) a une et une seule solution différentiable presque partout dans I.

BIBLIOGRAPHIE.

BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématiques*, livre IV, chap. II.

DESTOUCHES (J.-L.) et AESCHLIMANN (F.). — *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle* (*Act. scient. et industr.* n° 1277, Hermann, Paris, 1959).

DESTOUCHES-FÉVRIER (P.) :

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1742.

[2] *La structure des théories physiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1951.

GUY (R.) :

[1] *Thèse* (dact.), Paris, 1954.

[2] *L'équation d'évolution d'un système physique*, Gauthier-Villars, Paris (en préparation).

[3] *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 288.
[4] *Ibid.*, t. 235, 1952, p. 1194.
[5] *Ibid.*, t. 238, 1954, p. 46.

HILLE (E.). — *Functional Analysis and semi-groups* (*Amer. Math. Soc.*, Coll. vol. 31 2e éd., 1957).

LÉVY (P.). — *Problèmes concrets d'Analyse fonctionnelle*, Paris, 1951.

VISCONTI (A.) :

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1744.
[2] *J. Phys. Rad.*. t. 12, 1951, p. 726
[3] *Thèse* (dact.), Paris, 1953.
[4] *Théorie quantique des champs* (sous presse).

(*Conférence faite le* 15 *juin* 1960 *à l'Institut Henri Poincaré.*)